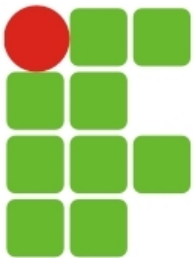


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE – CAMPUS FORTALEZA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM

RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O MODELO DE COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI: RELAÇÕES RECORRENTES N-DIMENSIONAIS E REPRESENTAÇÕES POLINOMIAIS E MATRICIAIS

FORTALEZA - CE

2018

RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O MODELO DE COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI: RELAÇÕES RECORRENTES N-DIMENSIONAIS E REPRESENTAÇÕES POLINOMIAIS E MATRICIAIS

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

FORTALEZA - CE

2018

RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O MODELO DE COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI: RELAÇÕES RECORRENTES N-DIMENSIONAIS E REPRESENTAÇÕES POLINOMIAIS E MATRICIAIS

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24 / 09/ 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri – URCA

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Rodrigo Lacerda Carvalho
Universidade Federal do Cariri – UFCA

Prof. Dra. Ana Cláudia Gouveia de Sousa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

FORTALEZA - CE

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48e Oliveira, Rannyelly Rodrigues de.
Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-Dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais / Rannyelly Rodrigues de Oliveira. - 2018.
220 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

1. Engenharia Didática. 2. Teoria das Situações Didáticas. 3. Modelo Complexo de Fibonacci. 4. Polinômios Bivariados de Fibonacci. 5. Quaternions e Octonions de Fibonacci. I. Titulo.

CDD 510.07

Dedico esta dissertação ao meu amado pai Francisco Nogueira de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por mais uma conquista.

Agradeço ao meu pai, Francisco Nogueira de Oliveira, pela dedicação e incentivo aos estudos. Por sempre compreender a minha ausência em muitos momentos de sua vida, como consequência de minha ocupação com as atividades do Mestrado. Por acompanhar meu desenvolvimento profissional e acadêmico. E, por acreditar, incondicionalmente, no meu potencial.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pela sua paciência e dedicação nos momentos de orientação. E, pelo incentivo à pesquisa. Além do mais, expresso meus agradecimentos:

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira, pela sua disponibilidade e suas sugestões no desenvolvimento da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Gilvandenys Leite Sales, pelos momentos de aprendizado, pela atenção e pelo incentivo à pesquisa.

A minha mãe Rosangela de Oliveira, aos meus irmãos; David de Oliveira e Wilker de Oliveira, e ao meu esposo Karleone Magalhães por permitirem compartilhar minhas vivências e conquistas acadêmicas.

A minha amiga Helena de Andrade por sua presença significativa nesta fase da minha vida, pelo seu companheirismo nos momentos de estudos, descontração, dificuldades e superação. E, pelas experiências vivenciadas e compartilhadas em viagens e eventos.

Por fim, aos meus amigos Loan Medeiros, Jeirla Monteiro, Madalena Matos e Leticia Almeida pelo incentivo e companheirismo. E, aos colegas mestrandos pelos conhecimentos compartilhados durante o curso.

“Existe algo que é mais forte do que o talento: chama-se determinação.”

Ory Rodrigues Krishnamurti.

RESUMO

Esta pesquisa apresentou uma investigação em situações de ensino sobre o estudo do processo de complexificação do modelo recursivo unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ a partir da inserção de variáveis e da unidade imaginária *i*. Essa relação recorrente representa e matematiza a situação-problema sobre a reprodução de coelhos proposta por Leonardo Pisano em 1202, constituindo a gênese do modelo de Fibonacci (MF). Esta pesquisa teve o objetivo de estudar a complexificação da Sequência de Fibonacci (SF), a fim de explorar, em situações didáticas, as representações complexas do MF. Nesse sentido, foi feita uma transposição didática do modelo complexo de Fibonacci, considerando seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Para isso, foi feita uma análise no campo epistêmico-matemático através da abordagem de propriedades inerentes ao modelo complexo de Fibonacci. Inicialmente, com a inserção de componentes imaginárias e, consequentemente, do aumento dimensional da recorrência, são exploradas relações recorrentes uni, bi, tri e *n*-dimensionais para os números Gaussianos de Fibonacci, que descrevem os termos da SF na forma complexa. Além do mais, foram discutidas representações matriciais e polinomiais na variável real e complexa. Nesse repertório, vale destacar a classe dos Polinômios Bivariados, os Quaternions e Octonions definidos para o MF. À vista disso, este trabalho foi organizado de acordo com o percurso metodológico da Engenharia Didática (ED): análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori e* validação. E, as situações de ensino foram elaboradas com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e aplicadas através da proposição de situações-problema. As situações didáticas realizadas permitiram mobilizar o pensamento intuitivo do estudante em direção ao raciocínio inferencial, possibilitando a compreensão de determinadas propriedades dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci com ênfase na sua abordagem matricial e polinomial complexa, da fórmula variante de Binet e extensão da SF complexa para índices inteiros. Finalmente, pode-se concluir que foi oportunizado aos docentes de Matemática, em formação inicial, o desenvolvimento de uma concepção epistemológica do ensino de História da Matemática (HM), no que diz respeito a sua relação intrínseca com a epistemologia das relações matemáticas Fibonaccianas evidenciando, assim, sua evolução numa perspectiva histórica. De fato, alguns alunos manifestaram essa concepção.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. Modelo Complexo de Fibonacci. Polinômios Bivariados de Fibonacci. Quaternions e Octonions de Fibonacci.

ABSTRACT

This research presented an investigation in teaching situations about the study of the process of complexification of the one-dimensional recursive model $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ with $f_0 = 0$ and $f_1 = 1$ from the insertion of variables and the imaginary unit *i*. This recurrent relationship represents and mathematicises the problem situation on rabbit breeding proposed by Leonardo Pisano in 1202, constituting the genesis of the Fibonacci Model (MF). The aim of this research was to study the Fibonacci Sequence (SF) complexification in order to explore the complex representations of the MF in didactic situations. In this sense, a didactic transposition of the complex Fibonacci model was made, considering its epistemological, cognitive and didactic aspects. For this, an analysis was made in the epistemic-mathematical field through the approach of properties inherent to the complex Fibonacci model. Initially, with the insertion of imaginary components and consequently the dimensional increase of recurrence, uni, bi, tri, and n-dimensional recurrent relations are explored for the Gaussian Fibonacci numbers, which describe the terms of SF in complex form. In addition, matrix and polynomial representations were discussed in the real and complex variable. In this repertoire, it is worth mentioning the class of Bivariate Polynomials, the Quaternions and Octonions defined for the MF. In view of this, this work was organized according to the methodological course of Didactic Engineering (ED): preliminary analysis, conception and *a priori* analysis, experimentation and *a posteriori* analysis and validation. And, the teaching situations were elaborated focusing on the Theory of Didactic Situations (TSD) and applied through the proposition of problem situations. The didactic situations allowed to mobilize the student's intuitive thinking towards inferential reasoning, allowing the understanding of certain properties of Bivariate Complex Fibonacci Polynomials with emphasis on their complex matrix and polynomial approach, the Binet variant formula and the extension of the complex SF for integer indices. Finally, it can be concluded that the development of an epistemological conception of the History of Mathematics (HM) was offered to the teachers of Mathematics, in initial formation, regarding its intrinsic relation with the epistemology of the mathematical relations Fibonaccianas evidencing, thus, its evolution in a historical perspective. In fact, some students have expressed this view.

Keywords: Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. Complex Fibonacci Model. Bivariate Fibonacci Polynomials. Fibonacci Quaternions and Octonions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Leonardo Pisano (Fibonacci) 38
Figura 2 – Espiral de Fibonacci: construção no *Software GeoGebra* 42
Figura 3 – Propriedade comutativa: visualização das matrizes do tipo $Q^n \cdot X$ e $X \cdot Q^n$ no *CAS Maple* 51
Figura 4 – Outros casos particulares da sequência dos Gaussianos de Fibonacci visualizados no *CAS Maple* 57
Figura 5 – Teorema fornecido por Harman (1981) 61
Figura 6 – Produtos matriciais visualizados no *CAS Maple* 93
Figura 7 – 1º caso de visualização no *CAS Maple:* decomposição em fatores irredutíveis dos termos polinomiais 94
Figura 8 – 2º caso de visualização no *CAS Maple:* decomposição em fatores irredutíveis dos termos polinomiais. 95
Figura 9 – Quaternions: vetores no espaço quadrimensional (*Software GeoGebra*) 126
Figura 10 – Quaternions: subespaço bidimensional isomorfo aos números complexos (*Software GeoGebra*) 126
Figura 11 – Octonions: Plano Fano (*Software GeoGebra*) 156
Figura 12 – Primeiros termos das sequências bivariadas polinomiais de Fibonacci e Lucas 169
Figura 13 – Matriz tridiagonal 171
Figura 14 – Quadro comparativo da SF com o modelo matemático dos PBCF 173
Figura 15 – Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci 176
Figura 16 – Números Gaussianos de Fibonacci: plano de Argand-Gauss (*Software GeoGebra*) 177
Figura 17 – Relação entre SF e SPBCF (aluno A_1, fases de ação e formulação) 179
Figura 18 – Determinação de um termo da SPBCF (aluno A_4, fase de validação) 180
Figura 19 – Determinação de um termo da SPBCF (aluno A_1, fase de validação) 180
Figura 20 – Caracterização da matriz proposta por Asci & Gurel (2012) como tridiagonal (aluno A_1, fase de ação) 181
Figura 21 – Estudo do comportamento da matriz tridiagonal nas ordens quadradas (aluno A_1, fase de ação) 181
Figura 22 – Estudo do comportamento da matriz tridiagonal nas ordens quadradas (aluno A_5, fase de ação) 181

Figura 23 – Identificação do determinante das matrizes como sendo uma representação dos elementos da SPBCF (aluno A_2, fase de formulação) 182
Figura 24 – Identificação do determinante das matrizes como sendo uma representação dos elementos da SPBCF (aluno A_4, fase de formulação) 182
Figura 25 – Passo indutivo (aluno A_2, fase de validação) 182
Figura 26 – Demonstração de $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0,$ por indução matemática (aluno A_1, fase de validação) 182
Figura 27 – Demonstração de $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0,$ por indução matemática – inserção do passo indutivo (aluno A_1, fase de validação) 183
Figura 28 – Demonstração da Fórmula Variante de Binet – parte 1 (aluno A_1) 184
Figura 29 – Demonstração da Fórmula Variante de Binet – parte 2 (aluno A_1) 184
Figura 30 – Interpretação histórica e evolutiva da SF (aluno A_3, fase de ação) 185
Figura 31 – Hiato histórico nos estudos da SF (aluno A_2, fase de formulação) 185
Figura 32 – Fórmula de Binet (aluno A_4, fase de ação) 186
Figura 33 – Fórmula de Binet e sua variante (aluno A_4, fase de ação) 186
Figura 34 – Fórmula variante de Binet (aluno A_1, fase de formulação) 187
Figura 35 – Fórmula variante de Binet (aluno A_4, fase de validação) 187
Figura 36 – Verificação de $f_{-n}(x,y) = \dfrac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$ para casos particulares (aluno A_5) 187

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Esquematização da reprodução de coelhos imortais 45
Tabela 2 – Identidades uni, bi e tridimensionais para os números complexos de Fibonacci ... 77
Tabela 3 – Propriedades oriundas dos modelos de Fibonacci e Lucas 96
Tabela 4 – Identidades do modelo de Fibonacci discutidas na variável complexa 123
Tabela 5 – Produto quateriônico..... 125
Tabela 6 – Produto octoniônico..... 155
Tabela 7 – TSD: Categorização dos momentos de resolução das situações-problema 188

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
HM	História da Matemática
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IREM	*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*
MDC	Máximo Divisor Comum
MF	Modelo de Fibonacci
OF	Octonions de Fibonacci
PBCF	Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci
PBF	Polinômios Bivariados de Fibonacci
PUD	Programa de Unidade Didática
QCF	Quaternions Complexos de Fibonacci
QF	Quaternions de Fibonacci
SF	Sequência de Fibonacci
SGP	Sequência Generalizada Polinomial
SPBCF	Sequência dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci
SPF	Sequência Polinomial de Fibonacci
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....14
1.1 Análises Prévias.....14
1.1.1 Revisão Bibliográfica.....14
1.1.2 Abordagem Didática e Cognitiva da Sequência de Fibonacci.....16
1.2 Problemática e Justificativa da Pesquisa.....16
1.3 Objetivos da Pesquisa.....18
1.3.1 Objetivo Geral.....18
1.3.2 Objetivos Específicos.....18
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....20
2.1 A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas.....20
2.1.1 Análises Preliminares.....*22*
2.1.2 Concepção e Análise a Priori.....29
2.1.3 A Teoria das Situações Didáticas.....30
2.1.4 Experimentação.....34
2.1.5 Transposição Didática e Contrato Didático.....34
2.1.6 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa).....36
2.2 O Modelo de Fibonacci.....37
3 CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: A COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI 44
3.1 Relações Recorrentes de Fibonacci: Inserção da Unidade Imaginária e Crescimento Dimensional 44
3.1.1 Modelo Recursivo Unidimensional de Fibonacci e Identidades.....45
3.1.2 Números Gaussianos de Fibonacci e Teoremas.....48
3.1.3 Relações Recorrentes Bidimensionais e Identidades.....58
3.1.4 Relações Recorrentes Tridimensionais e Identidades.....68
3.1.5 Relações Recorrentes n-Dimensionais e Identidades.....77
3.2 Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF).....86
3.2.1 Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF).....97
3.3 O Modelo de Fibonacci na Variável Complexa.....104
3.3.1 A Fórmula de Honsberger e as Identidades de Cassini, d'Ocagne e Catalan 109
3.3.2 Extensão para Índices Inteiros: Representações na Variável Complexa.....118
3.3.3 As Representações na Variável Complexa z.....121

3.4 Quaternions Complexos de Fibonacci (QCF).....124
3.4.1 Representações Matriciais para os Quaternions de Fibonacci.....130
3.4.2 Os Quaternions de Fibonacci na Variável Complexa.....150
3.5 Octonions de Fibonacci (OF).....154
3.5.1 Os Octonions de Fibonacci na Variável Complexa.....162
4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DA COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI NO CURSO DE LICENCIATURA.....167
4.1 Concepção das Situações Didáticas.....167
4.2 Análise *a Priori* das Situações Didáticas.....169
4.3 Experimentação.....175
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....176
5.1 Análise *a Posteriori* e Validação Interna da Pesquisa.....178
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....192
REFERÊNCIAS.....195
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMA.....201
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE).....204
APÊNDICE C – ESTRUTURA DA PESQUISA: ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....207
APÊNDICE D – CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI.....210
APÊNDICE E – DEFINIÇÕES INERENTES À ÁLGEBRA.....211
ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA (IFCE – CAMPUS FORTALEZA).....213
ANEXO B – PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA (PUD): DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (IFCE – CAMPUS FORTALEZA).....215
ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP).....217

1 INTRODUÇÃO

A Didática da Matemática (DM) abrange pesquisas que investigam a existência e o surgimento de possíveis obstáculos apontados na construção epistemológica de conceitos matemáticos em situações de ensino. Nessa perspectiva, este trabalho faz um estudo sobre a evolução histórica do Modelo de Fibonacci (MF), com ênfase no seu processo de complexificação, a fim de transformá-lo em um conteúdo a ser ensinado.

Nesse sentido, aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos são considerados como pressupostos desta pesquisa, que foi organizada e escrita conforme a estrutura metodológica da Engenharia Didática (ED) de Artigue (1995) em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976). Doravante, será apresentado o percurso inicial traçado para se realizar esta pesquisa, assim, são feitas análises prévias fundamentadas na Engenharia Didática, em seguida, a problemática e a justificativa da pesquisa são discutidas. E, finalmente, a questão norteadora é apresentada e os objetivos gerais e específicos são definidos.

1.1 Análises Prévias

De acordo com as concepções de Almouloud & Silva (2012), as análises prévias desta pesquisa foram realizadas com base na ED. Dessa forma, esse processo foi organizado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino e o MF. Na outra etapa, foi feita uma descrição da abordagem didática e cognitiva da Sequência de Fibonacci (SF) relativa ao contexto em que se pretendia aplicar e desenvolver a pesquisa.

1.1.1 Revisão Bibliográfica

Com o intuito de delimitar a problemática, o objeto e objetivos desta pesquisa, foi feito um levantamento bibliográfico de artigos, dissertações e livros que abordam a SF, ED e TSD. Nesse acervo, destaca-se a Dissertação de Mestrado de Santos (2017) sobre a generalização da SF através da ED. Todavia, este trabalho possui um campo epistêmico-matemático Complexo definido para o modelo de Fibonacci, representando, assim, uma ampliação da abordagem Fibonacciana feita por Santos (2017). Dessa forma, nesta revisão bibliográfica,

podem-se destacar dois momentos: um para análise matemática e outro para reflexão da metodologia de pesquisa e teoria de ensino.

No primeiro momento, foram pesquisadas definições, relações e propriedades matemáticas inerentes à gênese e ao processo histórico-evolutivo com ênfase na complexificação do MF. Inicialmente, foram estudados os números Gaussianos de Fibonacci através de relações recorrentes uni, bi, tri e *n*-dimensionais presentes nos trabalhos de Berzsenyi (1977), Harman (1981), Pethe & Horadam (1986), Horadam (1993), Koshy (2001), Oliveira, Alves & Paiva (2017).

Em seguida, foi realizado um estudo sobre a Sequência Polinomial de Fibonacci (SPF) abordada nos artigos de Brother (1963), Hoggatt & Long (1974) e Witford (1977). Além disso, os Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF) foram investigados com base na literatura matemática de Hoggatt & Long (1974), Asci & Gurel (2012), Alves & Catarino (2016; 2017). E, o modelo de Fibonacci na variável complexa é discutido nos artigos de Taskoprü & Altintas (2015) e Alves & Oliveira (2017).

Ainda sobre o campo epistêmico-matemático, foram explorados os Quaternions Complexos de Fibonacci e suas propriedades discutidas nos artigos da Matemática Pura, nos quais podem ser destacados os autores: Hamilton (1848), Horadam (1963; 1993), Conway & Smith (2003), Sangwine, Ell & Biham (2011), Halici (2012; 2013), Flaut & Shpakivskyi (2013), Dray & Manogue (2015), Oliveira & Alves (2018), Alves (2018a).

Além do mais, foram estudados os Octonions fundamentando-se nos trabalhos de Conway & Smith (2003), Pendeza (2006), Batista & Santos (2012), Dray & Manogue (2015), Santos (2016) e Karataş & Halici (2016). E, numa abordagem octoniônica da SF, foram usados como referências os seguintes autores: Keçilioglu & Akkus (2014), Savin (2015), Halici (2015), Ipek & Çimen (2016) e Alves (2018a).

Na segunda etapa, foram realizadas leituras sobre a ED e TSD. Nesse contexto, destacam-se os autores: Brousseau (1976; 2008), Artigue (1995), Pais (2002), Almouloud (2007), Almouloud & Silva (2012), Almouloud (2016), Alves (2016a) e Silva & Almouloud (2018) que investigam as situações de ensino se orientando na vertente francesa da DM numa abordagem teórica e metodológica. A seguir, será feita uma descrição do contexto didático-cognitivo em que a SF está inserida.

1.1.2 Abordagem Didática e Cognitiva da Sequência de Fibonacci

Neste tópico, será descrito o contexto didático-cognitivo em que a SF é abordada e, também, onde a pesquisa foi aplicada e desenvolvida. Dessa forma, foi analisada a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus Fortaleza. Esse curso foi escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática. Logo, as ementas das disciplinas que compõem a matriz do curso foram avaliadas, a fim de selecionar a que melhor se adequasse à proposta desta pesquisa. Após isso, foi definida a disciplina de História da Matemática (HM) para aplicação e desenvolvimento da pesquisa.

Dessa forma, vale comentar que a disciplina de HM é obrigatória na matriz curricular (ver Anexo A) do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, foi verificado que a ementa da disciplina de HM (ver Anexo B) abrange os seguintes assuntos: o conceito de número e os sistemas de numeração; o processo histórico-evolutivo da Aritmética, Álgebra e Geometria; a biografia dos matemáticos que contribuíram significativamente para esse processo e a História da Matemática no Brasil.

Com isso, constatou-se que a SF é trabalhada na seção que discute a HM no contexto da Idade Média, em que o matemático Leonardo de Pisa propõe, na sua obra *Liber Abbaci*, o problema que deu origem à SF. Além do mais, dentre os livros adotados usualmente como aporte na disciplina de HM e disponibilizados na biblioteca da instituição, destacam-se os dos autores: Estrada, e*t al*. (2000), Eves (2004) e Boyer (2006). Esses livros abordam a SF de forma pouco pormenorizada, centrando a discussão na biografia de Leonardo Pisano e no contexto do período histórico em que surgiu o MF. Além disso, apresentam a relação matemática de recursividade, mas não discutem as relações matemáticas oriundas do modelo. Essa descrição contextual permitiu descrever a problemática e a justificativa desta pesquisa, o que serão abordados no próximo tópico.

1.2 Problemática e Justificativa da Pesquisa

Numa vertente histórica, justificou-se a problemática desta pesquisa no fato de que alguns livros de HM apresentam discussões superficiais sobre os conceitos matemáticos e as relações oriundas da SF. Essa concepção é reforçada por Alves & Borges Neto (2011). Além do mais, Alves (2017a) aponta a existência de “hiatos históricos”, no contexto da HM,

referentes a definições matemáticas Fibonaccianas e explica que esses hiatos são caracterizados pela estagnação epistemológica causada pelo aparecimento de obstáculos, durante a construção de determinados conceitos matemáticos. Assim, a superação desses obstáculos proporciona o processo histórico-evolutivo do modelo matemático que, no caso desta pesquisa, enfatiza a complexificação da sequência generalizada de Fibonacci.

Desse modo, a revisão bibliográfica apresentada, anteriormente, direciona uma investigação dos elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática numa perspectiva histórica e evolutiva da SF. Do ponto de vista epistemológico, pode-se compreender a existência da evolução do modelo recursivo unidimensional da SF em direção a um processo de complexificação a partir da inserção de unidades imaginárias e variáveis. O MF tem sua gênese na situação-problema proposta por Leonardo Pisano em 1202, relacionada à reprodução de coelhos.

Todavia, a complexificação do MF é discutida, *a priori*, na literatura da Matemática Pura, assim, não compondo a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Dessa forma, com o objetivo de transformar esse conteúdo em um tópico a ser ensinado, as considerações de Alves (2016a, p.2) são relevantes, pois esse autor explica que desde 1980, pesquisadores, educadores matemáticos, estudam os "fenômenos" inerentes ao ensino de Matemática, através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática, nesse contexto, destacou-se a ED para fundamentar esta atividade investigativa, buscando a complementaridade na TSD.

À vista disso, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão: como desenvolver um estudo sobre o processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci, de modo a realizar situações didáticas que oportunizem a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando sua representação complexa numa perspectiva epistemológica, no que diz respeito à sua origem e evolução histórica?

Para isso, foram articulados alguns aspectos das dimensões epistemológica, cognitiva e didática. Nesse sentido, os aspectos cognitivos estão associados à aprendizagem dos conceitos matemáticos, em que é possível mobilizar o pensamento intuitivo do aluno em direção ao raciocínio inferencial durante as etapas de ação, formulação e validação na resolução das situações-problema avaliada com enfoque na TSD. No plano didático, foi destacada a efetivação da transposição didática das definições e relações matemáticas também

com aporte na TSD. Tais aspectos didáticos e cognitivos são considerados quando se propõe uma experiência de ensino do modelo complexo de Fibonacci, no Ensino Superior especificamente na disciplina de HM.

E na dimensão epistemológica, foram considerados os elementos inerentes à gênese e ao processo evolutivo do MF, com ênfase na investigação do processo de complexificação do modelo recursivo unidimensional. Finalmente, ressaltando que a disciplina de HM compõe a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, buscou-se com esta pesquisa, apresentar uma abordagem didática que oferecesse aos professores de Matemática em formação inicial, uma proposta de ensino que os permita inserir na sua prática em sala de aula, especificamente no ensino de HM, elementos de caráter histórico e evolutivo numa perspectiva epistemológica das propriedades matemáticas. Considerando esse contexto, a seguir, serão apresentados os objetivos gerais e específicos desta pesquisa.

1.3 Objetivos da Pesquisa

Astolfi & Develay (2012) apresentam a concepção de "objetivos-obstáculos", essa expressão está relacionada com o fato de que a determinação dos objetivos está associada à previsão de possíveis obstáculos que venham surgir durante o aprendizado de certos conceitos científicos. Por outro lado, numa vertente da DM, os objetivos gerais e específicos, deste trabalho, são definidos considerando como pressupostos os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática. Dessa forma, no tópico a seguir, o objetivo geral será apresentado.

1.3.1 Objetivo Geral

Realizar uma transposição didática do modelo complexo de Fibonacci. Ou seja, desenvolver um estudo sobre o processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci, a fim de explorar, em situações didáticas, as representações complexas através de teoremas e propriedades oriundas do MF. E, assim, oportunizar a compreensão do desenvolvimento histórico-evolutivo, isto é, epistemológico-matemático, da SF.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Investigar os teoremas e propriedades inerentes: aos números Gaussianos de Fibonacci e suas relações recorrentes *n*-dimensionais, PBCF, Quaternions Complexos de Fibonacci e Octonions de Fibonacci;

2. Estudar representações polinomiais do modelo de Fibonacci na variável complexa;

3. Explorar, em situações de ensino, representações matriciais, a extensão para índices inteiros e a fórmula de Binet para a classe dos PBCF;

4. Apresentar o desenvolvimento histórico-evolutivo, isto é, epistemológico-matemático, da SF inerente ao seu processo de complexificação, através da proposição de situações-problema em sala de aula.

Doravante, será discutido o aporte teórico desta pesquisa, o qual é composto pelo MF, pela ED e TSD, estas duas últimas são, respectivamente, metodologia de pesquisa e teoria de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O desenvolvimento de estudos direcionados à DM ocorreu a partir de 1970 na França, num contexto histórico, no qual estava acontecendo a reforma da Matemática Moderna, além disso, outros fatos como a criação do IREM (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática, e o êxito "das teorias psicológicas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais", contribuíram para se estabelecer um campo científico que investigasse a DM. "A preocupação era estudar os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias do saber matemático" (ALMOULOUD, 2007, p. 25-26), levando em consideração aspectos das dimensões epistemológica, cognitiva e didática (ARTIGUE, 1995, p. 98). Assim, o:

> Conteúdo de conhecimento é designado como um saber a ser ensinado, em seguida, sofre de um conjunto de mudanças adaptativas que o tornam adequado para um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um objeto de saber para ensinar em um objeto de ensino é denominado de transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p. 45).

Dessa forma, Pais (2002, p. 9) explica que o estudo da DM está inteiramente associado às noções de conceitos, pois nesse sentido, podem-se compreender problemas que são apontados na construção epistemológica dos conceitos matemáticos e dos conceitos didáticos, quando considerados no plano pedagógico. Além disso:

> A didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da pratica pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2002, p. 11).

A seguir, será discutida a ED em complementaridade com a TSD, assim, como os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática numa vertente francesa da DM, a fim de compreender como tais aspectos estão inseridos e como interferem no processo de ensino da Matemática.

2.1 A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

A ED teve sua gênese no início de 1980 no contexto DM. Pais (2002, p. 100) explica que o termo ED faz referência ao trabalho do pesquisador, estabelecendo uma comparação com o trabalho de um engenheiro quanto aos momentos de concepção, elaboração e execução

de um projeto arquitetônico, sendo essa uma trajetória, semelhantemente, traçada por um pesquisador na área de didática, que assim como o engenheiro também precisa de um modelo teórico para implementar o seu projeto.

Artigue (1995, p. 36-37) descreve a ED como uma proposta de metodologia experimental com enfoque em situações de ensino, com ênfase na sala de aula, onde se podem realizar situações didáticas, nas quais é observado e analisado o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, segundo Almouloud (2007, p. 171), essa metodologia permite o professor, enquanto pesquisador, ter suas produções utilizadas "em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito."

Além do mais, Alves (2016b, p. 70) relata que a pesquisa, fundamentada nada ED, é organizada em duas categorias: a microengenharia, que investiga especificamente a complexidade dos fenômenos associados à sala de aula e a macroengenharia, que estuda as "dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais" inerentes ao processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, atentando-se para o fato de que as pesquisas têm sua fase de experimentação em sala de aula, Pommer (2013, p. 22) orienta que as questões a serem exploradas em sala de aula, devem ser propostas como situações-problema, que conduzam o processo de aprendizagem e permitam que o professor instigue a criatividade e a autonomia dos alunos na formulação de estratégias de soluções, tendo como pressupostos seus conhecimentos prévios. Assim:

> As escolhas locais estão articuladas com previsões a respeito do comportamento dos alunos. Ao mesmo tempo em que explicamos como se vai tentar desenvolver um controle das relações entre os sentidos dos comportamentos dos alunos e as situações didáticas propostas, formulamos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para validação da Engenharia. Procuramos deixar claro, nas setas do Mapa da Engenharia, que, cronologicamente, tomar decisões e formular hipóteses são ações simultâneas. Antes do Plano, as hipóteses estão implícitas. Tornam-se explícitas e verbalizadas após o delineamento do Plano de Ação, quando se tem idéia do todo (CARNEIRO, 2005, p. 103).

De acordo com a concepção de Pais (2002, p. 101), a ED é um sistema organizado em quatro fases consecutivas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. É válido acentuar que a experimentação desta pesquisa teve enfoque na TSD a fim de mobilizar o pensamento intuitivo do aluno em direção ao raciocínio inferencial durante a construção de conceitos e relações matemáticas.

Além disso, Pommer (2013, p. 21) descreve que durante a análise *a priori*, tem-se a possibilidade de prever o comportamento dos alunos na situação didática (experimentação). Para isso, é necessário escolher as variáveis didáticas relevantes, que vão nortear os alunos durante a construção de possíveis estratégias de solução. No momento da análise *a posteriori*, é feita uma comparação entre os objetivos definidos e o desempenho dos alunos na situação de ensino, a fim de validar as hipóteses didáticas estabelecidas.

Numa vertente francesa, Pais (2002, p. 99) acentua que essa metodologia de Artigue (1995) possibilita organizar um percurso para se realizar uma pesquisa centrada no ensino de Matemática, na qual se pretende investigar o vínculo entre teoria e prática sem reduzir seus significados dimensionais. Por conseguinte, serão discutidos aspectos de ordem epistemológica, cognitiva e didática, a fim de compreender a articulação entre essas dimensões com as etapas da ED.

2.1.1 Análises Preliminares

Almouloud & Silva (2012, p. 26) explicam que nas análises preliminares são realizados: um levantamento bibliográfico sobre os conceitos matemáticos que se pretende investigar, uma "análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática". Segundo Pais (2002, p. 101), é relevante que se faça uma descrição das dimensões epistemológica, cognitiva e didática inerentes ao objeto de pesquisa, fundamentando-se em um quadro teórico. Além do mais, acentua-se que:

> Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

Nesse sentido, o conceito de "objetivos-obstáculos" é discutido por Astolfi & Develay (2012, p. 58-59), que indicam a necessidade de definir algumas finalidades quando se pretende trabalhar certos conteúdos numa situação de ensino. Desse modo, esses objetivos são determinados partindo da previsão e idealização do processo, no qual os alunos poderão ter dificuldade de atender à meta proposta na resolução de uma situação-problema. Enquanto, os obstáculos são as dificuldades apontadas na construção de um conceito científico. Assim,

esses autores explicam que os "objetivos-obstáculos" se restringem à seleção de objetivos a partir da identificação dos obstáculos epistemológicos e psicológicos.

À vista disso, os elementos de ordem epistemológica apresentam relevância numa pesquisa no ensino de Matemática, através da análise epistemológica na DM. Para isso, é válido compreender a epistemologia como uma teoria do conhecimento que, segundo Almouloud (2007, p. 149), abrange um estudo sobre a composição dos conhecimentos científicos, assim, considerando sua origem histórica, sua reconstrução mental em cada sujeito e seu comportamento em determinadas fases da construção do saber científico. Dessa forma:

> [...] a didática da matemática congrega conceitos de diversas disciplinas: matemática, epistemologia, linguística, psicologia, sociologia, ciência da educação etc. A particularidade da didática em relação a essas disciplinas se encontra na dimensão epistemológica de sua problemática, que considera a especificidade dos conhecimentos em jogo (ALMOULOUD, 2007, p. 149).

Assim, os saberes matemáticos são analisados epistemologicamente, a fim de compreender os seus elementos históricos, priorizando os conceitos matemáticos. Quando se trabalha numa metodologia de ensino tradicional, a Matemática é apresentada com certo rigor, ou seja, os seus conceitos e suas noções são apresentados como verdades absolutas. No entanto, na análise epistemológica, tem-se a possibilidade de investigar esses conceitos fundamentais, isto é, de questioná-los. Almouloud (2007, p. 152) destaca que "[...] os problemas de fundamento não são sempre os primeiros a ser estudados em matemática. Por exemplo: os fundamentos teóricos da análise foram estudados depois de séculos de utilização dos conceitos como ferramentas para a resolução de problemas". Além disso:

> A análise epistemológica apoia-se no desenvolvimento histórico do conceito. Assim, permite identificar as diferentes concepções sobre um determinado objeto, como também permite agrupá-las em classes pertinentes para que se possa fazer uma análise didática. Esse tipo de análise pode auxiliar o pesquisador em didática da matemática a entender melhor as relações entre os objetos matemáticos e controlar as variáveis didáticas relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem de tais objetos (ALMOULOUD, 2007, p. 156).

No âmbito da DM, a análise epistemológica tem o propósito de investigar a origem do desenvolvimento da Matemática, enquanto conhecimento científico, permitindo perceber a existência da diferença entre o saber científico e o saber que se pretende ensinar. Nesse sentido, "o terreno epistêmico pelo qual transitamos necessita de vigilância, pois tendo em vista sua natureza, obstáculos e entraves, muitas vezes intransponíveis, podem surgir. E, nesse contexto é que falamos de um obstáculo epistemológico" (ALVES, 2016c, p.137).

Nessa perspectiva analítica, o pesquisador em DM pode apontar os possíveis obstáculos, classificando-os em dois grupos: um que abrange as dificuldades de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos e o outro grupo composto por barreiras intrínsecas do desenvolvimento do conhecimento científico. Dessa maneira, os obstáculos não representam a ausência do conhecimento, ao contrário, eles destacam a existência do conhecimento, que se encontra imobilizado e resistente a mudanças e reformulações de seus conceitos. Isso ocorre, segundo Pais (2002, p. 39), porque há pessoas que acreditam que essas transformações "[...] ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém o conhecimento".

Por outro lado, no contexto da epistemologia da ciência, Bachelard (1996, p.22) indica que o historiador da ciência deve compreender as ideias como se fossem fatos, enquanto, o epistemólogo deve compreender os fatos como se fossem ideias, assim, incorporando-as a um conjunto de pensamento, de modo que, o obstáculo surge como um "contra-pensamento", que se originou a partir da hermenêutica errônea dos fatos, o que para o historiador continua sendo apenas um fato.

Em outras palavras, Bachelard (1996, p.18-19) afirma que "o conhecimento adquirido pelo esforço científico pode declinar. [...] A partir daí, a atividade espiritual se inverte e se bloqueia. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado". Analogamente, no contexto da epistemologia da Matemática, pode-se entender que os obstáculos epistemológicos exercem uma função importante no que diz respeito ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, porém eles são ignorados explicitamente, quando se discute o saber ensinado e/ou aprendido (ALMOULOUD, 2007, p. 139).

Além do mais, quando se busca compreender o conceito de obstáculos epistemológicos, tomando como referência o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, se faz necessário levar em consideração a existência de dois processos distintos: o primeiro, que está associado à fase inicial da descoberta das noções e concepções matemáticas, e o segundo, que se refere à forma (redigida), na qual se representa os conceitos construídos. Com isso, no contexto da Matemática, pode-se dizer que os obstáculos surgidos durante a produção e aprendizagem do conhecimento, dificilmente serão registrados historicamente. Ou seja, "[...] os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático, praticamente, desaparecem no resultado final apresentado pelo texto cientifico" (PAIS, 2002, p. 41).

À vista disso, os obstáculos de origem epistemológica são aspectos peculiares do saber, desse modo, pode-se apontar como um obstáculo, a dificuldade que os matemáticos manifestam para compreender e construir determinados conceitos. Almouloud (2007, p. 139) apresenta, como exemplo, a situação na qual se desenvolveu o estudo da probabilidade, pois durante "o desenvolvimento da teoria das medidas e teoria da integração", as quantidades contínuas representaram uma barreira que impedia Borel e Lebesgue desenvolverem esse conceito. No entanto, "puderam ser identificados diversos paradoxos famosos graças a esse obstáculo, tal como o paradoxo de Bertrand[1]".

Pais (2002, p. 48) atenta para o fato de que o espírito de vigilância é indispensável na generalidade, pois como a ciência está sempre em busca de generalizar suas teorias, a generalidade pode se tornar um empecilho na construção do conhecimento científico. Entretanto, "[...] a técnica da indução matemática não se baseia em uma lógica indutiva. A observação de casos particulares não serve para fundamentar uma demonstração, no máximo, pode sugerir uma conjectura".

Vale ressaltar que, a sequência adotada numa generalização epistemológica de um conceito matemático, se inicia em um caso específico, desse modo "ela deve ser conjecturada a partir de casos particulares e por meio de um lento processo que envolve indagações, reflexões, avanços e retrocessos, culminando em uma demonstração como síntese da elaboração do saber" (PAIS, 2002, p. 49).

Alves (2016c, p.139) aponta o sistema simbólico notacional como um incidente característico simbólico na HM, que atuou com um obstáculo no desenvolvimento evolutivo dos conceitos matemáticos. Isto é, o uso de certa representação, quando observada numa perspectiva epistemológica, "que enfatiza o contexto de resolução de problemas, poderá ser mais eficiente ou menos eficientemente incorporada ao patrimônio individual e privado dos sujeitos em situação". Dessa forma, compreende-se que, no plano pedagógico:

> [...] vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. [...] Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma "teia epistêmica" de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática (ALVES, 2016c, p. 140-141).

[1] Paradoxo de Bertrand: Dado um círculo com um triângulo equilátero inscrito, quando se considera uma corda qualquer, qual a probabilidade dessa corda ter comprimento maior que o lado do triângulo? Esse paradoxo apresenta um problema que admite várias soluções, o que a princípio prove contraditório. E, isso acontece devido às diferentes interpretações feitas do enunciado do problema.

Por conseguinte, para Pais (2002, p. 45), a evolução histórica e epistemológica de um conhecimento científico ocorre quando se tem uma ruptura epistemológica com os saberes antigos, que até então permaneciam intactos na ciência. Nesse sentido, Bachelard (1996, p. 22-23) explica que o epistemólogo deve compreender os conceitos científicos como resultados psicológicos efetivos e progressivos, além de relacioná-los a outros, no sentido de que os conceitos são originados a partir de outros conceitos. Isso permitirá "[...] avaliar a eficácia epistemológica. O pensamento científico vai logo aparecer como dificuldade vencida, como obstáculo superado".

Embora a noção Bachelardiana tenha influenciado Brousseau na concepção de suas teses, as noções de obstáculo epistemológico propostas por Bachelard e Brousseau diferem significativamente. Pois, para Bachelard, a única área de conhecimento que não apresentou obstáculos epistemológicos foi a Matemática, de maneira que a noção só se aplica às ciências naturais (experimentais). Assim, a concepção de Brousseau de obstáculo parte das considerações de Bachelard, porém, é inspirada e influenciada por outras questões, como as de ordem didática, as quais não são consideradas por Bachelard.

Nesse sentido, Brousseau (1976) discute os aspectos cognitivos dos sujeitos envolvidos no processo, buscando compreender como eles se comportam quando estão em contato com o conhecimento matemático de origem epistemológica, ou seja, um conhecimento *a priori* não escolar. Para isso, parte da apresentação dos obstáculos de origem ontogênica que, segundo Brousseau (1976, p. 108), "são aqueles que se originam devido às limitações neuropsicológicas do sujeito no momento do seu desenvolvimento, ele desenvolve conhecimentos apropriados aos meios e metas". Além disso, vale considerar que:

> A epistemologia genética coloca em evidencia os estágios, as acomodações e o processo de assimilação (*assimilations),* que às vezes, se assemelham às etapas de desenvolvimento dos conceitos pela lei de regulação que os fazem aparecer, e que diferem da natureza exata das limitações que determinam essa regulação (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

Numa abordagem genética, os obstáculos psicológicos são apontados quando o indivíduo se depara com determinados aspectos no processo de aprendizagem, os quais negam suas concepções intrínsecas ou "induz uma desestabilização inaceitável, como, por exemplo: a lógica matemática não é a lógica da vida do dia-a-dia" (ALMOULOUD, 2007, p. 144). Todavia, Pais (2002, p. 44-45) comenta que os obstáculos epistemológicos têm sua gênese na dimensão histórica, cultural e social, dessa forma, pode-se relacioná-los à aprendizagem do indivíduo, pois a maioria deles é formada "pelo imaginário do sujeito cognitivo". Nesse

sentido, as dificuldades inerentes ao "imaginário cognitivo" de aprendizagem dos conhecimentos impedem o avanço da Ciência.

Na visão de Pais (2002, p. 43-44), a concepção de obstáculos epistemológicos surgiu dentro do contexto histórico e científico da pedagogia, por isso, é valido denominar os obstáculos como didáticos que, por sua vez, são considerados como conhecimentos que estão intelectualmente estagnados, dificultando a aprendizagem de conteúdos escolares. Desse modo, como a DM pretende investigar o processo evolutivo de seus conceitos, então, ela deve abranger em sua análise os obstáculos não somente em seu aspecto histórico e externo.

A DM tem o objetivo de averiguar como se pode fazer a transposição didática dos conceitos matemáticos para a área de ensino e aprendizagem, no entanto, é necessário que se compreenda o modo como se organiza os conhecimentos e como as novas concepções são inseridas na estrutura cognitiva do aluno. A chegada dos novos conceitos permite apontar os possíveis obstáculos. Além disso, Pais (2002, p. 55) apresenta os conceitos como sendo noções gerais e abstratas, que são desenvolvidas em um determinado campo específico de conhecimento, para produzir a característica intrínseca de um grupo de objetos e situações-problema articulados com aspectos do dia-a-dia.

Assim, na concepção de Almouloud (2007, p. 141-142), os obstáculos didáticos surgem na transposição didática, podendo ser apontados, durante a aplicação da metodologia de ensino adotada pelo professor, quando se trabalha os conceitos matemáticos, cuja validade é questionada. Obstáculos desse tipo podem ser observados na seguinte situação:

> Por exemplo, a apresentação atual dos decimais no nível elementar é o resultado de uma longa evolução no contexto de uma escolha educacional (*didactique*) feita pelos enciclopedistas seguida por convenção [...]. Dada sua utilidade, os números decimais seriam ensinados o mais rápido possível, associados a um sistema de mesura e em referência às técnicas de aplicação em um todo. Assim, hoje, os decimais são, para os alunos, "inteiros naturais com uma mudança de unidade", tão "naturais" (com uma vírgula) e medida. E este projeto, apoiado por uma mecanização do aluno, irá criar obstáculos até o D.E.U.G[2]. É característico que o principal fator de discriminação dos alunos em um questionário recente (IREM de Rouen) seja o cálculo que envolve tanto decimal como os produtos de uma potência de dez. Assim, é a compreensão mesma da definição dos decimais que explica os comportamentos dos alunos. Mas, atualmente, esse obstáculo torna-se, às vezes, didático e sociocultural (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

À vista disso, Alves (2016c, p.141) acentua que no plano de ensino, o docente deve trabalhar a compreensão de conceitos matemáticos, não apenas no que diz respeito a sua

[2] Primeiro período do ensino superior.

natureza endógena, mas também a sua relevância didática construída “a partir das vivências e idiossincrasias particulares que proporciona ao aprendiz a origem de um repertório amplo de situações-problema que o permitam explorar e, paulatinamente, elaborar e reelaborar construções e modelos mentais de ação eficazes”.

Numa dialética da aprendizagem, Alves (2016c, p.143) relata que o aluno organiza dois tipos de esquemas mentais para resolver ou investigar uma determinada situação-problema, o primeiro, “se mostra balizado por um *corpus* teórico particular, definido *a priori* pelo expert e, relativamente ao qual, o estudante está autorizado a desenvolver/elaborar suas inferências”. Enquanto, o segundo esquema se fundamenta num significado implícito e intrínseco do aluno, ou seja, no atributo de difícil explicação, porém, ele se torna perceptível quando o indivíduo entra em ação diante da situação-problema, a fim de resolvê-la. Essa estrutura de raciocínio compõe o que se conhece como pensamento intuitivo.

Dessa forma, Pais (2002, p. 44) destaca o fato de que os obstáculos, de modo geral, têm sua origem na intersecção da investigação na dimensão intrínseca da Ciência e da Didática, formando um âmbito favorável para se discutir o ensino de Matemática. Nesse sentido, o ensino de Matemática abrange aspectos de caráter epistemológico dos conceitos matemáticos e ontogênicos dos indivíduos que constroem esse conhecimento, partindo de uma transposição didática, isto é, a transformação do conhecimento científico em um conteúdo escolar.

Nessa vertente didática, Pais (2002, p. 69) explica que o desenvolvimento cognitivo do aluno, ocorre no momento em que o sujeito percebe a diferença entre o saber e o conhecimento. O saber possui natureza histórica e impessoal, enquanto, o conhecimento se manifesta quando o aluno é orientado a usá-lo em situações-problema. Almouloud (2007, p. 32) acentua que essa situação está relacionada “à epistemologia construtivista de Piaget”, no que diz respeito ao aspecto biológico, que permite ao indivíduo participar do processo de aprendizagem através da adaptação. Além disso:

> Os obstáculos de origem epistemológica são aqueles que não podem e não devem escapar do fato de seu papel constitutivo estar no conhecimento alvejado, eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos. Isso não significa que devemos multiplicar os seus efeitos ou devemos reproduzir na escola (*milieu*) as condições históricas em que nós os derrotamos (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

Desse modo, Pais (2002, p. 69-70) comenta que a adaptação é uma habilidade que o aluno desenvolve a partir de seus conhecimentos prévios, quando estão diante de uma

situação-problema. Esse contexto serviu como inspiração para Brousseau formular a TSD, destacando "uma aproximação com os chamados esquemas de assimilação e acomodação, que foram descritos inicialmente por Piaget". Assim:

> O projeto de aprendizagem, com base no estudo do desenvolvimento do conhecimento em termos de obstáculos, difere significativamente da concepção convencional, especialmente em relação à função e organização das situações-problema. E isso, especialmente, desde que a questão desempenhe um papel fundamental no processo (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

O domínio de conteúdo e a experiência do professor são fatores fundamentais para que ele possa selecionar ou elaborar um conjunto de situações-problema relacionadas com os conceitos matemáticos que se pretende trabalhar. As questões propostas devem permitir um avanço na aprendizagem. Para isso, é necessário que o docente adote uma metodologia de ensino que possua uma estrutura composta por elementos das dimensões epistemológica, cognitiva e didática e dê condições ao professor de prever a ação dos alunos, quando estes se deparam com a situação apresentada pelo professor (ALVES, 2016c, p.145).

No próximo tópico, será discutida a fase da ED referente à concepção e análise *a priori*, tendo como pressuposto a TSD.

2.1.2 Concepção e Análise a Priori

Na concepção e na análise *a priori*, são definidas as variáveis que compõem o sistema de ensino e que são relevantes numa situação didática. Conforme Almouloud & Silva (2012, p. 26), o professor-pesquisador deve selecionar certo número de variáveis de comando, sendo microdidáticas ou macrodidáticas, a fim de explorá-las numa situação de ensino. Para nortear a definição das variáveis, deve-se:

> • Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
> • Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
> • Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem (ALMOULOUD & SILVA, 2012, p. 27).

Além do mais, nessa fase o professor-pesquisador deve ter internalizado que existe a possibilidade de transformar um conhecimento científico em um conteúdo que possa ser ensinado e, também, devem ser elaboradas as hipóteses didáticas e as situações-problema, as

quais são definidas por Almouloud (2007, P. 174) como questões subjetivas / objetivas, cuja função inicial é implícita e no decorrer de sua solução, torna-se explícita de conceitos matemáticos. Assim:

> Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOUD, 2016, p.113).

Numa perspectiva metodológica de ensino, a DM se referencia à TSD desenvolvida pelo francês Guy Brousseau. Essa teoria abrange três elementos principais: o aluno, saber e meio *(milieu),* com o propósito de estudar como tais elementos interagem entre si. Por conseguinte, a TSD será apresentada.

2.1.3 A Teoria das Situações Didáticas

A TSD se caracteriza como um conjunto de situações que são elaboradas para fins didáticos e, quando aplicadas em um contexto escolar, têm como objetivo investigar o comportamento dos alunos. “O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 31-32).

Além disso, Almouloud (2007, p. 35) explica que nessa teoria, o *milieu* é um conjunto exterior ao aluno, que age no sentido oposto ao sujeito, isto é, o *milieu* atua como um conjunto adidático, que não possui propósitos didáticos, no entanto, por meio de um efeito retroativo à ação do indivíduo, possibilita-o a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, “segundo a teoria piagetiana, a criança aprende adaptando-se a um *milieu* numa situação não didática”.

Almouloud (2007, p. 37) apresenta três tipos de dialéticas, que são originadas a partir das situações em que se analisa o comportamento pelo qual se articula o saber em jogo com o *milieu*, assim, têm-se as seguintes dialéticas: “trocas diretas para uma ação ou uma tomada de decisão, trocas de informações numa linguagem codificada, trocas dos argumentos”. Com isso, pode-se compreender que a TSD tem o propósito de analisar os aspectos que influenciam no processo de ensino e aprendizagem, além de oferecer suporte ao professor para elaborar, realizar e analisar situações didáticas. Desse modo, pode-se considerar que:

> Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Esses três elementos componentes de uma situação didática (professor, aluno, saber) constituem a parte necessária para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula. [...] Por outro lado, esses três elementos não são suficientes para abarcar toda a complexidade do fenômeno cognitivo, daí a vinculação que fazemos entre tais situações e outros elementos do sistema didático: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros. Um dos desafios da didática é que cada um desses elementos recebe influências diretas da especificidade do conteúdo em questão (PAIS, 2002, p. 65-66).

É valido discutir mais especificamente as noções de situações didáticas e adidáticas, pois o *milieu*, que contém as "variáveis didáticas" selecionadas, está inserido na situação didática. Sendo essas variáveis responsáveis por proporcionar estratégias de ensino e aprendizagem (ALMOULOUD, 2007, p. 36). Pais (2002, p. 71) esclarece que, na situação didática, ocorre a análise das situações adidáticas, as quais não estão diretamente controladas no plano pedagógico, porém, isso não ignora sua relevância na aprendizagem. Com isso, "a didática da matemática reforça as condições de estudar situações–problema potencialmente ricas em situações adidáticas".

Almouloud (2007, p. 34-35) destaca que em uma situação didática, as relações do aluno com as questões propostas pelo professor são consideradas como um jogo. Nesse sentido, a fase de devolução é caracterizada, pelo modo como se propõe uma situação-problema ao aluno, tal momento deve ter finalidade de incentivá-lo a participar ativamente no processo de aprendizagem, possibilitando-o a desenvolver sua autonomia. Além disso, as situações adidáticas são elaboradas "em termos de jogo. Uma situação suscetível de provocar uma aprendizagem será tal que o aluno dispõe de uma estratégia básica para começar a jogar. Tal estratégia deve permitir ao sujeito compreender o problema e a regra do jogo" (ALMOULOUD, 2007, p. 36).

Uma situação adidática tem finalidade pedagógica, porém, não é revelada e explícita. Todavia, quando se planeja uma situação didática, deve considerar os aspectos não didáticos, pois de certa forma, eles vão intervir na aprendizagem do aluno, já que fazem parte do contexto no qual o aluno está inserido. Para Almouloud (2007, p. 33), "a situação adidática [...] é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar".

Por conseguinte, a fim de investigar o processo de ensino e aprendizagem, a TSD é organizada em quatro etapas (situações) distintas. Em cada fase o saber possui uma função pedagógica diferente, assim, em cada momento o aluno interage, diferentemente, com o saber. “Nessas fases interligadas, podem se observar tempos dominantes de ação, de formulação, de validação e de institucionalização” (ALMOULOUD, 2007, p. 36). Doravante, serão discutidas as particularidades de cada etapa.

A etapa inicial é chamada de situação de ação. Nesse momento, o aluno tem a liberdade de interagir sem precisar seguir regras, ou seja, o aluno pode refletir no resultado de sua ação e ajustá-lo. Isso pode acontecer sem a intervenção do professor, no caso de o *milieu* retroagir sobre a ação do sujeito. “Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação” (ALMOULOUD, 2007, p. 37).

Assim, Pais (2002, p. 72) argumenta que a situação de ação permite ao aluno realizar procedimentos imediatos, como tentativas, a partir da reflexão de seus conhecimentos prévios, a fim de resolver a situação-problema proposta. Logo, pode-se compreender que nesta etapa o aluno faz uso “de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica. Mesmo que esses procedimentos estejam associados a alguma teoria, o que está em jogo não é a explicitação dessa referência teórica”. Desse modo, na dialética da ação, tem-se que:

> Questões de ação ou decisão matemática são aqueles em que o único critério é a adequação da decisão - a elaboração deste sistema de decisão pode permanecer totalmente implícita na justificação dos mesmos. Não há restrições sobre isso ou formulação ou validação. Essa é a dialética mais geral, outros casos são apenas particulares. Isso levou à construção no assunto de regularidades de esquemas, modelos de ação, mais frequentemente inconscientes ou implícitas (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Dando continuidade à etapa anterior, tem-se a situação de formulação, em que o aluno apresenta uma estratégia (escrita ou oral) de solução elaborada a partir de concepções já conhecidas ou novas. Posteriormente, ocorre também um processo de formalização da linguagem usada habitualmente, a fim de tornar as informações trocadas, comunicáveis. Portanto, “o objetivo dessa dialética de formulação é a troca de informações” (ALMOULOUD, 2007, p. 38). Assim, nessa etapa, aparece o colega e/ou professor.

À vista disso, na dialética da formulação, diferentemente do que ocorre na fase de ação, o aluno apresenta um raciocínio de natureza teórica e mais elaborado, que o permite formular argumentos que, posteriormente, possam ser validados ou refutados. Desse modo, o

raciocínio aparece como “um procedimento experimental e, para isso, torna-se necessário aplicar informações anteriores” (PAIS, 2002, p. 72).

Dessa forma, quanto à terceira etapa, a situação de validação consiste em convencer o interlocutor de que os argumentos utilizados na resolução do problema, são válidos, isto é, as conjecturas elaboradas são julgadas. Assim, Almouloud (2007, p. 39) acentua que “[...] a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou refutá-las”.

Além do mais, na validação, o aluno já sabe utilizar métodos de provas e demonstrações, além de compreender determinados conceitos matemáticos. Por isso, nesse momento, o sujeito se apropria de uma linguagem de natureza mais científica (teórica). A partir disso, Pais (2002, p. 73) relata que essa etapa está vinculada à verificação da veracidade dos argumentos racionais. No entanto, numa perspectiva epistemológica e didática, isso “é um dos problemas mais complexos concernentes ao conhecimento, pois é praticamente impossível assegurar a universalidade do conceito de verdade, tendo em vista a diversidade das posições filosóficas existentes”. Tem-se ainda que:

> Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Com isso, na validação da TSD, “o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas no momento de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)” (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Finalmente, tem-se a situação de institucionalização, em que o professor retoma a situação-problema, a fim de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído por meio de sua formalização e generalização. Nesse sentido, Pais (2002, p. 74) explica que se trata de um “momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico”.

> A evolução nas discussões e utilizações dessa teoria foi enriquecida com as noções de contrato e institucionalização, entre outras. As situações de institucionalização foram então definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. [...] Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos (ALMOULOUD, 2007, p. 40).

Nesse viés, a TSD serve de fundamentação para a concepção e proposição das situações-problema, que irão compor uma realização didática. Em seguida, as estratégias de resolução podem ser avaliadas com enfoque na TSD, ou seja, podem ser categorizadas, de acordo com as fases da TSD, em: ação, formulação e validação. A seguir, será abordada a fase de experimentação da ED.

2.1.4 Experimentação

Na experimentação, propõe-se a aplicação de situações-problema com enfoque na TSD, para que aconteça a situação didática. Para isso, pretende-se estabelecer um contrato didático, ou seja, busca-se incentivar o aluno a participar do processo de ensino, através da resolução de situações-problema elaboradas a partir dos objetivos da pesquisa. Assim, Carneiro (2005) relata que:

> Durante a experimentação, coletamos e organizamos um *corpus* de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (CARNEIRO, 2005, p. 105).

Almouloud (2007, p. 42) esclarece que, numa perspectiva contratual no âmbito da DM, o estudante deve assumir o compromisso de administrar seu envolvimento com o conhecimento nas situações de ação, formulação e validação, ou seja, de participar ativamente nessas fases. Por outro lado, o professor tem a responsabilidade de institucionalizar o saber, pois "ele deve determinar a forma e o conteúdo do saber para o qual ele quer dar um estatuto oficial, levando em conta os efeitos da transposição didática". Nesse sentido, no próximo tópico, serão discutidas as noções de transposição didática e contrato didático.

2.1.5 Transposição Didática e Contrato Didático

Nesta seção, serão apresentadas as concepções sobre a transposição didática e o contrato didático, a fim de complementar a compreensão dos elementos epistemológicos, cognitivos e metodológicos discutidos anteriormente, numa perspectiva da DM.

A noção de transposição didática foi desenvolvida por Chevallard com o objetivo de "distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem" (ALMOULOUD, 2007, p. 112). Numa perspectiva didática, Almouloud (2007, p. 113) explica que a teoria da transposição didática busca analisar epistemologicamente os "objetos

de saber", os quais são classificados em: paramatemáticos e matemáticos: ambos são usados para estudar outros objetos matemáticos, no entanto, este último pode estudar também a si mesmo, e os objetos protomatemáticos, que apesar de não terem oficialmente a função de estudar objetos, possuem propriedades para resolver questões matemáticas. Ainda sobre os objetos, é valido considerar que:

> A transformação do conteúdo de saber em uma versão didática desse objeto de saber, mais apropriadamente, é chamado de *transposición didáctica stricto sensu*. Mas, o estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da Didática da Matemática) implica tendo em conta a transposição didática *sensu lato*, representada pelo esquema: objeto de saber $\Rightarrow$ objeto para ensinar $\Rightarrow$ objeto $\Rightarrow$ de ensino. O primeiro elo que marca a passagem do implícito para o explícito, da prática à teoria, do pré-construído para construído (Chevallard, 1998, p.45).

Dessa forma, pode-se compreender, segundo Pais (2002, p. 17), que a transposição didática é um caso particular de translação de saberes, a fim de contribuir para o processo evolutivo e histórico do conhecimento científico. Além do mais, a noção de transposição, quando estudada no plano pedagógico, tem como objetivo analisar a mobilidade do cognitivo em direção ao desenvolvimento do conhecimento, "restrita ao plano de elaborações subjetivas, pois é nesse nível que ocorre o núcleo do fenômeno. A conveniência em destacar essa dimensão da transposição está associada à necessária aplicação de conhecimentos anteriores para a aprendizagem de um novo conceito" (PAIS, 2002, p. 18).

Numa análise do processo de ensino e aprendizagem, considerando a existência de uma transposição didática, Almouloud (2007, p. 89) relata que a concepção de contrato didático possibilita compreender que a situação didática está relacionada com a intenção de ensinar, para isso, essa situação abrange uma situação-problema e um contrato didático. "A significação do problema e do conceito para o aluno depende do contrato didático estabelecido; é o que permitirá a negociação do sentido das atividades em jogo".

Sobre o contrato didático, deve-se considerá-lo como "uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro" (BROUSSEAU, 1986 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 89). Vale argumentar que, o contrato didático nem sempre se concretiza, levando-o a sua ruptura, como no caso a seguir:

> Um primeiro exemplo de ruptura do contrato didático pode ser dado pelo caso do aluno que mostra desinteresse pela resolução dos problemas propostos pelo

> professor ou no caso em que não há o envolvimento necessário nas atividades propostas. Nessa situação, ocorre uma ruptura do contrato, pois, mesmo que não haja uma regra explicita e formal prevendo o envolvimento dos alunos nas atividades didáticas, o que se espera é que isso aconteça dentro dos limites pertinentes à atividade pedagógica (PAIS, 2002, p. 81).

À vista disso, Pais (2002, p. 77-78) comenta que o contrato didático tem a função de estabelecer as obrigações do professor e do aluno, a fim de efetivar a relação entre docente, estudante e conhecimento. Além disso, esse contrato possui poucas regras explícitas, enquanto as implícitas são elaboradas a partir de natureza intrínseca da Matemática, "como formalismo, abstração e rigor", além de considerar as "diferenças habituais de concepções dos professores de Matemática". Com isso, a fase de experimentação acontece, permitindo que a pesquisa seja validada ou refutada na etapa final da ED. Desse modo, a seguir, serão discutidos a análise *a posteriori* e a validação da ED.

2.1.6 Análise a Posteriori e Validação (Interna e Externa)

Almouloud & Silva (2012, p. 27) explicam que nesta fase acontece a análise dos dados coletados na experimentação, isto é, durante a aplicação das situações-problema em sala de aula. Esse momento deve ser registrado através de alguns procedimentos como: relato de observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações das entrevistas com os alunos. Nesse sentido, a análise *a posteriori*:

> [...] se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa (POMMER, 2013, p. 26).

Dessa forma, os autores acentuam que durante a análise *a posteriori*, é realizada uma comparação entre os resultados obtidos na realização didática e o que foi definido na análise *a priori* da ED, a fim de validar ou refutar as hipóteses levantadas na investigação. Todavia, a ED admite dois tipos de validação: interna e externa.

Na validação externa, é realizada uma comparação entre as produções inicial e final dos estudantes, a fim de avaliar o desempenho dos alunos durante a realização didática. Isso pode ser feito por meio da aplicação e análise de entrevistas e/ou questionários. Além disso, nesse tipo de validação, acontece a comparação entre as produções dos alunos internos à sequência didática e dos alunos externos a esse contexto didático (LABORDE, 1997, p. 105). Alves (2018b) acentua que a validação externa se efetiva através da comparação de produções

externas associadas a outros alunos que não participaram da mesma sequência didática. O que não foi feito nesta pesquisa.

Por outro lado, na validação interna, é feita uma descrição genérica dos alunos, observando seu comportamento, sua adaptação e seu desenvolvimento intelectual durante a realização didática, e uma categorização dos tipos de produção majoritária. Assim, é realizado um acompanhamento de poucos alunos individualmente. Diante disso, devem ser selecionadas as situações específicas que, ao serem avaliadas, contribuem significativamente para a validação da pesquisa (LABORDE, 1997, p. 105).

Por fim, considerando que esta pesquisa abordou uma quantidade pequena de alunos participantes (7 alunos), os quais foram avaliados em um tempo curto, e as suas produções não foram comparadas com outras produções externas a esta pesquisa, a validação desta pesquisa foi feita internamente. Em seguida, será abordado o MF que fundamenta o campo epistêmico-matemático desta pesquisa e que foi transposto para situações de ensino.

2.2 O Modelo de Fibonacci

O MF está inserido no período Histórico da Idade Média da Europa. Nesse contexto, vale destacar a quarta cruzada pregada pelo papa Inocêncio III. Essa cruzada tinha o propósito de planejar um ataque contra os mulçumanos no Egito a fim de reconquistar a costa da Palestina. Contudo, a Igreja e as nações ocidentais cristãs não possuíam recursos financeiros para custear esse ataque. Dessa forma, pediram ajuda à República de Veneza para levar os cruzados até o Oriente. Os cruzados não tinham dinheiro para negociar, assim, “foram obrigados a aceitar que Veneza decidisse o roteiro das conquistas. A proposta da República era quitar a dívida com a tomada de Zara, um porto cristão, mas rival dos venezianos no comércio do mar Adriático” (DORÉ, 2000, p.3).

Desse modo, a Idade Média envolve um cenário, no qual a Europa sofre influência das cruzadas e do contato com o Oriente. Nesse período, na área educacional, são criadas as Universidades de Pádua, Nápoles, Paris, Oxford e Cambridge (EVES, 2004, p. 295). No final da Idade Média, os matemáticos atuavam em escolas religiosas, universidades e em atividades de negócios e comércio. Além do mais, pode-se destacar a expansão dos números indo-arábicos. Nesse caso, no século XIII, Alexandre de Villedieu (francês), John de Halifax

(inglês) e Leonardo de Pisa (italiano) são três autores que contribuíram significativamente com a difusão do sistema de numeração indo-arábico (BOYER, 2006, p. 172).

Com ênfase no MF, de acordo com Boyer (2006, p.173), vale destacar o matemático Leonardo Pisano (1180-1250) conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio" (Figura 1). Leonardo atuava na atividade comercial, a qual o oportunizou conhecer Egito, Síria, Grécia, dentre outras. Em suas viagens, ele conheceu os métodos algébricos árabes e os números indo-arábicos, além disso, foi instigado a estudar aritmética. Em 1200, Pisano retorna à Itália e, em 1202, ele escreve a obra *Liber Abbaci*. Apesar do título da obra fazer referência ao ábaco. O livro não aborda o ábaco, e sim "é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos no qual o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado".

Figura 1 – Leonardo Pisano (Fibonacci).

Fonte: Eves (2004, p. 293).

Dentre os problemas propostos por Leonardo no *Liber Abbaci*, pode-se destacar o seguinte: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" (BOYER, 2006, p.174). Esse problema originou a SF $\{1, 1, 2, 3, 5, ...\}$. Os termos dessa sequência satisfazem à relação recorrente $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ (ALVES & CATARINO, 2017). Portanto, a situação-problema dos coelhos, a sequência e a recursividade matemática marcam a gênese do MF.

Além disso, Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) foi um matemático francês e dos precursores da teoria matricial, dentre seus trabalhos destaca-se a Fórmula de Binet (RAMOS, 2013, p. 17). E, de acordo com Alves (2017b), a SF admite a Fórmula de Binet como uma fórmula fechada para a determinação de seus termos. A Fórmula de Binet, válida para $n \geq 1$, é:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

É relevante saber que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são raízes da equação $t^2 - t - 1 = 0$. Logo, através de um processo indutivo, pode-se verificar a validade da Fórmula de Binet para SF. Assim, observe, a seguir, que essa Fórmula vale para F_1 e F_2.

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= 1$$

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\frac{(1+2\sqrt{5}+5)-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}}{\sqrt{5}} =$$

$$= 1.$$

E, de fato, assumindo $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, segue que:

$$F_n + F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= F_{n+2}.$$

Ademais, Ramos (2013, p. 32) discute a razão áurea e apresenta a seguinte definição: "uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte". Com isso, seja um segmento $\overline{AB}$, assumindo que $\overline{AC} = x,\ \overline{CB} = 1$, então, $\overline{AB} = x + 1$, onde $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{CB}$, assim, segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

$$\therefore x^2 - x - 1 = 0.$$

Logo, pode-se ver que as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A raiz $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887... = \Phi$ fornece o valor do número de ouro (Φ). Além do mais, quando se avalia a razão entre dois termos consecutivos da SF, pode-se verificar que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$ Veja:

$$
\begin{aligned}
&1/1=1\\
&2/1=2\\
&3/2=1{,}5\\
&5/3=1{,}666\ldots\\
&8/5=1{,}600\\
&13/8=1{,}625\\
&21/13=1{,}61538\ldots\\
&34/21=1{,}6190476\ldots\\
&55/34=1{,}6176470588\ldots\\
&\quad\vdots\\
&F_{n+1}/F_n=1{,}6180339887...\cong\Phi.
\end{aligned}
$$

Como $-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}<1$, então, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}=0$, de fato, pela fórmula de Binet, pode-se escrever que:

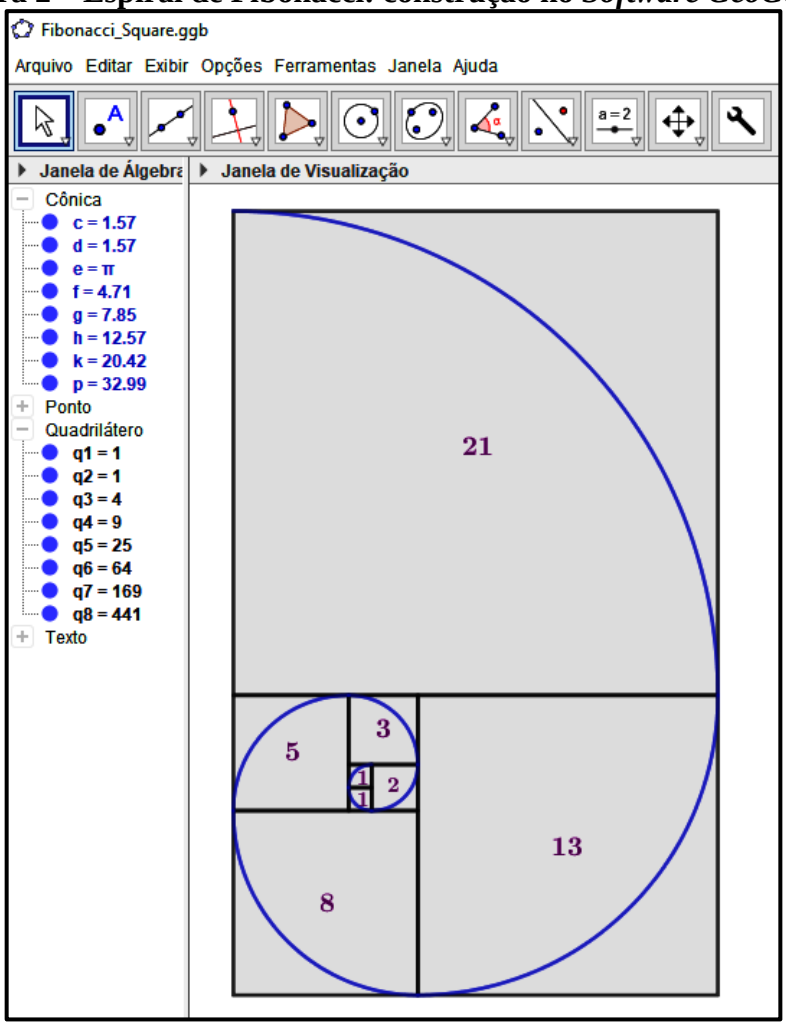
$$
\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n}&=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}=\\
&=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\cdot\left[1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left[1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]}=\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left[\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}\right]=
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left[\frac{1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}\right] =$$

$$= \Phi.$$

Além do mais, Ramos (2013, p. 41) discute definições e propriedades sobre o retângulo, o triângulo e a espiral denominados de áureos por ter suas medidas na Razão Áurea. Nessa abordagem, vale destacar a Espiral de Fibonacci, a qual representa geometricamente a SF através da construção de quadrados cujas medidas dos lados são os termos da SF: $\{1, 1, 2, 3, 5, ...\}$. Na Figura 2, tem-se a visualização da Espiral de Fibonacci no *Software GeoGebra*, em que os números, dentro dos quadrados, são as medidas de seus lados, além disso, o valor da área de cada quadrado pode ser visualizado na Janela de Álgebra.

Figura 2 – Espiral de Fibonacci: construção no *Software GeoGebra*.



Fonte: Elaboração da autora.

Por fim, pode-se observar que a SF está relacionada com a Razão Áurea, o número de ouro e a Fórmula de Binet. E, considerando a revisão bibliográfica sobre as relações oriundas da sequência generalizada de Fibonacci, pode-se compreender que o MF passa por um processo evolutivo, o qual é discutido, na maioria das vezes, na literatura da Matemática Pura, sendo apresentado de forma pouco pormenorizada nos livros de HM. Desse modo, assumindo esta seção como fundamentação e numa perspectiva evolutiva, doravante, será discutido o campo epistêmico-matemático que aborda o modelo complexo de Fibonacci.

3 CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: A COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI

A investigação sobre o processo de complexificação do MF é iniciada a partir da apresentação do número complexo de Fibonacci. Nesse sentido, é feito um estudo das relações recorrentes e identidades uni, bi, tri e *n*-dimensionais para os números Gaussianos de Fibonacci[3]. Esse estudo tem como principal característica a compreensão do crescimento dimensional do modelo recursivo unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ a partir da inserção de unidades imaginárias.

Posteriormente, serão exploradas as representações matriciais e a Fórmula de Binet para a classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci, a qual abrange os termos polinomiais da SF em um processo evolutivo da sua forma algébrica, de modo que, primeiramente, os polinômios são considerados com uma variável e duas variáveis, em seguida, esses polinômios são explorados na sua forma complexa, ou seja, com a inserção da componente imaginaria *i*. E, por fim, os polinômios são discutidos na variável complexa.

Finalmente, os Quaternions serão definidos para o MF. Inicialmente, a parte escalar dos Quaternions é composta pelos números reais de Fibonacci e, em seguida, essa parte é constituída pelos números complexos de Fibonacci[4]. Nesse contexto, alguns teoremas com aporte em representações matriciais, a Fórmula de Binet, a extensão para índices inteiros e a abordagem na variável complexa serão estudados para a sequência generalizada de Fibonacci.

3.1 Relações Recorrentes de Fibonacci: Inserção da Unidade Imaginária e Crescimento Dimensional

O processo evolutivo do modelo Fibonacciano teve início com os trabalhos de Brother (1965) sobre a ampliação da SF para o conjunto dos inteiros. Ademais, numa perspectiva de generalização da SF, Pethe e Horadam (1986) propuseram uma representação da SF por meio dos números Gaussianos de Fibonacci, assim, estabelecendo relações recursivas e identidades, e Berzsenyi (1977) desenvolveu uma forma complexa da sequência através dos Inteiros Gaussianos. À vista disso, iniciando o estudo do processo de complexificação da SF, no

[3] O Número Gaussiano de Fibonacci é descrito por: $G\,f_n = f_n + f_{n-1}.i$ com $G\,f_0 = i$ e $G\,f_1 = 1$ (JORDAN, 1965).
[4] O Número Complexo de Fibonacci é descrito por: $C_n = f_n + f_{n+1}.i$ com $i^2 = -1$ (HORADAM, 1963).

próximo tópico, serão exploradas algumas relações recorrentes complexas, a partir da inserção de unidades imaginárias, e de suas identidades uni, bi, tri e *n*-dimensionais.

3.1.1 Modelo Recursivo Unidimensional de Fibonacci e Identidades

King (1963, p. 16) descreve que a SF tem sua gênese a partir do problema matemático proposto por Leonardo Pisano sobre a reprodução de coelhos "imortais". Fibonacci, um matemático italiano, em 1202, escreveu *Liber Abbaci*, um trabalho que aborda conteúdos relacionados à Aritmética e Álgebra, tais como: números do sistema indo-arábico, adição, subtração, multiplicação e divisão de inteiros, proporções e resoluções de problemas.

Dentre os problemas apresentados na obra *Liber Abbaci*, encontra-se a solução para "*Rabbit Problem"*, que é uma situação-problema na qual se discute a reprodução de um par de coelhos, "para descobrir quantos descendentes serão produzidos por este par em um ano se cada par de coelhos dar à luz a um novo par de coelhos a cada mês, começando com o segundo mês de sua vida. É assegurado que as mortes não ocorrem" (KING, 1963, p.16). O esquema reprodutivo está apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Esquematização da reprodução de coelhos imortais.

Mês	Pares de coelhos que			Total de pares de coelhos
	Não reproduzem	Reproduzem	Nascem	
1º	1	0	0	1
2º	1	0	0	1
3º	0	1	1	2
4º	1	1	1	3
5º	1	2	2	5
6º	2	3	3	8
7º	3	5	5	13
8º	5	8	8	21
9º	8	13	13	34
10º	13	21	21	55
11º	21	34	34	89
12º	34	55	55	144

Fonte: Elaboração da autora.

King (1963, p. 16) acentua que a sequência de números observada na Tabela 1, dá origem à SF $\{1, 1, 2, 3, 5, ...\}$. Nesse sentido, conforme Alves & Catarino (2017), essa problemática é representada pelo "aparato notacional moderno" $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ com os valores iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, definindo, assim, o MF. Numa perspectiva de ampliar o

repertório de definições e relações oriundas da SF, esse modelo recursivo unidimensional, foi discutido por Koshy (2001), que investigou algumas identidades unidimensionais criadas por François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891).

À vista disso, por definição vale $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow f_{n+1} = f_{n+2} - f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que permite escrever os números de Fibonacci, no esquema a seguir:

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_2 \\
f_2 &= f_3 - f_1 \\
f_3 &= f_4 - f_2 \\
f_4 &= f_5 - f_3 \\
&\vdots \quad \vdots \\
f_{2n} &= f_{2n+1} - f_{2n-1} \\
f_{2n+1} &= f_{2n+2} - f_{2n}
\end{aligned}$$

Tendo em vista isso, o estudo sobre o processo de complexificação do MF será iniciado a partir da apresentação de algumas identidades unidimensionais para os números f_n de Fibonacci e, posteriormente, sua discussão na forma complexa com a inserção da unidade imaginária *i*. Veja:

Identidade 1: O somatório, a seguir, descreve a soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2*n*, de índice ímpar (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017).

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$$

Demonstração: Partindo dos números de Fibonacci descritos através da definição notacional e considerando apenas os termos de índice ímpar, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_2 + (f_4 - f_2) + (f_6 - f_4) + (f_8 - f_6) + \ldots + (f_{2n} - f_{2n-2}) = f_{2n}. \qquad \blacksquare$$

Identidade 2: A soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2*n*, de índice par pode ser descrita por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$$

Demonstração: Novamente, partindo da apresentação dos números de Fibonacci através da definição notacional, porém, considerando apenas os termos de índice par, veremos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = (f_3 - f_1) + (f_5 - f_3) + (f_7 - f_5) + ... + (f_{2n+1} - f_{2n-1}) = f_{2n+1} - f_1 = f_{2n+1} - 1. \quad \blacksquare$$

Identidade 3: A soma dos *n* primeiros números de Fibonacci, até a ordem *n*, de índice maior que zero pode ser obtida quando se desenvolve (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração: Segue que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n-1} + f_n = f_2 + (f_3 - f_1) + (f_4 - f_2) + (f_5 - f_3) + ... + (f_n - f_{n-2}) + (f_{n+1} - f_{n-1}) = -f_1 + f_n + f_{n+1}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1. \quad \blacksquare$$

Identidade 4: O somatório, a seguir, descreve a soma dos *n* primeiros quadrados dos números de Fibonacci (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017).

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$$

Demonstração: $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_1 f_2 + f_2 (f_3 - f_1) + f_3 (f_4 - f_2) + ... + f_n (f_{n+1} - f_{n-1}) =$

$$= f_1 f_2 + f_2 f_3 - f_2 f_1 + f_3 f_4 - f_3 f_2 + ... + f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1} = f_n f_{n+1}. \quad \blacksquare$$

Identidade 5: A soma de seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por quatro, sendo descrita pelo somatório (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$$

Demonstração: $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1}) + (f_{n+2} + f_{n+3}) + f_{n+4} + f_{n+5} = f_{n+2} + f_{n+4} + f_{n+4} + f_{n+5} =$

$$= f_{n+2} + f_{n+4} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) = 4.f_{n+4}.$$ ■

Identidade 6: O somatório, a seguir, representa a soma de dez números consecutivos de Fibonacci é divisível por onze (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017).

$$\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$$

Demonstração: $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1} + ... + f_{n+5}) + f_{n+6} + ... + f_{n+9} = 4.f_{n+4} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + (f_{n+7} + f_{n+8}) =$

$$= 4.f_{n+4} + f_{n+6} + 2[f_{n+7} + (f_{n+6} + f_{n+7})] = 4.f_{n+4} + 3f_{n+6} + 4f_{n+7} =$$

$$= 4.f_{n+4} + 3f_{n+6} + 4(f_{n+5} + f_{n+6}) = 4.f_{n+4} + 4.f_{n+5} + 7.f_{n+6} = 11 f_{n+6}.$$ ■

A seguir, algumas dessas identidades serão verificadas para os números Gaussianos de Fibonacci. Além do mais, serão discutidas algumas relações válidas para os Gaussianos.

3.1.2 Números Gaussianos de Fibonacci e Teoremas

Os números de Fibonacci permitem uma representação complexa. Nesse contexto, podem ser citados os Inteiros Gaussianos que são descritos por Berzsenyi (1977), posteriormente, Pethe e Horadam (1986) apresentam os números gaussianos de Fibonacci e suas relações recorrentes. Todavia, vale destacar que, segundo Jordan (1965), os números Gaussianos de Fibonacci são escritos na forma: $G f_n = f_n + f_{n-1}.i$, tendo como valores iniciais $G f_0 = i$ e $G f_1 = 1$, além disso, admitem a recorrência $G f_n = G f_{n-1} + G f_{n-2}$, $n > 1$ e, de acordo com Halici (2013), também vale a igualdade $G f_n = f_n + f_{n+1}.i$.

Segundo Jordan (1965), a identidade $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ pode ser verificada para o somatório dos números Gaussianos de Fibonacci, como por exemplo:

$$\sum_{j=0}^{2} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 = i + 1 + 1 + i = 2 + 2i = (3 + 2i) - 1 = Gf_{2+2} - 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 = i + 1 + (1 + i) + (2 + i) = 4 + 3i = (5 + 3i) - 1 = Gf_{3+2} - 1$$

$$\sum_{j=0}^{4} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 + Gf_4 = i + 1 + (1+i) + (2+i) + (3+2i) = 7 + 5i = (8+5i) - 1 = Gf_{4+2} - 1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{n} Gf_j = Gf_{n+2} - 1 = Gf_{n+2} - Gf_1$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} Gf_j = \sum_{j=0}^{n} Gf_j + Gf_{n+1} = Gf_{n+2} - 1 + Gf_{n+1} = Gf_{n+2} + Gf_{n+1} - 1 = Gf_{n+3} - 1 = Gf_{(n+1)+2} - 1.$$

Além do mais, a identidade $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$ também pode ser aplicada aos números Gaussianos de Fibonacci. Assim, considerando $Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2} \Leftrightarrow Gf_{n-1} = Gf_n - Gf_{n-2}$, segue que:

$$\begin{aligned}
Gf_1 &= Gf_2 - Gf_0 \\
Gf_2 &= Gf_3 - Gf_1 \\
Gf_3 &= Gf_4 - Gf_2 \\
Gf_4 &= Gf_5 - Gf_3 \\
&\vdots \\
Gf_{2n-2} &= Gf_{2n-1} - Gf_{2n-3} \\
Gf_{2n-1} &= Gf_{2n} - Gf_{2n-2} \\
Gf_{2n} &= Gf_{2n+1} - Gf_{2n-1}
\end{aligned}$$

Todavia, considerando somente os números de índices ímpares, ao somar todos esses números, tendo em vista os cancelamentos sucessivos dos termos de índice $2n$, obtém-se $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} = Gf_{2n} - Gf_0$. Veja:

$$\begin{aligned}
Gf_1 &= Gf_2 - Gf_0 \\
Gf_3 &= Gf_4 - Gf_2 \\
Gf_5 &= Gf_6 - Gf_4 \\
&\vdots \\
Gf_{2n-3} &= Gf_{2n-2} - Gf_{2n-4} \\
Gf_{2n-1} &= Gf_{2n} - Gf_{2n-2}
\end{aligned}$$

Prosseguindo na exploração dos somatórios que envolvem os números Gaussianos de Fibonacci, tem-se que: $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} = Gf_{2n+2} - Gf_0 - Gf_1 - (Gf_{2n} - Gf_0) =$

$= Gf_{2n+2} - Gf_{2n} - Gf_0 - Gf_1 + Gf_0 = Gf_{2n+1} - 1$. Além do mais, para $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}$, é relevante a seguinte avaliação:

$$\sum_{j=1}^{1} G\,f_{2j} = \sum_{j=1}^{2} G\,f_j - \sum_{j=1}^{1} G\,f_{2j-1} \Rightarrow Gf_2 = Gf_1 + Gf_2 - Gf_1$$

$$\sum_{j=1}^{2} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{4} Gf_j - \sum_{j=1}^{2} Gf_{2j-1} \Rightarrow Gf_2 + Gf_4 = Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 + Gf_4 - (Gf_1 + Gf_3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} Gf_{2j} = \left(\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} + Gf_{2n+2}\right) = Gf_{2n+2} + \left(\sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}\right) = \left(Gf_{2n+2} + Gf_{2n+1} + \sum_{j=1}^{2n} Gf_j\right) - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} - Gf_{2n+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n+2} Gf_j - \left(\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} + Gf_{2(n+1)-1}\right) = \sum_{j=1}^{2n+2} Gf_j - \sum_{j=1}^{n+1} Gf_{2j-1}.$$

Jordan (1965) apresenta, algumas identidades inerentes ao Teorema 1. Vale comentar que, as relações, a seguir, são discutidas, fazendo recorrência a argumentos matriciais. Gould (1981) explica que essa tipologia de argumentos possibilita uma evolução da teoria, assim, eles compõem uma nova versão do método de Reiter (1993), que é usado para determinar fórmulas de redução do modelo de Fibonacci.

Desse modo, sejam as seguintes matrizes $X = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$, pode-se compreender que $\det Q = -1 \neq 0$ e $\det X = i - 2 \neq 0$, logo, as matrizes X e Q admitem inversa, além disso, pode-se avaliar o produto matricial entre as matrizes para $n \geq 1$, tal que:

$$X \cdot Q = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_3 & Gf_2 \\ Gf_2 & Gf_1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Q^2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i & 2+i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_4 & Gf_3 \\ Gf_3 & Gf_2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Q^3 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i & 3+2i \\ 3+2i & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_5 & Gf_4 \\ Gf_4 & Gf_3 \end{pmatrix}$$

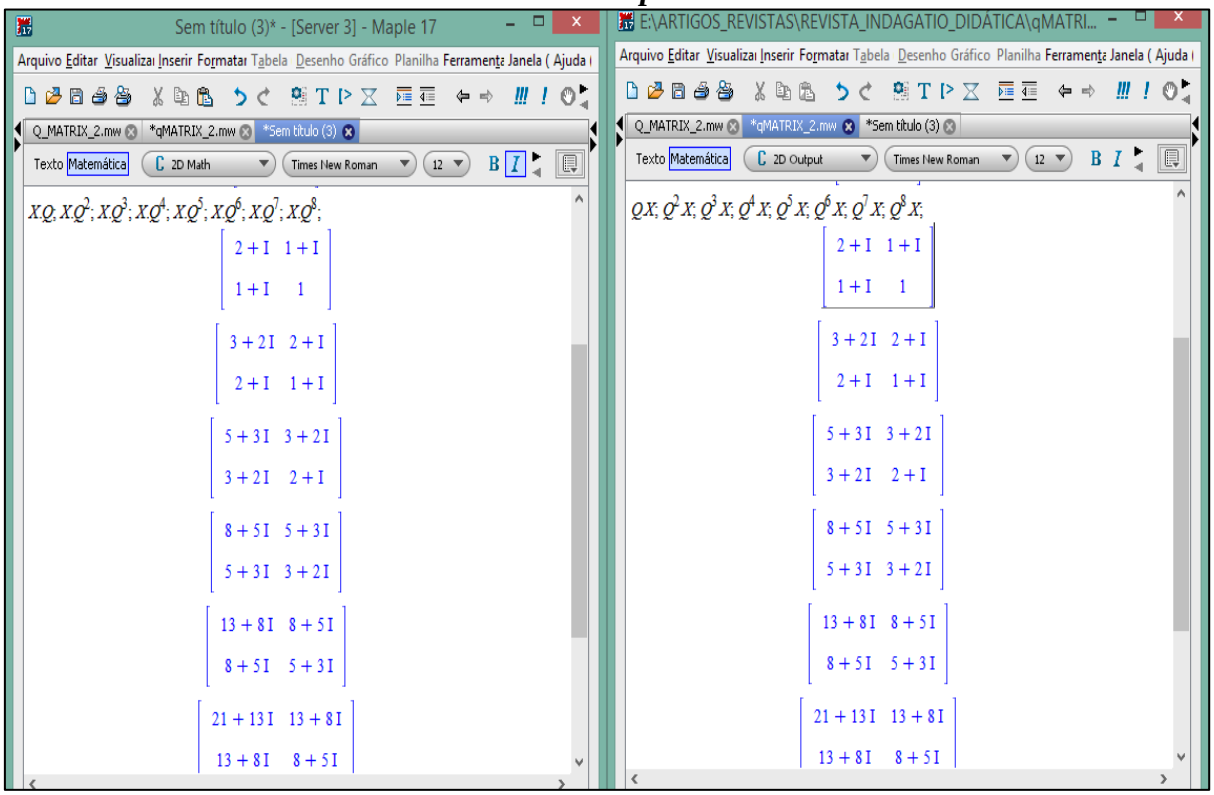
$$\vdots$$

$$X \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Q^{n+1} = (X \cdot Q^n).Q = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_{n+3} & Gf_{n+2} \\ Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Além da determinação de $X \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix}$, pode-se verificar, com o uso do *CAS Maple*, a validade da propriedade comutativa no produto entre as matrizes X e Q. As potências matriciais do tipo $Q^n \cdot X$ e $X \cdot Q^n$ podem ser visualizadas na Figura 3. Destarte, será iniciada a discussão do Teorema 1.

Figura 3 – Propriedade comutativa: visualização das matrizes do tipo $Q^n \cdot X$ e $X \cdot Q^n$ no *CAS Maple*.



Fonte: Elaboração da autora.

Teorema 1: Para os números Gaussianos de Fibonacci são válidas as seguintes propriedades:

$$(i)\ Gf_{n+1}^{\ 2} + Gf_n^{\ 2} = (1+2i).f_{2n}$$

$$(ii)\ Gf_{n+1}Gf_{p+1} + Gf_nGf_p = (1+2i)\cdot f_{n+p}$$

$$(iii)\ Gf_{n+1}^{\ 2}Gf_{n+2} + 2.Gf_nGf_{n+1}^{\ 2} + Gf_n^{\ 3} = (1+2i).(f_{3n+1} + i.f_{3n})$$

$$(iv)\ 2.Gf_nGf_{n+1}^{\ 2}Gf_{n+2} + 3.Gf_n^{\ 2}Gf_{n+1}^{\ 2} + Gf_{n+1}^{\ 2}Gf_{n+2}^{\ 2} + Gf_n^{\ 4} + Gf_{n+1}^{\ 4} = (1+2i)^2.f_{4n+1}$$

$$(v)\ \sum_{j=1}^{n} Gf_{-(2j-1)} = Gf_0 - Gf_{-(2n-2)}$$

$$(vi)\ \sum_{j=1}^{n} Gf_{-2j} = Gf_{-1} - Gf_{-(2n-1)}$$

$$(vii)\ 2Gf_1^{\ 2} + 2Gf_2^{\ 2} + 2Gf_3^{\ 2} + \cdots + 2Gf_n^{\ 2} = (1+2i)^n.(f_{2n+1} - 1) + 1$$

Demonstração: Com isso, assumindo as igualdades: $(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^n)=(X\cdot Q^n)^2=X^2\cdot Q^{2n}$, pode-se escrever:

$$(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^n)=\begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1} & Gf_n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1} & Gf_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Gf_{n+2}^2+Gf_{n+1}^2 & Gf_{n+1}.Gf_{n+2}+Gf_n.Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1}.Gf_{n+2}+Gf_n.Gf_{n+1} & Gf_{n+1}^2+Gf_n^2\end{pmatrix}$$

$$X^2\cdot Q^{2n}=\begin{pmatrix}1+2i & 1+2i\\ 1+2i & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n}\\ f_{2n} & f_{2n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{2n+1}+2i.f_{2n+1}+f_{2n}+2i.f_{2n} & f_{2n}+2i.f_{2n}+f_{2n-1}+2i.f_{2n-1}\\ f_{2n+1}+2i.f_{2n+1} & f_{2n}+2i.f_{2n}\end{pmatrix}=(1+2i).\begin{pmatrix} f_{2n+2} & f_{2n+1}\\ f_{2n+1} & f_{2n}\end{pmatrix}$$

Desse modo, a partir de $(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^n)=X^2\cdot Q^{2n}$, pode-se determinar a seguinte propriedade: $Gf_{n+1}^2+Gf_n^2=(1+2i).f_{2n}$. O que valida o item (*i*). Em seguida, de modo análogo, para o item (*ii*), deve-se fazer $n=p$, de modo que se escreva:

$$(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^p)=\begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1} & Gf_n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} Gf_{p+2} & Gf_{p+1}\\ Gf_{p+1} & Gf_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Gf_{n+2}.Gf_{p+2}+Gf_{n+1}.Gf_{p+1} & Gf_{n+2}.Gf_{p+1}+Gf_{n+1}.Gf_p\\ Gf_{n+1}.Gf_{p+2}+Gf_n.Gf_{p+1} & Gf_{n+1}.Gf_{p+1}+Gf_n.Gf_p\end{pmatrix}$$

$$X^2\cdot Q^{n+p}=\begin{pmatrix}1+2i & 1+2i\\ 1+2i & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_{n+p+1} & f_{n+p}\\ f_{n+p} & f_{n+p-1}\end{pmatrix}=(1+2i).\begin{pmatrix} f_{n+p+2} & f_{n+p+1}\\ f_{n+p+1} & f_{n+p}\end{pmatrix}$$

Assim, $(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^n)=X^2\cdot Q^{2n}\Rightarrow(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^p)=X^2\cdot Q^{n+p}$, dessa última igualdade, observando os termos correspondentes, obtém-se a segunda propriedade $Gf_{n+1}Gf_{p+1}+Gf_nGf_p=(1+2i)\cdot f_{n+p}$. Posteriormente, avaliando $(X\cdot Q^n)\cdot(X\cdot Q^n).(X\cdot Q^n)=$ $=(X\cdot Q^n)^2.(X\cdot Q^n)=(X\cdot Q^n)^3=X^3\cdot Q^{3n}$, segue que:

$$(X\cdot Q^n)^2\cdot(X\cdot Q^n)=\begin{pmatrix} Gf_{n+2}^2+Gf_{n+1}^2 & Gf_{n+1}.Gf_{n+2}+Gf_n.Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1}.Gf_{n+2}+Gf_n.Gf_{n+1} & Gf_{n+1}^2+Gf_n^2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1} & Gf_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left(Gf_{n+2}^2+Gf_{n+1}^2\right)Gf_{n+2}+\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_nGf_{n+1}\right)Gf_{n+1} & \left(Gf_{n+2}^2+Gf_{n+1}^2\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_nGf_{n+1}\right)Gf_n\\ \left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_nGf_{n+1}\right)Gf_{n+2}+\left(Gf_{n+1}^2+Gf_n^2\right)Gf_{n+1} & \left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_nGf_{n+1}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}^2+Gf_n^2\right)Gf_n\end{pmatrix}$$

$$X^3\cdot Q^{3n}=X^2.X.Q^{3n}=\begin{pmatrix}1+2i & 1+2i\\ 1+2i & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1+i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_{3n+1} & f_{3n}\\ f_{3n} & f_{3n-1}\end{pmatrix}=(1+2i).\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1+i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_{3n+1} & f_{3n}\\ f_{3n} & f_{3n-1}\end{pmatrix}=$$

$$=(1+2i).\begin{pmatrix}2+i & 1+i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_{3n+1} & f_{3n}\\ f_{3n} & f_{3n-1}\end{pmatrix}=(1+2i).\begin{pmatrix} 2.f_{3n+1}+i.f_{3n+1}+f_{3n}+i.f_{3n} & 2.f_{3n}+i.f_{3n}+f_{3n-1}+i.f_{3n-1}\\ f_{3n+1}+i.f_{3n+1}+f_{3n} & f_{3n}+i.f_{3n}+f_{3n-1}\end{pmatrix}$$

Quando se observa os termos das posições de 2ª linha e 2ª coluna da igualdade $(X\cdot Q^{n})^{2}\cdot(X\cdot Q^{n})=X^{3}\cdot Q^{3n}$, determina-se a equação $\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}\right)Gf_{n}=$ $=\left(1+2i\right)\left(f_{3n}+i.f_{3n}+f_{3n-1}\right)$. Logo, para o item (*iii*), realizando alguns cálculos, tem-se a seguinte propriedade: $Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+2.Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{3}=\left(1+2i\right)\left(f_{3n+1}+i.f_{3n}\right)$. Veja:

$$\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}\right)Gf_{n}=\left(1+2i\right)\left(f_{3n}+i.f_{3n}+f_{3n-1}\right)$$
$$Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+2.Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{3}=\left(1+2i\right)\left(f_{3n}+i.f_{3n}+f_{3n-1}\right)$$
$$Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+2.Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{3}=\left(1+2i\right)\left(f_{3n+1}+i.f_{3n}\right)$$

Para o item (*iv*), será avaliado $(X\cdot Q^{n})\cdot(X^{3}\cdot Q^{3n})=(X\cdot Q^{n})^{4}=X^{4}\cdot Q^{4n}$. Desse modo, segue:

$$(X\cdot Q^{n})\cdot(X^{3}\cdot Q^{3n})=$$
$$=\begin{pmatrix}Gf_{n+2} & Gf_{n+1}\\ Gf_{n+1} & Gf_{n}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\left(Gf_{n+2}^{2}+Gf_{n+1}^{2}\right)Gf_{n+2}+\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+1} & \left(Gf_{n+2}^{2}+Gf_{n+1}^{2}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n}\\ \left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+2}+\left(Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}\right)Gf_{n+1} & \left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}\right)Gf_{n}\end{pmatrix}$$

$$X^{4}\cdot Q^{4n}=X^{2}.X^{2}\cdot Q^{4n}=\begin{pmatrix}1+2i & 1+2i\\ 1+2i & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1+2i & 1+2i\\ 1+2i & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f_{4n+1} & f_{4n}\\ f_{4n} & f_{4n-1}\end{pmatrix}=\left(1+2i\right)^{2}.\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f_{4n+1} & f_{4n}\\ f_{4n} & f_{4n-1}\end{pmatrix}=$$
$$=\left(1+2i\right)^{2}.\begin{pmatrix}2.f_{4n+1}+f_{4n} & 2f_{4n}+f_{4n-1}\\ f_{4n+1}+f_{4n} & f_{4n}+f_{4n-1}\end{pmatrix}.$$

Organizando a igualdade dos elementos correspondentes das posições de 2ª linha e 2ª coluna das matrizes oriundas da equação $(X\cdot Q^{n})\cdot(X^{3}\cdot Q^{3n})=X^{4}\cdot Q^{4n}$, pode-se obter a propriedade (*iv*). Observe:

$$Gf_{n+1}\left[\left(Gf_{n+2}^{2}+Gf_{n+1}^{2}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n}\right]+Gf_{n}\left[\left(Gf_{n+1}Gf_{n+2}+Gf_{n}Gf_{n+1}\right)Gf_{n+1}+\left(Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}\right)Gf_{n}\right]=$$
$$=Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}^{2}+Gf_{n+1}^{4}+Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+Gf_{n}^{2}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+Gf_{n}^{2}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{2}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n}^{4}=$$
$$=2.Gf_{n}Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}+3.Gf_{n}^{2}Gf_{n+1}^{2}+Gf_{n+1}^{2}Gf_{n+2}^{2}+Gf_{n}^{4}+Gf_{n+1}^{4}=\left(1+2i\right)^{2}f_{4n+1}$$

Para os itens (*v*) e (*vi*), deve-se considerar a extensão da SF para os índices inteiros. Nesse âmbito, Koshy (2001) discute essa extensão através da identidade $f_{-n}=(-1)^{n+1}.f_{n}$. O que é demonstrado a seguir:

$$
\begin{aligned}
&f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1 \\
&f_{-2} = -1 = -f_2 \\
&f_{-3} = 2 = f_3 \\
&f_{-4} = -3 = -f_4 \\
&f_{-5} = 5 = f_5 \\
&f_{-6} = -8 = -f_6 \\
&f_{-7} = 13 = f_7 \\
&\quad\vdots \quad \vdots
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \\
&f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \\
&f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \\
&f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \\
&f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\
&f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\
&f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \\
&\quad\vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Analogamente, para os números Gaussianos de Fibonacci, será considerada a relação recursiva $Gf_{-n} = Gf_{-(n+1)} + Gf_{-(n+2)} \Leftrightarrow Gf_{-(n+1)} = Gf_{-n} - Gf_{-(n+2)}$. Dessa forma, considerando seus índices inteiros negativos, podem ser escritos os seguintes números Gaussianos:

$$
\begin{aligned}
&Gf_{-1} = Gf_0 - Gf_{-2} \\
&Gf_{-2} = Gf_{-1} - Gf_{-3} \\
&Gf_{-3} = Gf_{-2} - Gf_{-4} \\
&Gf_{-4} = Gf_{-3} - Gf_{-5} \\
&Gf_{-5} = Gf_{-4} - Gf_{-6} \\
&Gf_{-6} = Gf_{-5} - Gf_{-7} \\
&\vdots \\
&Gf_{-(2n-1)} = Gf_{-2n} - Gf_{-(2n-2)} \\
&Gf_{-2n} = Gf_{-(2n+1)} - Gf_{-(2n-1)}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&Gf_{-1} = Gf_0 - Gf_{-2} \\
&Gf_{-3} = Gf_{-2} - Gf_{-4} \\
&Gf_{-5} = Gf_{-4} - Gf_{-6} \\
&Gf_{-7} = Gf_{-6} - Gf_{-8} \\
&Gf_{-9} = Gf_{-8} - Gf_{-10} \\
&\vdots \\
&Gf_{-(2n-1)} = Gf_{-2n} - Gf_{-(2n-2)}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&Gf_{-2} = Gf_{-1} - Gf_{-3} \\
&Gf_{-4} = Gf_{-3} - Gf_{-5} \\
&Gf_{-6} = Gf_{-5} - Gf_{-7} \\
&Gf_{-8} = Gf_{-7} - Gf_{-9} \\
&Gf_{-10} = Gf_{-9} - Gf_{-11} \\
&\vdots \\
&Gf_{-2n} = Gf_{-(2n+1)} - Gf_{-(2n-1)}
\end{aligned}
$$

Primeiramente, realizando a soma dos números Gaussianos com índices ímpares negativos, obtém-se a propriedade (*v*): $\sum_{j=1}^{n} Gf_{-(2j-1)} = Gf_0 - Gf_{-(2n-2)}$. Por outro lado, somando os números com índices pares negativos, determina-se (*vi*): $\sum_{j=1}^{n} Gf_{-2j} = Gf_{-1} - Gf_{-(2n-1)}$. Doravante, para o item (*vii*), será analisado o comportamento das matrizes do tipo $X^2 \cdot Q^{2n}$:

$$
X^2 \cdot Q^2 = \begin{pmatrix} Gf_3^2 + Gf_2^2 & Gf_2.Gf_3 + Gf_1.Gf_2 \\ Gf_2.Gf_3 + Gf_1.Gf_2 & Gf_2^2 + Gf_1^2 \end{pmatrix}
$$

$$
X^2 \cdot Q^4 = \begin{pmatrix} Gf_4^2 + Gf_3^2 & Gf_3.Gf_4 + Gf_2.Gf_3 \\ Gf_3.Gf_4 + Gf_2.Gf_3 & Gf_3^2 + Gf_2^2 \end{pmatrix}
$$

$$
X^2 \cdot Q^6 = \begin{pmatrix} Gf_5^2 + Gf_4^2 & Gf_4.Gf_5 + Gf_3.Gf_4 \\ Gf_4.Gf_5 + Gf_3.Gf_4 & Gf_4^2 + Gf_3^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\vdots
$$

$$\vdots$$

$$X^2 \cdot Q^{2n} = \begin{pmatrix} Gf_{n+2}^{\,2} + Gf_{n+1}^{\,2} & Gf_{n+1}.Gf_{n+2} + Gf_n.Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1}.Gf_{n+2} + Gf_n.Gf_{n+1} & Gf_{n+1}^{\,2} + Gf_n^{\,2} \end{pmatrix}$$

$$X^2 \cdot Q^2 = (1+2i).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix}$$

$$X^2 \cdot Q^4 = (1+2i).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} f_6 & f_5 \\ f_5 & f_4 \end{pmatrix}$$

$$X^2 \cdot Q^6 = (1+2i).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{pmatrix} = (1+2i).\begin{pmatrix} f_8 & f_7 \\ f_7 & f_6 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$X^2 \cdot Q^{2n} = (1+2i).\begin{pmatrix} f_{2n+2} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n} \end{pmatrix}$$

Da soma das matrizes $X^2 \cdot Q^2 + X^2 \cdot Q^4 + X^2 \cdot Q^6 + \cdots + X^2 \cdot Q^{2n}$, será considerado apenas o resultado da posição de 2ª linha e 2ª coluna, assim, pode-se escrever:

$$Gf_1^{\,2} + 2Gf_2^{\,2} + 2Gf_3^{\,2} + \cdots + 2Gf_n^{\,2} + Gf_{n+1}^{\,2} = (1+2i)^n.\left(f_2 + f_4 + f_6 \cdots + f_{2n}\right) = (1+2i)^n.\left(f_{2n+1} - 1\right)$$

$$2Gf_1^{\,2} + 2Gf_2^{\,2} + 2Gf_3^{\,2} + \cdots + 2Gf_n^{\,2} + Gf_{n+1}^{\,2} = (1+2i)^n.\left(f_{2n+1} - 1\right) + Gf_1^{\,2}$$

$$2Gf_1^{\,2} + 2Gf_2^{\,2} + 2Gf_3^{\,2} + \cdots + 2Gf_n^{\,2} = (1+2i)^n.\left(f_{2n+1} - 1\right) + 1$$

■

Vale comentar que os métodos matriciais aplicados, anteriormente, são encontrados de modo semelhante no trabalho de Jeffery & Pereira (2014). À vista dos argumentos utilizados, Jordan (1965, p. 315) apresenta o seguinte teorema:

Teorema 2: A fórmula de Cassini, para os números Gaussinanos de Fibonacci, é descrita por:

$$Gf_n \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^2 = (2-i)(-1)^{n+1}, \text{ com } n \geq 0.$$

Demonstração: Considerando $X = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X) = i-2$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Q) =$

$= f_0.f_2 - f_1^{\,2}$ e $\det(X) \cdot \det(Q^n) = (i-2)\left(f_0.f_2 - f_1^{\,2}\right)^n = (i-2)(-1)^n = (2-i)(-1)(-1)^n = (2-i)(-1)^{n+1}$.

Além disso, como $X \cdot Q^{n} = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_{n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(X \cdot Q^{n}\right) = Gf_{n} \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^{2}$, então, pode-se escrever: $\det\left(X \cdot Q^{n}\right) = \det(X).\det(Q^{n}) \Rightarrow Gf_{n} \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^{2} = (2-i)(-1)^{n+1}$.

■

Corolário 1: Para todo $n \geq 0$, vale que:

$$\det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 \\ Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 & Gf_{n+4}-1 \end{pmatrix} = (-1)^{n}(2-i).$$

Demonstração: Conforme Martinjak & Urbiha (2016), serão realizadas algumas operações elementares entre as linhas e colunas do determinante de ordem 3, assim pode-se observar:

$$\det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 \\ Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 & Gf_{n+4}-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 \\ Gf_{n+1}+Gf_{n}-1 & Gf_{n+2}+Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+3}+Gf_{n+2}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overset{L_2 - L_3 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+3}-1 \\ -Gf_{n} & -Gf_{n+1} & -Gf_{n+2} \end{pmatrix} \overset{L_3 + L_1 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n}+Gf_{n+1}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+1}+Gf_{n+2}-1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-L_3 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & Gf_{n}+Gf_{n+1}-1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & Gf_{n+1}+Gf_{n+2}-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_2 - C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & -Gf_{n} \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & -Gf_{n+1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_1 + C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & -1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n}-1 & Gf_{n+1}-1 & 1 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

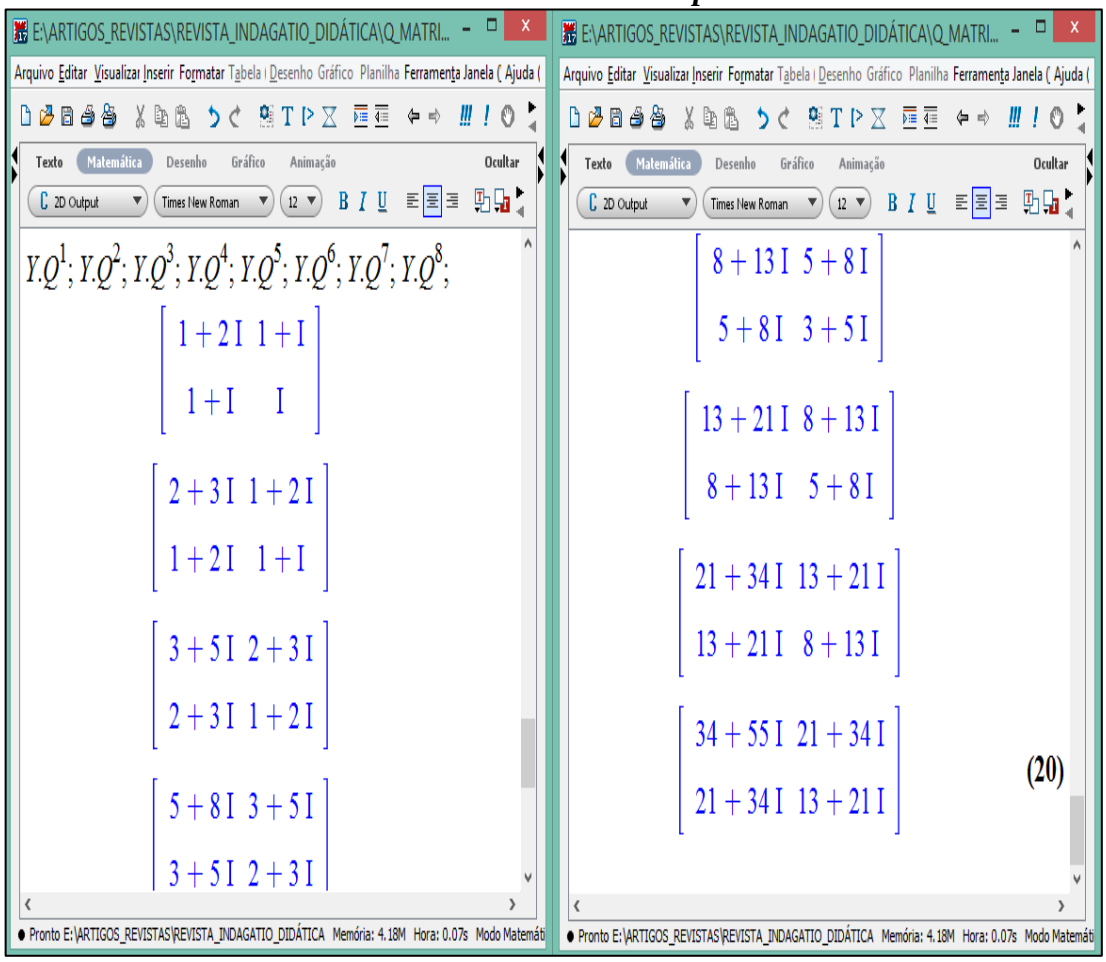
$$\overset{L_1 + L_3 \to L_1}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n} & Gf_{n+1} & 0 \\ Gf_{n+1}-1 & Gf_{n+2}-1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_2 + L_3 \to L_2}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_{n} & Gf_{n+1} & 0 \\ Gf_{n+1} & Gf_{n+2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(Gf_{n} \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^{2}) = (-1)^{n+2}(2-i) =$$

$$= (-1)^{n}(2-i).$$

■

Figura 4 – Outros casos particulares da sequência dos Gaussianos de Fibonacci visualizados no *CAS Maple*.



Fonte: Elaboração da autora.

Ainda sobre os números Gaussianos de Fibonacci, pode-se verificar a validade das relações: $Gf_n = f_n + f_{n-1}i$ e $Gf_n = f_n + f_{n+1}i$. Para isso, como: $X \cdot Q^n = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} f_{n+2} + f_{n+1}i & f_{n+1} + f_n i \\ f_{n+1} + f_n i & f_n + f_{n-1}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix}$. Logo, pode-se ver que $Gf_n = f_n + f_{n-1}i$ desde que $G\,f_0 = i$ e $G\,f_1 = 1$. Por outro lado, considerando $Y = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, pode-se fazer $Y \cdot Q^n = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_{n+2}i & f_n + f_{n+1}i \\ f_n + f_{n+1}i & f_{n-1} + f_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_{n+1} & Gf_n \\ Gf_n & Gf_{n-1} \end{pmatrix}$, de onde se tem: $Gf_n = f_n + f_{n+1}i$ desde que $G\,f_0 = i$ e $G\,f_1 = 1+i$. Vale destacar que $Y \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+1} & Gf_n \\ Gf_n & Gf_{n-1} \end{pmatrix}$ é determinada por indução (Figura 4). Observe também:

$$Y \cdot Q = \begin{pmatrix} 1+2i & 1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_2 & Gf_1 \\ Gf_1 & Gf_0 \end{pmatrix}$$
$$Y \cdot Q^2 = \begin{pmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+2i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_3 & Gf_2 \\ Gf_2 & Gf_1 \end{pmatrix}$$
$$Y \cdot Q^3 = \begin{pmatrix} 3+5i & 2+3i \\ 2+3i & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_4 & Gf_3 \\ Gf_3 & Gf_2 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$Y \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+1} & Gf_n \\ Gf_n & Gf_{n-1} \end{pmatrix}$$

Além do mais, é relevante observar que se pode escrever $(X \cdot Q^n) = \begin{pmatrix} f_{n+2} + f_{n+1}i & f_{n+1} + f_n i \\ f_{n+1} + f_n i & f_n + f_{n-1}i \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{n+1}i & f_n i \\ f_n i & f_{n-1}i \end{pmatrix} = f_{n+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f_{n+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f_n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f_n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}i + f_{n+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}i +$

$+ f_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}i.$ Por fim, nesta seção, foram tratadas relações e propriedades unidimensionais, isto é, considerando apenas uma variável, para os números Gaussianos de Fibonacci, os quais serão avaliados, a seguir, no conjunto de relações bidimensionais.

3.1.3 Relações Recorrentes Bidimensionais e Identidades

Doravante, serão deduzidas determinadas identidades emergentes de uma relação recorrente bidimensional, ou seja, com duas variáveis, discutida por Harman (1981), Oliveira, Alves & Paiva (2017), a fim de explorar o aumento dimensional, a partir da inserção de unidades imaginárias, do modelo de Fibonacci. Para isso, tem-se a definição a seguir para os números de Fibonacci da forma $G(n,m)$.

Definição 1: Assumindo os seguintes valores iniciais $G(0,0)=0, G(1,0)=1, G(0,1)=i$ e $G(1,1)=1+i,$ podem-se escrever os números da forma $G(n,m)$ usando as seguintes relações (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$$
$$G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m).$$

Antes de demonstrar o Teorema 3 que antecede a discussão das identidades bidimensionais, é necessário apresentar o enunciado e a validade do Lema 1. Desse modo, observe que:

Lema 1: São válidas as seguintes propriedades (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\begin{aligned} G(n,0) &= f_n \\ G(0,m) &= f_m i \\ G(n,1) &= f_n + f_{n+1} i \\ G(1,m) &= f_{m+1} + f_m i \end{aligned} .$$

Demonstração: aplica-se o segundo princípio de indução sobre *n*, variando *n* = (0,1,2,3,...), considerando a relação $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e os valores iniciais definidos $G(0,0) = 0 = f_0$ e $G(1,0) = 1 = f_1$, avalia-se a recorrência para *m*=0. Observe:

$$\begin{aligned} &G(n+2,0) = G(n+1,0) + G(n,0): \\ &G(2,0) = G(1,0) + G(0,0) = 1 = f_2 \\ &G(3,0) = G(2,0) + G(1,0) = 2 = f_3 \\ &G(4,0) = G(3,0) + G(2,0) = 3 = f_4 \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &G(n,0) = G(n-1,0) + G(n-2,0) = f_n \\ &G(n+1,0) = G(n,0) + G(n-1,0) = f_{n+1} \\ &G(n+2,0) = G(n+1,0) + G(n,0) = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}. \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se que vale a propriedade $G(n,0) = f_n$. Analogamente, também se prova a validade de $G(0,m) = f_m i$, quando se considera a relação $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$ para $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$ e $G(0,1) = i$, assim, analisa-se a recursividade para n=0, ou seja, $G(0,m+2) = G(0,m+1) + G(0,m)$, variando *m* = (0,1,2,3,...). Veja:

$$\begin{aligned} &G(0,m+2) = G(0,m+1) + G(0,m) \\ &G(0,2) = G(0,1) + G(0,0) = i + 0 = 1i = f_2 i \\ &G(0,3) = G(0,2) + G(0,1) = i + i = 2i = f_3 i \\ &G(0,4) = G(0,3) + G(0,2) = 2i + i = 3i = f_4 i \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &G(0,m) = G(0,m-1) + G(0,m-2) = f_m i \\ &G(0,m+1) = G(0,m) + G(0,m-1) = f_{m+1} i \\ &G(0,m+2) = G(0,m+1) + G(0,m) = f_{m+1} i + f_m i = f_{m+2} i \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo princípio de indução, demonstra-se a propriedade $G(n,1) = f_n + f_{n+1}i$, contudo em relação à $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e assumindo os valores $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$, avalia-se a recorrência para m=1, isto é, $G(n+2,1) = G(n+1,1) + G(n,1)$, com n = (0, 1, 2, 3,...). Daí, segue que:

$$
\begin{aligned}
&G(n+2,1) = G(n+1,1) + G(n,1)\\
&G(2,1) = G(1,1) + G(0,1) = 1 + 2i = 1i + 1(1+i) = f_1.G(0,1) + f_2.G(1,1)\\
&G(3,1) = G(2,1) + G(1,1) = 2 + 3i = 1i + 2(1+i) = f_2.G(0,1) + f_3.G(1,1)\\
&G(4,1) = G(3,1) + G(2,1) = 3 + 5i = 2i + 3(1+i) = f_3.G(0,1) + f_4.G(1,1)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,1) = G(n-1,1) + G(n-2,1) = f_{n-1}.G(0,1) + f_n.G(1,1) = f_n + f_{n+1}i\\
&G(n+1,1) = G(n,1) + G(n-1,1) = f_n.G(0,1) + f_{n+1}.G(1,1) = f_{n+1} + f_{n+2}i\\
&G(n+2,1) = G(n+1,1) + G(n,1) = f_{n+1}.G(0,1) + f_{n+2}.G(1,1) = f_{n+2} + f_{n+3}i
\end{aligned}
$$

Por fim, segue a prova análoga de $G(1,m) = f_{m+1} + f_m i$. Porém, considera-se a relação $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$ e os valores iniciais definidos $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$, analisa-se a recorrência para n=1, ou seja, $G(1,m+2) = G(1,m+1) + G(1,m)$, para m = (0,1,2,3,...). Note que:

$$
\begin{aligned}
&G(1,m+2) = G(1,m+1) + G(1,m)\\
&G(1,2) = G(1,1) + G(1,0) = 2 + i = f_3 + f_2 i\\
&G(1,3) = G(1,2) + G(1,1) = 3 + 2i = f_4 + f_3 i\\
&G(1,4) = G(1,3) + G(1,2) = 5 + 3i = f_5 + f_4 i\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(1,m) = G(1,m-1) + G(1,m-2) = f_{m+1} + f_m i\\
&G(1,m+1) = G(1,m) + G(1,m-1) = f_{m+2} + f_{m+1} i\\
&G(1,m+2) = G(1,m+1) + G(1,m) = f_{m+3} i + f_{m+2} i
\end{aligned}
$$

■

Com origem nas relações de recorrências, nos valores iniciais assumidos na Definição 1 e partindo da validade do Lema 1, será investigado o comportamento de $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$, para qualquer valor natural de n, quando m = (0,1,2,3,..). Assim, teremos que:

Teorema 3: Para dois inteiros $n,m \in \mathbb{N}$, os números da forma $G(n,m)$ são descritos por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i.$$

Demonstração: Descreve-se que:

$$G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$$
$$G(n,2) = G(n,1) + G(n,0) = 1G(n,0) + 1G(n,1) = f_1 G(n,0) + f_2 G(n,1)$$
$$G(n,3) = G(n,2) + G(n,1) = 1G(n,0) + 2G(n,1) = f_2 G(n,0) + f_3 G(n,1)$$
$$G(n,4) = G(n,3) + G(n,2) = 2G(n,0) + 3G(n,1) = f_3 G(n,0) + f_4 G(n,1)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n,m) = G(n,m-1) + G(n,m-2) = f_{m-1} G(n,0) + f_m G(n,1) = f_{m-1} \cdot f_n + f_m (f_n + f_{n+1} i) =$$
$$= f_n (f_{m-1} + f_m) + f_{n+1} \cdot f_m i \therefore G(n,m) = f_n \cdot f_{m+1} + f_{n+1} \cdot f_m i.$$

■

Figura 5 - Teorema fornecido por Harman (1981).

which is an example of the well-known generalized Fibonacci sequence considered by Horadam [3] that satisfies

$$G(n, 1) = F_{n-1} G(0, 1) + F_n G(1, 1).$$

By substitution

$$G(n, 1) = iF_{n-1} + (1 + i)F_n = F_n + i(F_{n-1} + F_n),$$

and so by (2.1)

$$G(n, 1) = F_n + iF_{n+1}. \qquad (2.6)$$

Recurrence (2.3) together with initial values (2.5) and (2.6) specify another generalized Fibonacci sequence, so that

$$G(n, m) = F_{m-1} G(n, 0) + F_m G(n, 1)$$
$$= F_{m-1} F_n + F_m (F_n + iF_{n+1}) = (F_{m+1} + F_m) F_n + iF_m F_{n+1},$$

and so by (2.1) the complex Fibonacci numbers $G(n, m)$ are given by

$$G(n, m) = F_n F_{m-1} + iF_{n+1} F_m. \qquad (2.7)$$

It can be noted at once that along the horizontal axis $G(n, 0) = F_n$, and that on the vertical axis $G(0, m) = iF_m$. Also, the special case $n = 1$ corresponds to the complex numbers considered by Horadam [4].

3. RECURRENCE EQUATIONS AND IDENTITIES

Combining (2.2) and (2.3), it follows that

$$G(n + 2, m + 2) = G(n + 1, m + 1) + G(n + 1, m) + G(n, m + 1) + G(n, m), \qquad (3.1)$$

Fonte: Harman (1981, p. 83).

Vale comentar que, Harman (1981, p. 83) comete um equívoco (ver Figura 5) ao apresentar esse teorema, pois o autor trocou o termo f_{m-1} por f_{m+1}, assim, evidenciando a seguinte expressão $G(n,\mathrm{m}) = f_{m-1} f_n + i \cdot f_{n+1} \cdot f_m$. Contudo, Tasci & Yalcin (2013, p. 213) indicam a forma correta do teorema, que é representado por $G(n,\mathrm{m}) = f_{m+1} f_n + f_m \cdot f_{n+1} \cdot i$.

Com isso, constata-se a validade do Teorema 3, nesse sentido, serão demonstradas certas identidades bidimensionais para os números de Fibonacci na sua forma complexa. Vale

ressaltar que as identidades a seguir representam uma extensão das unidimensionais, exploradas anteriormente.

Identidade 7: A soma dos números $G(n,m)$ de índice ímpar é determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3}-1)f_m i..$$

Demonstração: Partindo da relação $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ para qualquer valor natural de *m*, segue que:

$$\begin{aligned}
&G(2,m) = G(1,m) + G(0,m) \Rightarrow G(1,m) = G(2,m) - G(0,m)\\
&G(4,m) = G(3,m) + G(2,m) \Rightarrow G(3,m) = G(4,m) - G(2,m)\\
&G(6,m) = G(5,m) + G(4,m) \Rightarrow G(5,m) = G(6,m) - G(4,m)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,m) = G(n-1,m) + G(n-2,m) \Rightarrow G(n-1,m) = G(n,m) - G(n-2,m)\\
&G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m) \Rightarrow G(n+1,m) = G(n+2,m) - G(n,m)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(2n+2,m) = G(2n+1,m) + G(2n,m) \Rightarrow G(2n+1,m) = G(2n+2,m) - G(2n,m)
\end{aligned}$$

Recorrendo à propriedade $G(0,m) = f_m i$ e ao teorema $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$, segue: $\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = G(1,m) + G(3,m) + ... + G(n+1,m) + ... + G(2n+1,m) = -G(0,m) + G(2n+2,m) =$

$$= -f_m i + f_{2n+2}.f_{m+1} + f_{2n+3}.f_m i \therefore \sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3}-1)f_m i.$$

■

Identidade 8: A soma dos números $G(n,m)$ de índice par não nulo é determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m) = (f_{2n+1}-1)f_{m+1} + (f_{2n+2}-1)f_m i\,.$$

Demonstração: Na sequência a seguir, considera-se apenas os números de índice par até a ordem 2*n*, assim, tem-se que:

$$G(3,m)=G(2,m)+G(1,m)\Rightarrow G(2,m)=G(3,m)-G(1,m)$$
$$G(5,m)=G(4,m)+G(3,m)\Rightarrow G(4,m)=G(5,m)-G(3,m)$$
$$G(7,m)=G(6,m)+G(5,m)\Rightarrow G(6,m)=G(7,m)-G(5,m)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n+1,m)=G(n,m)+G(n-1,m)\Rightarrow G(n,m)=G(n+1,m)-G(n-1,m)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(2n+1,m)=G(2n,m)+G(2n-1,m)\Rightarrow G(2n,m)=G(2n+1,m)-G(2n-1,m)$$

Aplicando a propriedade $G(1,m)=f_{m+1}+f_m i$ e o teorema $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i$, tem-se que: $\sum_{i=0}^{n}G(2i,m)=G(2,m)+G(4,m)+...+G(n,m)+...+G(2n,m)=-G(1,m)+G(2n+1,m)=$

$-(f_{m+1}+f_m i)+f_{2n+1}.f_{m+1}+f_{2n+2}.f_m i \therefore \sum_{i=0}^{n}G(2i,m)=(f_{2n+1}-1).f_{m+1}+(f_{2n+2}-1)f_m i.$

■

Identidade 9: A soma dos *n* primeiros números $G(n,m)$ com índice maior que zero é determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n}G(i,m)=(f_{n+2}-1)f_{m+1}+(f_{n+3}-2)f_m i.$$

Demonstração: Recorrendo a relação $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$, serão somados os números $G(n,m)$ até a ordem *n*, para índice maior que zero. Veja:

$$G(2,m)=G(1,m)+G(0,m)\Rightarrow G(1,m)=G(2,m)-G(0,m)$$
$$G(3,m)=G(2,m)+G(1,m)\Rightarrow G(2,m)=G(3,m)-G(1,m)$$
$$G(4,m)=G(3,m)+G(2,m)\Rightarrow G(3,m)=G(4,m)-G(2,m)$$
$$G(5,m)=G(4,m)+G(3,m)\Rightarrow G(4,m)=G(5,m)-G(3,m)$$
$$G(6,m)=G(5,m)+G(4,m)\Rightarrow G(5,m)=G(6,m)-G(4,m)$$
$$G(7,m)=G(6,m)+G(5,m)\Rightarrow G(6,m)=G(7,m)-G(5,m)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n-2,m)=G(n-3,m)+G(n-4,m)\Rightarrow G(n-3,m)=G(n-2,m)-G(n-4,m)$$
$$G(n-1,m)=G(n-2,m)+G(n-3,m)\Rightarrow G(n-2,m)=G(n-1,m)-G(n-3,m)$$
$$G(n,m)=G(n-1,m)+G(n-2,m)\Rightarrow G(n-1,m)=G(n,m)-G(n-2,m)$$
$$G(n+1,m)=G(n,m)+G(n-1,m)\Rightarrow G(n,m)=G(n+1,m)-G(n-1,m)$$

Aplicando as propriedades $G(0,m)=f_m i$, $G(1,m)=f_{m+1}+f_m i$ e ao teorema $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i$, segue:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = G(1,m) + G(2,m) + ... + G(n-1,m) + G(n,m) =$$
$$= -G(0,m) + G(n,m) - G(1,m) + G(n+1,m) =$$
$$= -f_m i + (f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i) - (f_{m+1} + f_m i) + (f_{n+1} f_{m+1} + f_{n+2} f_m i) =$$
$$= f_n f_{m+1} - f_{m+1} + f_{n+1} f_{m+1} + (-f_m + f_{n+1} f_m - f_m + f_{n+2} f_m) i$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (f_n + f_{n+1} - 1).f_{m+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} - 2) f_m i.$$

■

Identidade 10: A soma dos *n* primeiros quadrados dos números $G(n,m)$ é obtida quando se aplica o somatório (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1}.f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1) f_m.f_{m+1} i .$$

Demonstração: continuando o raciocínio da demonstração da identidade anterior, pode-se verificar que:

$$G(1,m)^2 = [G(2,m) - G(0,m)].G(1,m) \Rightarrow G(2,m)G(1,m) - G(0,m)G(1,m)$$
$$G(2,m)^2 = [G(3,m) - G(1,m)].G(2,m) \Rightarrow G(3,m)G(2,m) - G(1,m)G(2,m)$$
$$G(3,m)^2 = [G(4,m) - G(2,m)].G(3,m) \Rightarrow G(4,m)G(3,m) - G(2,m)G(3,m)$$
$$G(4,m)^2 = [G(5,m) - G(3,m)].G(4,m) \Rightarrow G(5,m)G(4,m) - G(3,m)G(4,m)$$
$$G(5,m)^2 = [G(6,m) - G(4,m)].G(5,m) \Rightarrow G(6,m)G(5,m) - G(4,m)G(5,m)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n,m)^2 = [G(n+1,m) - G(n-1,m)]G(n,m) = G(n+1,m)G(n,m) - G(n-1,m)G(n,m)$$

Dessa forma:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = G(1,m)^2 + G(2,m)^2 + ... + G(n,m)^2 =$$
$$= -G(1,m).G(0,m) + G(n+1,m) . G(n,m) =$$
$$= -(f_{m+1} + f_m i) f_m i + (f_{n+1}.f_{m+1} + f_{n+2}.f_m i)(f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m i) =$$
$$= -f_{m+1}.f_m i + f_m^2 + f_n.f_{n+1} f_{m+1}^2 + f_{n+1}^2.f_m.f_{m+1} i + f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1} i - f_{n+2}.f_{n+1}.f_m^2$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1}.f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (-f_m.f_{m+1} + f_m.f_{m+1}.f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1}) i.$$

■

Identidade 11: A soma de seis números $G(n,m)$ consecutivos é divisível por quatro, sendo determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$$

Demonstração: Utiliza-se $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ para descrever os números $G(n,m)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
G(n,m) &= f_n . f_{m+1} + f_{n+1} . f_m i \\
G(n+1,m) &= f_{n+1} . f_{m+1} + f_{n+2} . f_m i \\
G(n+2,m) &= f_{n+2} . f_{m+1} + f_{n+3} . f_m i \\
G(n+3,m) &= f_{n+3} . f_{m+1} + f_{n+4} . f_m i \\
G(n+4,m) &= f_{n+4} . f_{m+1} + f_{n+5} . f_m i \text{ 、} \\
G(n+5,m) &= f_{n+5} . f_{m+1} + f_{n+6} . f_m i
\end{aligned}$$

Note que: $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$. e $\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} = (f_{n+1} + f_{n+2}) + (f_{n+3} + f_{n+4}) + f_{n+5} + f_{n+6} = f_{n+3} + f_{n+5} + f_{n+5} + f_{n+6} =$

$= f_{n+3} + f_{n+5} + f_{n+5} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4.f_{n+5}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) &= G(n,m) + G(n+1,m) + G(n+2,m) + G(n+3,m) + G(n+4,m) + G(n+5,m) = \\
&= (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) f_{m+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6}) f_m i = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} \right) . f_{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} \right) . f_m i = \\
&= 4.f_{n+4} . f_{m+1} + 4.f_{n+5} . f_m i = \\
&= 4(f_{n+4} . f_{m+1} + f_{n+5} . f_m i) \\
\therefore \sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) &= 4.G(n+4,m).
\end{aligned}$$

■

Identidade 12: A soma de dez números $G(n,m)$ consecutivos é divisível por onze, é descrita por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$$

Demonstração: Assim, como na demonstração anterior, de modo análogo, aplicando $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ para escrever os números $G(n,m)$, como $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$ e também:

$$\sum_{i=1}^{10} f_{n+i} = (f_{n+1} + ... + f_{n+6}) + f_{n+7} + ... + f_{n+10} =$$
$$= 4.f_{n+5} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} + (f_{n+8} + f_{n+9}) =$$
$$= 4.f_{n+5} + f_{n+7} + 2[f_{n+8} + (f_{n+7} + f_{n+8})] =$$
$$= 4.f_{n+5} + 3f_{n+7} + 4f_{n+8} =$$
$$= 4.f_{n+5} + 3f_{n+7} + 4(f_{n+6} + f_{n+7}) =$$
$$= 4.f_{n+5} + 4.f_{n+6} + 7.f_{n+7} =$$
$$= 11 f_{n+7}.$$

Segue que:

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = G(n,m) + G(n+1,m) + G(n+2,m) + ... + G(n+8,m) + G(n+9,m) =$$
$$= (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+8} + f_{n+9}) f_{m+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + ... + f_{n+9} + f_{n+10}) f_m i =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{9} f_{n+i}\right).f_{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{10} f_{n+i}\right).f_m i =$$
$$= 11.f_{n+6}.f_{m+1} + 11.f_{n+7}.f_m i =$$
$$= 11(f_{n+6}.f_{m+1} + f_{n+7}.f_m i)$$
$$\therefore \sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$$

■

Além do mais, Harman (1981, p. 83) explica que o teorema, a seguir, descreve através de uma função $G(n,m)$, um valor único de $G(n,m)$ correspondente para cada ponto no plano (n,m). Desse modo, (*b*) não foi discutida pelo autor. Assim, segue:

Teorema 4: Para os números $G(n,m)$ com índices inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\begin{cases} (a)\ G(n+2,m+2) = G(n+1,m+1) + G(n+1,m) + G(n,m+1) + G(n,m) \\ (b)\ G(-(n+2),-(m+2)) = G(-(n+1),-(m+1)) - G(-n,-(m+1)) - G(-(n+1),-m) + G(-n,-m) \end{cases}$$

Demonstração: Como $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ e $G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m)$, pode-se observar que $G(n+2,m+2)=G(n+2,m+1)+G(n+2,m)$. Assim, aplicando a relação recursiva, tem-se: $G(n+2,m+2)=G(n+2,m+1)+G(n+2,m)=G(n+1,m+1)+G(n,m+1)+G(n+2,m)=$ $=G(n+1,m+1)+G(n,m+1)+G(n+1,m)+G(n,m)$ (a).

À vista disso, pode-se compreender que $(n+1,m+1),(n,m+1),(n+1,m)$ e (n,m), são as coordenadas dos pontos no plano. Desse modo, pode-se obter um número subsequente representado por $G(n+2,m+2)$. Essa propriedade, conforme Harman (1981, p. 83), é "uma interessante versão bidimensional da recorrência caracteristica de Fibonacci". Harman (1981) não discute $G(-n,-\mathrm{m})=f_{-(m+1)}f_{-n}+f_{-m}\cdot f_{-(n+1)}\cdot i$, contudo, quando se avalia essa relação, pode-se ver $G(-n,-\mathrm{m})=f_{-(m+1)}\cdot f_{-n}+f_{-m}\cdot f_{-(n+1)}\cdot i=(-1)^{m+2}f_{(m+1)}(-1)^{n+1}f_n+(-1)^{m+1}f_m\cdot(-1)^{n+2}f_{(n+1)}\cdot i=$ $=(-1)^{n+m+3}f_{(m+1)}f_n+(-1)^{n+m+3}f_m f_{(n+1)}\cdot i=(-1)^{n+m+1}[f_{(m+1)}f_n+f_m f_{(n+1)}\cdot i]$, assim, tem-se que $G(-n,-\mathrm{m})=(-1)^{(n+m)+1}\cdot G(n,\mathrm{m})$ é válida para todo par (n,m) de inteiros quaisquer. Nesse sentido, ao avaliar $G(-(n+2),-(m+2))$, segue que:

$$
\begin{gathered}
G(-(n+2),-(m+2))=(-1)^{(\mathrm{n}+2+m+2)+1}\cdot G(n+2,m+2)= \\
=(-1)^{(n+m)+5}\cdot G(n+2,m+2)= \\
=(-1)^{(n+m)+5}\cdot[G(n+1,m+1)+G(n,m+1)+G(n+1,m)+G(n,m)]= \\
=(-1)^{n+m+3}\cdot G(n+1,m+1)+(-1)^{n+m+5}\cdot G(n,m+1)+(-1)^{n+m+5}\cdot G(n+1,m)+(-1)^{n+m+5}\cdot G(n,m)= \\
=(-1)^{(n+1+m+1+1}\cdot G(n+1,m+1)-(-1)^{n+m+1+1}\cdot G(n,m+1)-(-1)^{n+1+m+1}\cdot G(n+1,m)+(-1)^{n+m+1}\cdot G(n,m)= \\
=G(-(n+1),-(m+1))-G(-n,-(m+1))-G(-(n+1),-m)+G(-n,-m)
\end{gathered}
$$

Finalmente, obtém-se $G(-(n+2),-(m+2))=G(-(n+1),-(m+1))-G(-n,-(m+1))$ $-G(-(n+1),-m)+G(-n,-m)$ (b), que é uma relação ainda não discutida pelos autores consultados.

■

Destarte, os números Gaussianos de Fibonacci serão explorados para uma representação da Fórmula de Binet. Para isso, segue o seguinte corolário:

Corolário 2: Os números $G(n,\mathrm{m})$ são decritos, $\forall(n,m)$, pelas seguintes fórmulas variantes de Binet (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\begin{cases} (a)\ G(n,m) = \dfrac{\alpha^{n+m+1}\cdot G(1,1) - \alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i) - \alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2} \\ (b)\ G(-n,-\mathrm{m}) = (-1)^{(n+m)+1}\cdot\dfrac{\alpha^{n+m+1}\cdot G(1,1) - \alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i) - \alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2} \end{cases}$$

Demonstração: Considerando $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ e aplicando a Fórmula de Binet, pode-se ver:

$$G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i =$$

$$\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)i =$$

$$= \frac{\alpha^{n+m+1}-\alpha^n\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\beta^n+\beta^{n+m+1}}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{\alpha^{n+m+1}i-\alpha^{n+1}\beta^m i-\beta^{n+1}\alpha^m i-\beta^{n+m+1}}{(\alpha-\beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+m+1}(1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+m+1}G(1,1)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Logo, pode-se concluir que $G(n,m) = \dfrac{\alpha^{n+m+1}G(1,1)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}$ para o item (*a*). E, de modo análogo, aplicando a equivalência $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n-1} f_n$ para o item (*b*), obtém-se $G(-n,-m) = f_{-n} f_{-(m+1)} + f_{-(n+1)} f_{-m} i = (-1)^{n+1} f_n (-1)^m f_{(m+1)} + (-1)^n f_n (-1)^{m+1} f_m i =$

$= (-1)^{n+m+1} f_n f_{(m+1)} + f_n f_m i = (-1)^{n+m+1}\cdot G(n,m)$.

■

Continuando a investigação do aumento dimensional do MF na forma complexa, a seguir, será feita uma abordagem tridimensional da relação recorrente de Fibonacci.

3.1.4 Relações Recorrentes Tridimensionais e Identidades

Harman (1981, p. 82-85) explica que "os números denotados por $G(n,m)$, são definidos no conjunto de Gaussianos Inteiros (*n, m*) = *n* + *mi*, onde *n* e *m* são inteiros. Por analogia direta com a recorrência clássica de Fibonacci". Nesse sentido, os números complexos de Fibonacci se estendem a dimensões superiores. A fim de se fazer essa verificação, nesta seção, são esboçadas as identidades inerentes à relação recursiva do caso

tridimensional. Mas antes, analogamente à versão bidimensional, será verificada a validade do Teorema 5, partindo da definição e do lema a seguir:

Definição 2: Considerando os seguintes valores iniciais definidos: $G(0,0,0)=0, G(1,0,0)=1,$ $G(0,1,0)=i, G(0,0,1)=j, G(1,1,1)=1+i+j,$ $G(0,1,1)=i+j, G(1,0,1)=1+j$ e $G(1,1,0)=1+i,$ têm-se que os números da forma $G(n,m,p)$ devem satisfazer às seguintes condições tridimensionais de recorrência (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\begin{aligned} G(n+2,m,p) &= G(n+1,m,p)+G(n,m,p) \\ G(n,m+2,p) &= G(n,m+1,p)+G(n,m,p). \\ G(n,m,p+2) &= G(n,m,p+1)+G(n,m,p) \end{aligned}$$

Lema 2: Valem as seguintes propriedades (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\begin{aligned} G(n,0,0) &= f_n \\ G(n,1,1) &= f_n + f_{n+1}i + f_{n+1}j \\ G(n,1,0) &= f_n + f_{n+1}i \\ G(n,0,1) &= f_n + f_{n+1}j \end{aligned}$$

Demonstração: Para a propriedade $G(n,0,0)=f_n$, considera-se a relação $G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(0,0,0)=0=f_0$ e $G(1,0,0)=1=f_1$, dessa forma, avalia-se a recorrência para *m*=*p*=*0*, isto é, $G(n+2,0,0)=G(n+1,0,0)+G(n,0,0)$, variando *n* = (0,1,2,3,...). Observe:

$$\begin{aligned} &G(n+2,0,0)=G(n+1,0,0)+G(n,0,0) \\ &G(2,0,0)=G(1,0,0)+G(0,0,0)=1=f_2 \\ &G(3,0,0)=G(2,0,0)+G(1,0,0)=2=f_3 \\ &G(4,0,0)=G(3,0,0)+G(2,0,0)=3=f_4 \\ &G(5,0,0)=G(4,0,0)+G(3,0,0)=5=f_5 \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &G(n,0,0)=G(n-1,0,0)+G(n-2,0,0)=f_n \end{aligned}$$

De modo análogo, para a propriedade $G(n,1,1)=f_n+f_{n+1}i+f_{n+1}j$, recorre-se à relação $G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p),$ onde os valores iniciais são $f_0=0,$ $f_1=1,$ $G(1,1,1)=1+i+j$, e $G(0,1,1)=i+j$. Com isso, avalia-se a recursividade para *m*=*p*=1, isto é, $G(n+2,1,1)=G(n+1,1,1)+G(n,1,1)$, sendo *n* = (0, 1, 2, 3,...). Veja:

$$
\begin{aligned}
&G(n+2,1,1) = G(n+1,1,1) + G(n,1,1)\\
&G(2,1,1) = G(1,1,1) + G(0,1,1) = 1 + 2i + 2j = f_1.G(0,1,1) + f_2.G(1,1,1)\\
&G(3,1,1) = G(2,1,1) + G(1,1,1) = 2 + 3i + 3j = f_2.G(0,1,1) + f_3.G(1,1,1)\\
&G(4,1,1) = G(3,1,1) + G(2,1,1) = 3 + 5i + 5j = f_3.G(0,1,1) + f_4.G(1,1,1)\\
&G(5,1,1) = G(4,1,1) + G(3,1,1) = 5 + 8i + 8j = f_4.G(0,1,1) + f_5.G(1,1,1)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,1,1,1) = G(n-1,1,1) + G(n-2,1,1) = f_{n-1}.G(0,1,1) + f_n.G(1,1,1) = f_n + f_{n+1}i + f_{n+1}j
\end{aligned}
$$

Sendo assim, prossegue-se para $G(n,1,0) = f_n + f_{n+1}i$, recorrendo à $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$ para $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $G(1,1,0) = 1 + i$ e $G(0,1,0) = i$. A recorrência é avaliada para *m*=1 e *p*=0, isto é, $G(n+2,1,0) = G(n+1,1,0) + G(n,1,0)$, variando *n* = (0,1,2,3,...). Note que:

$$
\begin{aligned}
&G(n+2,1,0) = G(n+1,1,0) + G(n,1,0)\\
&G(2,1,0) = G(1,1,0) + G(0,1,0) = 1 + 2i = f_2 + f_3i\\
&G(3,1,0) = G(2,1,0) + G(1,1,0) = 2 + 3i = f_3 + f_4i\\
&G(4,1,0) = G(3,1,0) + G(2,1,0) = 3 + 5i = f_4 + f_5i\\
&G(5,1,0) = G(4,1,0) + G(3,1,0) = 5 + 8i = f_5 + f_6i\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,1,0) = G(n-1,1,0) + G(n-2,1,0) = f_n + f_{n+1}i
\end{aligned}
$$

Finalmente, continuando por indução, a propriedade $G(n,0,1) = f_n + f_{n+1}j$ é provada através da aplicação da recorrência $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$ considerando os valores definidos $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $G(1,0,1) = 1 + j$ e $G(0,0,1) = j$, desse modo, verifica-se a recorrência para *m*=0 e *p*=1, ou seja, $G(n+2,0,1) = G(n+1,0,1) + G(n,0,1)$, variando *n* = (0,1,2,3,...). Segue que:

$$
\begin{aligned}
&G(n+2,0,1) = G(n+1,0,1) + G(n,0,1)\\
&G(2,0,1) = G(1,0,1) + G(0,0,1) = 1 + 2j = f_2 + f_3j\\
&G(3,0,1) = G(2,0,1) + G(1,0,1) = 2 + 3j = f_3 + f_4j\\
&G(4,0,1) = G(3,0,1) + G(2,0,1) = 3 + 5j = f_4 + f_5j\\
&G(5,0,1) = G(4,0,1) + G(3,0,1) = 5 + 8j = f_5 + f_6j\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,0,1) = G(n-1,0,1) + G(n-2,0,1) = f_n + f_{n+1}j.
\end{aligned}
$$

Analogamente, aplicando o segundo princípio indutivo sobre *m* nas relações recursivas obtém-se as propriedades $G(0,m,0) = f_mi$, $G(0,m,1) = f_mi + f_{m+1}j$, $G(1,m,0) = f_{m+1} + f_mi$ e

$G(1,m,1) = f_{m+1} + f_m i + f_{m+1} j$. Ademais, por indução em p, constata-se as propriedades $G(0,0,p) = f_p j$, $G(0,1,p) = f_{p+1} i + f_p j$, $G(1,0,p) = f_{p+1} + f_p j$ e $G(1,1,p) = f_{p+1} + f_{p+1} i + f_p j$.

■

Teorema 5: Os números da forma $G(n,m,p)$ são determinados, tais que $n,m,p \in \mathbb{N}$, por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j.$$

Demonstração: Assim, quando se investiga o comportamento das propriedades apresentadas anteriormente para m = 1, 2, 3, ...,m-1, tem-se:

$$\begin{aligned}
G(0,0,P) &= (f_0 f_{P+1}) i + f_1 f_p j = f_p j \\
G(0,1,p) &= (f_1 f_{P+1}) i + f_2 f_p j \\
G(0,2,p) &= (f_2 f_{P+1}) i + f_3 f_p j \\
&\vdots \\
G(0,m-1,p) &= (f_{m-1} f_{P+1}) i + f_m f_p j \\
G(0,m,p) &= (f_m f_{P+1}) i + f_{m+1} f_p j
\end{aligned}$$

■

Desse modo, prova-se a veracidade do Teorema 5, por meio da sua aplicação para n = (1, 2, 3, ...,n-1), na seguinte situação:

$$\begin{aligned}
G(1,m,p) &= f_1 f_{m+1} f_{p+1} + f_2 f_m f_{p+1} i + f_2 f_{m+1} f_p j \\
G(2,m,p) &= f_2 f_{m+1} f_{p+1} + f_3 f_m f_{p+1} i + f_3 f_{m+1} f_p j \\
G(3,m,p) &= f_3 f_{m+1} f_{p+1} + f_4 f_m f_{p+1} i + f_4 f_{m+1} f_p j \\
&\vdots \\
G(n-2,m,p) &= f_{n-2} f_{m+1} f_{p+1} + f_{n-1} f_m f_{p+1} i + f_{n-1} f_{m+1} f_p j \\
G(n-1,m,p) &= f_{n-1} f_{m+1} f_{p+1} + f_n f_m f_{p+1} i + f_n f_{m+1} f_p j \\
G(n,m,p) &= f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j
\end{aligned}$$

Nesse sentido, como uma extensão das identidades bidimensionais, serão discutidas as seguintes identidades tridimensionais para os números de Fibonacci na sua forma complexa:

Identidade 13: A soma dos números $G(n,m,p)$ de índice ímpar é obtida por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m,p) = f_{2n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + (f_{2n+3}-1)f_m.f_{p+1}i + (f_{2n+3}-1)f_{m+1}.f_p j.$$

Demonstração: Partindo da relação $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,) + G(n,m,p)$, para qualquer valor natural de *m* e *p*, assume-se *n* = (0,1,2,3,...), assim:

$$\begin{aligned}
&G(2,m,p) = G(1,m,p) + G(0,m,p) \Rightarrow G(1,m,p) = G(2,m,p) - G(0,m,p)\\
&G(4,m,p) = G(3,m,p) + G(2,m,p) \Rightarrow G(3,m,p) = G(4,m,p) - G(2,m,p)\\
&G(6,m,p) = G(5,m,p) + G(4,m,p) \Rightarrow G(5,m,p) = G(6,m,p) - G(4,m,p)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(n,m,p) = G(n-1,m,p) + G(n-2,m,p) \Rightarrow G(n-1,m,p) = G(n,m,p) - G(n-2,m,p)\\
&G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p) \Rightarrow G(n+1,m,p) = G(n+2,m,p) - G(n,m,p)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&G(2n+2,m,p) = G(2n+1,m,p) + G(2n,m,p) \Rightarrow G(2n+1,m,p) = G(2n+2,m,p) - G(2n,m,p)
\end{aligned}$$

Recorrendo à propriedade $G(0,m,p) = f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j$ e ao teorema $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m,p) &= G(1,m,p) + G(3,m,p) + ... + G(n+1,m,p) + ... + G(2n+1,m,p) =\\
&= -G(0,m,p) + G(2n+2,m,p) =\\
&= -(f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) + f_{2n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{2n+3}.f_m.f_{p+1}i + f_{2n+3}.f_{m+1}.f_p j\\
\therefore \sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m,p) &= f_{2n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + (f_{2n+3}-1)f_m.f_{p+1}i + (f_{2n+3}-1)f_{m+1}.f_p j.
\end{aligned}$$

■

Identidade 14: A soma dos números $G(n,m,p)$ de índice par é determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m,p) = (f_{2n+1}-1).f_{m+1}.f_{p+1} + (f_{2n+2}-1).f_m.f_{p+1}i + (f_{2n+2}-1)f_{m+1}.f_p j.$$

Demonstração: De modo análogo à demonstração da identidade anterior, no entanto, considera-se apenas os números de índice par até a ordem *2n*. Veja:

$$G(3,m,p)=G(2,m,p)+G(1,m,p)\Rightarrow G(2,m,p)=G(3,m,p)-G(1,m,p)$$
$$G(5,m,p)=G(4,m,p)+G(3,m,p)\Rightarrow G(4,m,p)=G(5,m,p)-G(3,m,p)$$
$$G(7,m,p)=G(6,m,p)+G(5,m,p)\Rightarrow G(6,m,p)=G(7,m,p)-G(5,m,p)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n+1,m,p)=G(n,m,p)+G(n-1,m,p)\Rightarrow G(n,m,p)=G(n+1,m,p)-G(n-1,m,p)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(2n+1,m,p)=G(2n,m,p)+G(2n-1,m,p)\Rightarrow G(2n,m,p)=G(2n+1,m,p)-G(2n-1,m,p)$$

Aplicando a propriedade $G(1,m,p)=f_{m+1}.f_{p+1}+f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_p j$ e o teorema $G(n,m,p)=f_n f_{m+1}f_{p+1}+f_{n+1}f_m f_{p+1}i+f_{n+1}f_{m+1}f_p j$, assim, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,m,p)=G(2,m,p)+G(4,m,p)+\ldots+G(n,m,p)+\ldots+G(2n,m,p)=$$
$$=-G(1,m,p)+G(2n+1,m,p)=$$
$$-(f_{m+1}.f_{p+1}+f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_p j)+f_{2n+1}.f_{m+1}.f_{p+1}+f_{2n+2}.f_m.f_{p+1}i+f_{2n+2}.f_{m+1}.f_p j$$
$$\therefore\sum_{i=1}^{n}G(2i,m,p)=(f_{2n+1}-1).f_{m+1}.f_{p+1}+(f_{2n+2}-1).f_m.f_{p+1}i+(f_{2n+2}-1)f_{m+1}.f_p j.$$

■

Identidade 15: A soma dos *n* primeiros números $G(n,m,p)$ com índice maior que zero é obtida pelo somatório (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n}G(i,m,p)=(f_{n+2}-1)f_{m+1}f_{p+1}+(f_{n+3}-2)f_m f_{p+1}i+(f_{n+3}-2)f_{m+1}f_p j.$$

Demonstração: aplicando a relação $G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p)$, deve-se somar os números $G(n,m,p)$ até a ordem *n*, para índice maior que zero. Veja:

$$G(2,m,p)=G(1,m,p)+G(0,m,p)\Rightarrow G(1,m,p)=G(2,m,p)-G(0,m,p)$$
$$G(3,m,p)=G(2,m,p)+G(1,m,p)\Rightarrow G(2,m,p)=G(3,m,p)-G(1,m,p)$$
$$G(4,m,p)=G(3,m,p)+G(2,m,p)\Rightarrow G(3,m,p)=G(4,m,p)-G(2,m,p)$$
$$G(5,m,p)=G(4,m,p)+G(3,m,p)\Rightarrow G(4,m,p)=G(5,m,p)-G(3,m,p)$$
$$G(6,m,p)=G(5,m,p)+G(4,m,p)\Rightarrow G(5,m,p)=G(6,m,p)-G(4,m,p)$$
$$G(7,m,p)=G(6,m,p)+G(5,m,p)\Rightarrow G(6,m,p)=G(7,m,p)-G(5,m,p)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n-2,m,p)=G(n-3,m,p)+G(n-4,m,p)\Rightarrow G(n-3,m,p)=G(n-2,m,p)-G(n-4,m,p)$$
$$G(n-1,m,p)=G(n-2,m,p)+G(n-3,m,p)\Rightarrow G(n-2,m,p)=G(n-1,m,p)-G(n-3,m,p)$$

$$G(n,m,p) = G(n-1,m,p) + G(n-2,m,p) \Rightarrow G(n-1,m,p) = G(n,m,p) - G(n-2,m,p)$$
$$G(n+1,m,p) = G(n,m,p) + G(n-1,m,p) \Rightarrow G(n,m,p) = G(n+1,m,p) - G(n-1,m,p)$$

Recorrendo às propriedades e ao teorema $G(0,m,p) = f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j$, $G(1,m,p) = f_{m+1}.f_{p+1} + f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j$, $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$, segue o somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p) = G(1,m,p) + G(2,m,p) + ... + G(n-1,m,p) + G(n,m,p) =$$
$$= -G(0,m,p) + G(n,m,p) - G(1,m,p) + G(n+1,m,p) =$$
$$= -(f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) + f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j - (f_{m+1}.f_{p+1} + f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) +$$
$$+ f_{n+1} f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+2} f_m f_{p+1} i + f_{n+2} f_{m+1} f_p j =$$
$$= (f_n - 1 + f_{n+1}) f_{m+1} f_{p+1} + (-1 + f_{n+1} - 1 + f_{n+2}) f_m f_{p+1} i + (-1 + f_{n+1} - 1 + f_{n+2}) f_{m+1} f_p j =$$
$$= (f_{n+2} - 1) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+3} - 2) f_m f_{p+1} i + (f_{n+3} - 2) f_{m+1} f_p j.$$

■

Identidade 16: A soma dos *n* primeiros quadrados dos números $G(n,m,p)$ é determinada por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2 = (f_m^2 + f_n f_{n+1} f_{m+1}^2 - f_{n+1} f_{n+2} f_m^2) f_{p+1}^2 + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1) f_m f_{m+1} f_{p+1}^2 i +$$
$$+ (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1) f_{m+1}^2 f_p f_{p+1} j + (f_{n+1} f_{n+2} - 1).(2 f_m f_{m+1} f_{p+1} f_p i j + f_{m+1}^2 f_p^2 j^2).$$

Demonstração: Continuando o raciocínio da demonstração da identidade anterior, pode-se verificar que:

$$G(1,m,p)^2 = [G(2,m,p) - G(0,m,p)].G(1,m,p) \Rightarrow G(2,m,p)G(1,m,p) - G(0,m,p)G(1,m,p)$$
$$G(2,m,p)^2 = [G(3,m,p) - G(1,m,p)].G(2,m,p) \Rightarrow G(3,m,p)G(2,m,p) - G(1,m,p)G(2,m,p)$$
$$G(3,m,p)^2 = [G(4,m,p) - G(2,m,p)].G(3,m,p) \Rightarrow G(4,m,p)G(3,m,p) - G(2,m,p)G(3,m,p)$$
$$G(4,m,p)^2 = [G(5,m,p) - G(3,m,p)].G(4,m,p) \Rightarrow G(5,m,p)G(4,m,p) - G(3,m,p)G(4,m,p)$$
$$G(5,m,p)^2 = [G(6,m,p) - G(4,m,p)].G(5,m,p) \Rightarrow G(6,m,p)G(5,m,p) - G(4,m,p)G(5,m,p)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$G(n,m,p)^2 = [G(n+1,m,p) - G(n-1,m,p)]G(n,m,p) = G(n+1,m,p)G(n,m,p) - G(n-1,m,p)G(n,m,p)$$

Assim, segue que:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2 = G(1,m,p)^2 + G(2,m,p)^2 + \ldots + G(n,m,p)^2 =$$

$$-G(1,m,p).G(0,m,p) + G(n+1,m,p).G(n,m,p) = -(f_{m+1}.f_{p+1} + f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j).(f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) +$$

$$+(f_{n+1}f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+2}f_m f_{p+1}i + f_{n+2}f_{m+1}f_p j).(f_n f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+1}f_m f_{p+1}i + f_{n+1}f_{m+1}f_p j) =$$

$$= -f_m.f_{p+1}i.(f_{m+1}.f_{p+1} + f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) - f_{m+1}.f_p j\ (f_{m+1}.f_{p+1} + f_m.f_{p+1}i + f_{m+1}.f_p j) +$$

$$+f_n f_{m+1}f_{p+1}.(f_{n+1}f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+2}f_m f_{p+1}i + f_{n+2}f_{m+1}f_p j) + f_{n+1}f_m f_{p+1}i(f_{n+1}f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+2}f_m f_{p+1}i +$$

$$+f_{n+2}f_{m+1}f_p j) + f_{n+1}f_{m+1}f_p j(f_{n+1}f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+2}f_m f_{p+1}i + f_{n+2}f_{m+1}f_p j) = -f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + f_m^2 f_{p+1}^2 -$$

$$f_m f_{m+1}f_p f_{p+1}ij - f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j - f_m f_{m+1}f_p f_{p+1}ij - f_{m+1}^2 f_p^2 j^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 f_{p+1}^2 + f_n f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i +$$

$$+f_n f_{n+2}f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + f_{n+1}^2 f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2 f_{p+1}^2 + f_{n+1}f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{n+1}^2 f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j +$$

$$+f_{n+1}f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{n+1}f_{n+2}f_{m+1}^2 f_p^2 j^2 = (f_m^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2 +$$

$$+(f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + (f_{n+1}f_{n+2} - 1)2f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij +$$

$$+(f_{n+1}f_{n+2} - 1)f_{m+1}^2 f_p^2 j^2.$$

Simplificando: $\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2 = (f_m^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2 + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i +$

$+(f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)\ f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + (f_{n+1}f_{n+2} - 1).(2f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{m+1}^2 f_p^2 j^2)$. Ou ainda, tem que: $\sum_{i=1}^{n}[G(i,m,p)]^2 = A + (f_n.f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)(B.i + C.j) + (f_{n+1}.f_{n+2} - 1)(D.i.j + E.j^2)$. Para $A = (f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2 - f_{n+1}.f_{n+2}.f_m^2).f_{p+1}^2, B = f_m.f_{m+1}.f_{p+1}^2, C = f_{m+1}^2.f_p.f_{p+1}, D = 2.f_m.f_{m+1}.f_{p+1}.f_p,\ E = f_{m+1}^2.f_p^2$.

■

Identidade 17: A soma de seis números $G(n,m,p)$ consecutivos é divisível por quatro, isso fica explícito por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p).$$

Demonstração: Usa-se $G(n,m,p) = f_n f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+1}f_m f_{p+1}i + f_{n+1}f_{m+1}f_p j$ para escrever os números $G(n,m,p)$, daí:

$$G(n,m,p) = f_n.\ f_{m+1}.\ f_{p+1} + f_{n+1}.\ f_m.\ f_{p+1}i + f_{n+1}.\ f_{m+1}.\ f_p\, j$$
$$G(n+1,m,p) = f_{n+1}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+2}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+2}.f_{m+1}.f_p\, j$$
$$G(n+2,m,p) = f_{n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+3}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+3}.f_{m+1}.f_p\, j$$
$$G(n+3,m,p) = f_{n+3}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+4}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+4}.f_{m+1}.f_p\, j$$
$$G(n+4,m,p) = f_{n+4}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+5}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+5}.f_{m+1}.f_p\, j$$
$$G(n+5,m,p) = f_{n+5}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+6}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+6}.f_{m+1}.f_p\, j.$$

Como $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$ *e* $\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} = 4.f_{n+5}$. Assim:

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = G(n,m,p) + G(n+1,m,p) + G(n+2,m,p) + ... + G(n+5,m,p) =$$
$$= (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5})\ f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6}) f_m f_{p+1} i +$$
$$+ (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6})\ f_{m+1} f_p\, j =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{5} f_{n+i}\right).f_{m+1}.f_{p+1} + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i}\right).\ f_m f_{p+1} i\ + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i}\right).f_{m+1} f_p\, j\ =$$
$$= 4.\ f_{n+4}.f_{m+1}.f_{p+1}\ +\ 4.\ f_{n+5}.f_m f_{p+1} i\ +\ 4.\ f_{n+5}.f_{m+1} f_p\, j\ =$$
$$= 4.G(n+4,m,p).$$

■

Identidade 18: A soma de dez números $G(n,m,p)$ consecutivos é divisível por onze, é expressa por (OLIVEIRA, ALVES & PAIVA, 2017):

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = 11.G(n+6,m,p).$$

Demonstração: Assim, como na demonstração anterior, será utilizado $G(n,m,p) =$ $= f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p\, j$ para descrever os números $G(n,m,p)$. E, como $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$, e $\sum_{i=1}^{10} f_{n+i} = 11 f_{n+7}$. , segue que:

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = (n,m,p) + G(n+1,m,p) + G(n+2,m,p) + ... + G(n+9,m,p) =$$
$$= (f_n + f_{n+1} + ... + f_{n+9}) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+10}) f_m f_{p+1} i + (f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+10}) f_{m+1} f_p\, j =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{9} f_{n+i}\right).f_{m+1}.f_{p+1} + \left(\sum_{i=1}^{10} f_{n+i}\right).f_m.f_{p+1} i + \left(\sum_{i=1}^{10} f_{n+i}\right).f_{m+1}.f_p\, j\ =$$

$$=11.f_{n+6}f_{m+1}f_{p+1}+11.f_{n+7}f_{m}f_{p+1}i+11.f_{n+7}f_{m+1}f_{p}j\ =$$
$$=11.(f_{n+6}f_{m+1}f_{p+1}+\ f_{n+7}f_{m}f_{p+1}i+\ f_{n+7}f_{m+1}f_{p}j)=$$
$$=11.G(n+6,\ m,\ p).$$

■

Doravante, o MF será discutido numa perspectiva *n*-dimensional com o aumento do número de variáveis e suas respectivas unidades imaginárias. Assim, serão apresentados teoremas e definições.

3.1.5 Relações Recorrentes n-Dimensionais e Identidades

Nesta seção, com bases nos trabalhos de Harman (1981), Oliveira, Alves & Paiva (2017), são definidas algumas relações recorrentes *n*-dimensionais, as quais designam uma expressão generalizada para números hipercomplexos na forma $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ com *n* vaiáveis. Consequentemente, serão apresentadas determinadas identidades emergentes de um processo indutivo com origem na análise dos números Gaussianos de Fibonacci, com uma variável, que satisfazem à recorrência $G\,f_n = G\,f_{n-1} + G\,f_{n-2},\ n>1$ e, de acordo com Halici (2013), igualdade $G\,f_n = f_n + f_{n+1}.i$, desde que $G\,f_0 = i$ e $G\,f_1 = 1+i$.

Tabela 2- Identidades uni, bi e tridimensionais para os números complexos de Fibonacci.

Identidades para os números complexos de Fibonacci		
Unidimensionais	**Bidimensionais**	**Tridimensionais**
$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$	$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3}-1)f_m i$	$\sum_{i=0}^{n} G\,(2i+1,m,p) = f_{2n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + (f_{2n+3}-1)f_m.f_{p+1}i + (f_{2n+3}-1)f_{m+1}.f_p j$
$\sum_{i=0}^{n} Gf_{2i+1} = f_{2n+2} + (f_{2n+3}-1)i$		
$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$	$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m) = (f_{2n+1}-1)f_{m+1} + (f_{2n+2}-1)f_m i$	$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m,p) = (f_{2n+1}-1).f_{m+1}.f_{p+1} + (f_{2n+2}-1).f_m.f_{p+1}i + (f_{2n+2}-1)f_{m+1}.f_p j$
$\sum_{i=1}^{n} Gf_{2i} = (f_{2n+1}-1) + (f_{2n+2}-1)i$		

$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ $\sum_{i=1}^{n} Gf_i = (f_{n+2} - 1) + (f_{n+3} - 2)i$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2} - 1) f_{m+1} + (f_{n+3} - 2) f_m i$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p) = (f_{n+2} - 1) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+3} - 2) f_m f_{p+1} i + (f_{n+3} - 2) f_{m+1} f_p j$
$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1}.f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1} f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1) f_m f_{m+1} i$	$\sum_{i=1}^{n} [G(i,m,p)]^2 = A + (f_n.f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)(B.i + C.j) + (f_{n+1}.f_{n+2} - 1)(D.i.j + E.j^2)$, $para: A = (f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2 - f_{n+1}.f_{n+2}.f_m^2).f_{p+1}^2$, $B = f_m.f_{m+1}.f_{p+1}^2$, $C = f_{m+1}^2.f_p.f_{p+1}$ $D = 2.f_m.f_{m+1}.f_{p+1}.f_p$, $E = f_{m+1}^2.f_p^2$.
$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$ $\sum_{i=0}^{5} Gf_{n+i} = 4.Gf_{n+4}$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p).$
$\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$ $\sum_{i=0}^{9} Gf_{n+i} = 11 Gf_{n+6}$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = 11.G(n+6,m,p).$

Fonte: Elaboração da autora.

Além do mais, é válido considerar as identidades da Tabela 2, a qual apresenta uma esquematização de como os números Gaussianos de Fibonacci se expressam quando se insere outras variáveis e mais de uma componente imaginária. Esse processo evolutivo é bastante relevante para a compreensão da generalização das relações e propriedades *n*-dimensionais.

Definição 3: Seja um número hipercomplexo $G(n, n_2, n_3, \ldots, n_n)$ com *n* vaiáveis, para $n > 2$, vale, além da componente imaginária *i*, o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = j, \mu_2 = k, \ldots, \mu_{n-2})$. Quanto às variáveis e sua notação, tem-se que $n = n_1$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:

$$G(0,0,0,\ldots,0) = 0$$
$$G(1,0,0,\ldots,0) = 1$$
$$G(0,1,0,\ldots,0) = i$$
$$G(0,0,1,0,\ldots,0) = j$$
$$G(0,0,0,1,0,\ldots,0) = \mu_2$$

$$
\begin{aligned}
&G(0,0,0,0,1,0,\ldots,0) = \mu_3\\
&\qquad\vdots\\
&G(0,0,0,\ldots,0,1) = \mu_{n-2}\\
&G(1,1,1,\ldots,1) = 1 + i + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-2}\\
&G(0,1,1,\ldots,1) = i + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-2}\\
&G(1,0,1,\ldots,1) = 1 + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-2}\\
&G(1,1,0,1,\ldots,1) = 1 + i + \mu_2 + \ldots + \mu_{n-2}\\
&\qquad\vdots\\
&G(1,1,1,\ldots,1,0) = 1 + i + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-3}.
\end{aligned}
$$

Com isso, os números da forma $G(n, n_2, n_3, \ldots, n_n)$ devem satisfazer às seguintes condições n-dimensionais de recorrência:

$$
\begin{aligned}
&G(n+2, n_2, \ldots, n_n) = G(n+1, n_2, \ldots, n_n) + G(n, n_2, \ldots, n_n)\\
&G(n, n_2 + 2, \ldots, n_n) = G(n, n_2 + 1, \ldots, n_n) + G(n, n_2, \ldots, n_n)\\
&G(n, n_2, n_3 + 2, \ldots, n_n) = G(n, n_2, n_3 + 1, \ldots, n_n) + G(n, n_2, \ldots, n_n)\\
&\qquad\vdots\\
&G(n, n_2, n_3, \ldots, n_n + 2) = G(n, n_2, n_3, \ldots, n_n + 1) + G(n, n_2, \ldots, n_n)
\end{aligned}
$$

Teorema 6: Os números da forma $G(n, n_2, n_3, \ldots, n_n)$, tal que $n, n_2, n_3, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$, são determinados por:

$$
\begin{aligned}
G(n, n_2, \ldots, n_n) = &\left(f_{n_1} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+1} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1}\right) i +\\
&+ \left(f_{n_1+1} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1}\right) \mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+1} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n}\right) \mu_{n-2}
\end{aligned}
$$

Demonstração: Assim, já foram demonstradas que as relações $Gf_n = f_n + f_{n+1} i$, $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ e $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$ são válidas. Dessa forma, por meio de um processo indutivo, pode-se verificar que:

$$
\begin{aligned}
&Gf_n = f_n + f_{n+1} i\\
&G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i\\
&G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j\\
&G(n,m,p,q) = f_n f_{m+1} f_{p+1} f_{q+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} f_{q+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p f_{q+1} j + f_{n+1} f_{m+1} f_{p+1} f_q k\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

$$G(n_1,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+1}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+1}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+1}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}.$$

■

Identidade 19: A soma dos números $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ de índice ímpar é determinada por:

$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{2n+2}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+$$
$$+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot i+f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot\mu_1+\ldots+f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\cdot\mu_{n-2}\right)$$

Demonstração: Sabendo que valem os seguintes somatórios: $\sum_{i=0}^{n}Gf_{2i+1}=f_{2n+2}+\left(f_{2n+3}-1\right)i$,

$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=\left(f_{2n+2}f_{m+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)f_m i$ e $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m,p)=\left(f_{2n+2}f_{m+1}f_{p+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_p j\right)$,

pelo processo indutivo, pode-se ter:

$$\sum_{i=0}^{n}Gf_{2i+1}=f_{2n+2}+\left(f_{2n+3}-1\right)i$$
$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=\left(f_{2n+2}f_{m+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)f_m i$$
$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m,p)=\left(f_{2n+2}f_{m+1}f_{p+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_p j\right)$$
$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m,p,q)=\left(f_{2n+2}f_{m+1}f_{p+1}f_{q+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_m f_{p+1}f_{q+1}i+f_{m+1}f_p f_{q+1}j+f_{m+1}f_{p+1}f_q k\right)$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{2n+2}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+$$
$$+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot i+f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot\mu_1+\ldots+f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\cdot\mu_{n-2}\right)$$

Utilizando o Teorema 6, tem-se os seguintes números:

$$G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(0,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$
$$G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$
$$G(5,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(6,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$
$$\vdots$$
$$G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(n-2,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$
$$G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(n+2,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$

$$\vdots$$

$$G(2n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=G(2n+2,n_2,n_3,\ldots,n_n)-G(2n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$

E, de fato:

$$\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$

$$=G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n)+\ldots+G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)+\ldots+G(2n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$

$$=-G(0,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(2n+2,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$

$$=\left(f_{2n+2}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{2n+3}-1\right)\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot i+f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot\mu_1+\ldots+f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\cdot\mu_{n-2}\right).$$

■

Identidade 20: A soma dos números $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ de índice par não nulo é determinada por:

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,n_2,\ldots,n_n)=(f_{2n+1}-1)f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}+$$

$$+(f_{2n+2}-1)\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot i+f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot\mu_1+\ldots+f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\cdot\mu_{n-2}\right).$$

Demonstração: Sabendo que valem os seguintes somatórios: $\sum_{i=1}^{n}Gf_{2i}=(f_{2n+1}-1)+(f_{2n+2}-1)i$,

$\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}+(f_{2n+2}-1)f_m i$ e $\sum_{i=1}^{n}G(2i,m,p)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}f_{p+1}+(f_{2n+2}-1)\left(f_m f_{p+1}i+f_{m+1}f_p j\right)$,

segue, por indução, que:

$$\sum_{i=1}^{n}Gf_{2i}=(f_{2n+1}-1)+(f_{2n+2}-1)i$$

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}+(f_{2n+2}-1)f_m i$$

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,m,p)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}f_{p+1}+(f_{2n+2}-1)\left(f_m f_{p+1}i+f_{m+1}f_p j\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,m,p,q)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}f_{p+1}f_{q+1}+(f_{2n+2}-1)\left(f_m f_{p+1}f_{q+1}i+f_{m+1}f_p f_{q+1}j+f_{m+1}f_{p+1}f_q k\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}G(2i,n_2,\ldots,n_n)=(f_{2n+1}-1)f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}+$$

$$+(f_{2n+2}-1)\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot i+f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\cdot\mu_1+\ldots+f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\cdot\mu_{n-2}\right).$$

Utilizando o Teorema 6, tem-se os seguintes números:

$$\begin{aligned}
G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n)\\
G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(5,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n)\\
G(6,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(7,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(5,n_2,n_3,\ldots,n_n)\\
&\vdots\\
G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n)\\
&\vdots\\
G(2n,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(2n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(2n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n)
\end{aligned}$$

E, de fato:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} G(2i,n_2,n_3,\ldots,n_n) =\\
&= G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n) + \ldots + G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) + \ldots + G(2n,n_2,n_3,\ldots,n_n) =\\
&= -G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(2n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n) =\\
&= (f_{2n+1}-1) f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} + (f_{2n+2}-1)\left(f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot i + f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot \mu_1 + \ldots + f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n} \cdot \mu_{n-2} \right).
\end{aligned}$$

■

Identidade 21: A soma dos *n* primeiros números $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ com índice maior que zero é determinada por

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} G(i,n_2,\ldots,n_n) = (f_{n+2}-1) f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} +\\
&+(f_{n+3}-2)\left(f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot i + f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot \mu_1 + \ldots + f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n} \cdot \mu_{n-2} \right)
\end{aligned}$$

Demonstração: Sabendo que valem os seguintes somatórios: $\sum_{i=1}^{n} Gf_i = (f_{n+2}-1) + (f_{n+3}-2)i$,

$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2}-1) f_{m+1} + (f_{n+3}-2) f_m i$ e $\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p) = (f_{n+2}-1) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+3}-2)\left(f_m f_{p+1} i + f_{m+1} f_p j \right)$,

segue, pelo processo indutivo, que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} Gf_i = (f_{n+2}-1) + (f_{n+3}-2)i\\
&\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2}-1) f_{m+1} + (f_{n+3}-2) f_m i\\
&\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p) = (f_{n+2}-1) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+3}-2)\left(f_m f_{p+1} i + f_{m+1} f_p j \right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p,q) = (f_{n+2}-1) f_{m+1} f_{p+1} f_{q+1} + (f_{n+3}-2)\left(f_m f_{p+1} f_{q+1} i + f_{m+1} f_p f_{q+1} j + f_{m+1} f_{p+1} f_q k \right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,n_2,\ldots,n_n) = (f_{n+2}-1) f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} +$$

$$+(f_{n+3}-2)\left(f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot i + f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot \mu_1 + \ldots + f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n} \cdot \mu_{n-2} \right)$$

Utilizando o Teorema 6, tem-se os seguintes números:

$$\begin{aligned}
G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(0,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(4,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(5,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(3,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
&\vdots \\
G(n-3,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(n-2,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(n-4,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(n-2,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(n-3,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(n-2,n_2,n_3,\ldots,n_n) \\
G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) &= G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n)
\end{aligned}$$

E, de fato:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,n_2,n_3,\ldots,n_n) =$$

$$= G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(2,n_2,n_3,\ldots,n_n) + \ldots + G(n-1,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) =$$

$$= -G(0,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n) - G(1,n_2,n_3,\ldots,n_n) + G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n) =$$

$$= (f_{n+2}-1) f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} +$$

$$+(f_{n+3}-2)\left(f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot i + f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot \ldots \cdot f_{n_n+1} \cdot \mu_1 + \ldots + f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot \ldots \cdot f_{n_n} \cdot \mu_{n-2} \right).$$

■

Identidade 22: A soma de seis números $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ consecutivos é divisível por quatro, isso fica explícito por:

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n) = 4.G(n+4,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$

Demonstração: Usando o Teorema 6 para escrever os números da forma $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ e sabendo que valem os seguintes somatórios: $\sum_{i=0}^{5} Gf_{n+i} = 4.Gf_{n+4}$, $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m)$ e $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p)$, pelo raciocínio indutivo tem-se que:

$$\sum_{i=0}^{5} Gf_{n+i} = 4.Gf_{n+4}$$
$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m)$$
$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p)$$
$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p,q) = 4.G(n+4,m,p,q)$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n) = 4.G(n+4,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$

Utilizando o Teorema 6, tem-se os seguintes números:

$$G(n,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+1} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+1} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+1} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

$$G(n+1,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1+1} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+2} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+2} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+2} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

$$G(n+2,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1+2} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+3} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+3} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+3} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

$$G(n+3,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1+3} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+4} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+4} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+4} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

$$G(n+4,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1+4} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+5} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+5} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+5} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

$$G(n+5,n_2,\ldots,n_n) = \left(f_{n_1+5} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) + \left(f_{n_1+6} f_{n_2} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right) i + \\ + \left(f_{n_1+6} f_{n_2+1} f_{n_3} \cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(f_{n_1+6} f_{n_2+1} f_{n_3+1} \cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

Logo:

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n) =$$

$$= G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(n+2,n_2,n_3,\ldots,n_n)+\ldots+G(n+5,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$

$$=\left(f_{n_1}+f_{n_1+1}+f_{n_1+2}+f_{n_1+3}+f_{n_1+4}+f_{n_1+5}\right)\left(f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+$$

$$+\left(f_{n_1+1}+f_{n_1+2}+f_{n_1+3}+f_{n_1+4}+f_{n_1+5}+f_{n_1+6}\right)\left[\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+\left(f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}\right]=$$

$$=4.G(n+4,n_2,n_3,\ldots,n_n).$$

■

Identidade 23: A soma de dez números $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ consecutivos é divisível por onze e é expressa por:

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n)=11.G(n+6,n_2,n_3,\ldots,n_n)$$

Demonstração: Usando o Teorema 6 para escrever os números da forma $G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)$ e sabendo que valem os seguintes somatórios: $\sum_{i=0}^{9} Gf_{n+i}=11Gf_{n+6}$, $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m)=11.G(n+6,m)$ e $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p)=11.G(n+6,m,p)$, pelo raciocínio indutivo tem-se que:

$$\sum_{i=0}^{9} Gf_{n+i}=11Gf_{n+6}$$

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m)=11.G(n+6,m)$$

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p)=11.G(n+6,m,p)$$

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p,q)=11.G(n+6,m,p,q)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n)=11.G(n+6,n_2,n_3,\ldots,n_n).$$

De modo análogo à demonstração anterior, segue:

$$G(n,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+1}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+1}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+1}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$
$$G(n+1,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1+1}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+2}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+2}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+2}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$
$$G(n+2,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1+2}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+3}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+3}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+3}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$
$$G(n+3,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1+3}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+4}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+4}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+4}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$G(n+9,n_2,\ldots,n_n)=\left(f_{n_1+9}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+\left(f_{n_1+10}f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+$$
$$+\left(f_{n_1+10}f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_1+10}f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}$$

Logo:

$$\sum_{i=0}^{9}G(n+i,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$
$$=G(n,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(n+1,n_2,n_3,\ldots,n_n)+G(n+2,n_2,n_3,\ldots,n_n)+\ldots+G(n+9,n_2,n_3,\ldots,n_n)=$$
$$=\left(f_{n_1}+f_{n_1+1}+f_{n_1+2}+\ldots+f_{n_1+9}\right)\left(f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)+$$
$$+\left(f_{n_1+1}+f_{n_1+2}+f_{n_1+3}+\ldots+f_{n_1+10}\right)\left[\left(f_{n_2}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)i+\left(f_{n_2+1}f_{n_3}\cdot\ldots\cdot f_{n_n+1}\right)\mu_1+\ldots+\left(f_{n_2+1}f_{n_3+1}\cdot\ldots\cdot f_{n_n}\right)\mu_{n-2}\right]=$$
$$=11.G(n+6,n_2,n_3,\ldots,n_n).$$

■

A seguir, será discutido o MF para a classe dos polinômios com duas variáveis e, em seguida, com a introdução da unidade imaginária *i*, serão abordados os polinômios bivariados e complexos.

3.2 Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF)

Nesta seção, serão discutidos teoremas e propriedades oriundos do modelo de Fibonacci através de representações polinomiais e matriciais. Contudo, também serão abordadas algumas relações inerentes à sequência de Lucas. Os polinômios de Fibonacci

foram estudados pela primeira vez por Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) e Ernest Erich Jacobsthal (1881 – 1965).

Além disso, as representações polinomiais foram definidas, *a priori*, com a finalidade de se explorar o modelo Fibonacciano e discutir o seu processo de complexificação através da inserção de uma ou mais variáveis e, mais adiante, da unidade imaginária *i*. Tendo em vista que o Lema 3 e os Teoremas 7, 8, 9, 10 e 11 são discutidos por Hoggatt & Long (1974), Asci & Gurel (2013), Alves & Catarino (2016), vale conhecer as seguintes definições:

Definição 4: A sequência polinomial de Fibonacci é dada por (ALVES & CATARINO, 2016):

$$f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \text{ com } f_1(x) = 1, f_2(x) = x \text{ e } n \geq 1.$$

Definição 5: A sequência polinomial de Lucas é dada por (ALVES & CATARINO, 2016):

$$L_n(x) = x \cdot L_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \text{ com } L_0(x) = 2, L_1(x) = x \text{ e } n \geq 2.$$

Definição 6: A sequência dos polinômios bivariados de Fibonacci é determinada pela relação recorrente (ALVES & CATARINO, 2016):

$$F_{n+1}(x, y) = x \cdot F_n(x, y) + y \cdot F_{n-1}(x, y) \text{ com } F_0(x, y) = 0, F_1(x, y) = 1 \text{ e } n \geq 1.$$

Definição 7: A sequência dos polinômios bivariados de Lucas é determinada pela relação recorrente (ALVES & CATARINO, 2016):

$$L_{n+1}(x, y) = x \cdot L_n(x, y) + y \cdot L_{n-1}(x, y) \text{ com } L_0(x, y) = 2, L_1(x, y) = x \text{ e } n \geq 1.$$

Definição 8: A sequência dos polinômios bivariados e complexos de Fibonacci $\{F_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ é determinada pela relação recorrente (ALVES & CATARINO, 2016):

$$F_{n+1}(x, y) = ix \cdot F_n(x, y) + y \cdot F_{n-1}(x, y) \text{ com } F_0(x, y) = 0, F_1(x, y) = 1 \text{ e } n \geq 1.$$

Definição 9: A sequência dos polinômios bivariados e complexos de Lucas $\{L_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ é determinada pela relação recorrente (ALVES & CATARINO, 2016):

$$L_{n+1}(x, y) = ix \cdot L_n(x, y) + y \cdot L_{n-1}(x, y) \text{ com } L_0(x, y) = 2, L_1(x, y) = ix \text{ e } n \geq 1.$$

Por volta dos anos setenta, alguns pesquisadores como: Bicknell (1970), Hoggatt & Bicknell (1973a, 1973b), Hoggatt & Long (1974), Webb & Parberry (1969), Alves & Catarino (2016) abordam, em seus trabalhos, alguns critérios de divisibilidade discutidos no contexto das funções polinomiais obtidas através das relações recursivas oriundas do modelo de Fibonacci. À vista disso, a seguir, serão apresentados alguns teoremas e propriedades deduzidos a partir da Definição 6.

Teorema 7: Para $m \geq 0, n \geq 0,$ vale (ALVES & CATARINO, 2016):

$$F_{m+n+1}(x,y) = F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y) + \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_n(x,y).$$

Demonstração: Primeiramente, por indução sobre n e $m \geq 0,$ verifica-se a validade do Teorema 7, considerando a Definição 6, para $n=1$ e $n=2$, ou seja, $F_2(x,y)$ e $F_3(x,y)$. Desse modo, assumindo que valem $F_{m+n}(x,y)$ e $F_{m+n+1}(x,y),$ pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
&F_2(x,y) = F_{0+1+1}(x,y) = x\cdot F_1(x,y) + y\cdot F_0(x,y) = F_{0+1}(x,y)\cdot F_{1+1}(x,y) + y\cdot F_0(x,y)F_1(x,y)\\
&F_3(x,y) = F_{1+1+1}(x,y) = x\cdot F_2(x,y) + y\cdot F_1(x,y) = F_{1+1}(x,y).F_{1+1}(x,y) + y\cdot F_1(x,y)\cdot F_1(x,y)\\
&\quad\vdots\\
&F_{m+n}(x,y) = F_{m+(n-1)+1}(x,y) = F_{m+1}(x,y)F_n(x,y) + \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_{(n-1)}(x,y)\\
&F_{m+n+1}(x,y) = F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y) + y.F_m(x,y)F_n(x,y)\\
&F_{m+n+2}(x,y) = F_{m+1}(x,y)F_{(n+1)+1}(x,y) + y.F_m(x,y)F_{n+1}(x,y)
\end{aligned}$$

De fato, para $F_{m+n+2}(x,y),$ é feito:

$$\begin{aligned}
&F_{m+n+2}(x,y) = x\cdot F_{m+n+1}(x,y) + y\cdot F_{m+n}(x,y) =\\
&= x\left(F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y) + \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_n(x,y)\right) + y\left(F_{m+1}(x,y)F_n(x,y) + \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_{(n-1)}(x,y)\right) =\\
&= x\cdot F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y) + y\cdot F_{m+1}(x,y)F_n(x,y) + x\cdot \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_n(x,y) + y\cdot \mathrm{y}\cdot F_m(x,y)F_{(n-1)}(x,y) =\\
&= F_{m+1}(x,y)F_{n+2}(x,y) + y.F_m(x,y)F_{n+1}(x,y).
\end{aligned}$$

■

Lema 3: Para $n > 0$, tem-se que (ALVES & CATARINO, 2016):

$$MDC(y, F_n(x,y)) = 1.$$

Demonstração: Pode-se verificar que para $n=1,$ tem-se que $MDC(y,F_1(x,y)) = MDC(y,1) = 1.$ Assim, assumindo que vale para $k \geq 1,$ então, pela Definição 6, pode-se escrever que

$F_{k+1}(x,y) = x \cdot F_k(x,y) + y \cdot F_{k-1}(x,y)$. Dessa forma, tem-se que $MDC(y, F_{k+1}(x,y)) = d(x,y)$. $\Rightarrow d(x,y) \mid F_{k+1}(x,y)$ e $d(x,y) \mid y$. Logo, $d(x,y) \mid F_{k+1}(x,y) - y \cdot F_{k-1}(x,y) = x \cdot F_k(x,y)$. Porém, $d(x,y) \mid F_k(x,y)$ se $MDC(y, F_k(x,y)) = 1$. E, $d(x,y) \mid x$, desde que $MDC(y, F_{k+1}(x,y)) = 1$.

■

Teorema 8: Para $n \geq 0$, segue que (ALVES & CATARINO, 2016):

$$MDC(F_n(x,y), F_{n+1}(x,y)) = 1.$$

Demonstração: Para $n = 0$, tem-se $MDC(F_0(x,y), F_1(x,y)) = MDC(0,1) = 1$ e para $n = 1$, $MDC(F_1(x,y), F_2(x,y)) = MDC(1,x) = 1$. Além disso, assumindo que também vale para $n = k-1$ onde *k* é um inteiro, tal que, $k \geq 2$. Dessa forma, tem-se $MDC(F_k(x,y), F_{k+1}(x,y)) =$ $= d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \mid F_k(x,y)$ e $d(x,y) \mid F_{k+1}(x,y)$. Ou ainda, pela Definição 6, tem-se: $d(x,y) \mid F_{k+1}(x,y) - x \cdot F_k(x,y) = y \cdot F_{k-1}(x,y)$, isto é, $d(x,y) \mid y \cdot F_{k-1}(x,y)$. Como $MDC(y, F_n(x,y)) = 1$ (Lema 3), e $MDC(F_k(x,y), F_{k-1}(x,y)) = 1$, então se, $F_{k-1}(x,y)$ não é divisível por $d(x,y)$. Logo, $d(x,y) \mid y$, que é um polinômio irredutível na variável *y*, evidenciando assim, uma contradição.

■

Teorema 9: Para $m \geq 2$, segue que (ALVES & CATARINO, 2016):

$$F_m(x,y) \mid F_n(x,y) \Leftrightarrow m \mid n.$$

Demonstração: Primeiramente, será avaliada $m \mid n \Rightarrow F_m(x,y) \mid F_n(x,y)$. Para isso, será considerada $F_m(x,y) \mid F_{k \cdot m}(x,y)$, assim, para $k = 1$, tem-se $\mathrm{F_m(x,y) \mid F_{1 \cdot m}(x,y)}$. Dessa forma, por indução para $k \geq 1$, assume-se que vale $F_m(x,y) \mid F_{k \cdot m}(x,y)$. Pelo Teorema 7, avalia-se para $F_{(k+1)m}(x,y)$: $F_m(x,y) \mid F_{(k+1)m}(x,y) = F_{km+m}(x,y) = F_{km}(x,y)F_{m+1}(x,y) + \mathrm{y} \cdot F_{km-1}(x,y)F_m(x,y)$. Neste caso, como $F_m(x,y) \mid F_{k \cdot m}(x,y)$ e $F_m(x,y) \mid F_m(x,y) \Rightarrow F_m(x,y) \mid F_{(k+1)m}(x,y)$. Logo, tendo em vista que $m \mid k\,m$ e $m \mid (k+1)m$, pode-se concluir que: $m \mid n \Rightarrow F_m(x,y) \mid F_n(x,y)$.

Finalmente, será avaliada $F_m(x,y) \mid F_n(x,y) \Rightarrow m \mid n$. Neste caso, parte do pressuposto de que *n* não é divisível por *m.* Assim, sejam q (quociente) e r (resto) em uma operação,

tem-se pelo algoritmo da divisão que: $n = m \cdot q + r,$ tal que $0 < r < m$ e $q, r \in \mathbb{Z}$. Além disso, pelo Teorema 7, pode-se escrever que $F_n(x,y) = F_{m\cdot q+r}(x,y) = F_{m\cdot q+(r-1)+1}(x,y) = = F_{m\cdot q+1}(x,y)F_r(x,y) + y \cdot F_{m\cdot q}(x,y)F_{r-1}(x,y)$. Como foi visto: $F_m(x,y) \mid F_{m\cdot q}(x,y)$ e $F_m(x,y) \mid F_n(x,y)$, pode-se escrever: $F_m(x,y) \mid F_n(x,y) - yF_{m\cdot q}(x,y)F_{r-1}(x,y) = F_{m\cdot q+1}(x,y)F_r(x,y) \Rightarrow F_m(x,y) \mid F_{m\cdot q+1}(x,y)F_r(x,y).$ E, pelo Teorema 8, como $MDC(F_{m\cdot q}(x,y), F_{m\cdot q+1}(x,y)) = 1$, então, $F_m(x,y) \mid F_r(x,y)$. O que é impossível, pois $0 < r < m$, isto é, $F_r(x,y)$ possui um termo de grau menor do que o de $F_m(x,y)$. Logo, isso somente é possível, quando $r = 0$ e, consequentemente, $m \mid n$ sendo $m \geq 2$. Portanto, $F_m(x,y) \mid F_n(x,y) \Rightarrow m \mid n$.

■

Teorema 10: Para $m \geq 0, n \geq 0$, tem-se que (ALVES & CATARINO, 2016):

$$MDC(F_m(x,y), F_n(x,y)) = F_{MDC(m,n)}(x,y).$$

Demonstração: Considerando a existência de inteiros *r* e *s*, de modo que $r > 0$ e $s < 0$, tal que, $MDC(m,n) = r \cdot m + s \cdot n \Rightarrow r \cdot m = MDC(m,n) - s \cdot n$. Desse modo, pelo Teorema 7, tem-se $F_{r\cdot m}(x,y) = = F_{MDC(m,n)-s\cdot n}(x,y) = F_{MDC(m,n)+(-s)\cdot n}(x,y) = F_{MDC(m,n)}(x,y)F_{(-s)\cdot n+1}(x,y) + y \cdot F_{MDC(m,n)-1}(x,y)F_{(-s)\cdot n}(x,y)$ Assim, seja $d(x,y) = MDC(F_m(x,y), F_n(x,y))$, assim tem-se que, $d(x,y) \mid F_m(x,y) \Rightarrow d(x,y) \mid F_{r\cdot m}(x,y)$, $d(x,y) \mid F_n(x,y) \Rightarrow d(x,y) \mid F_{-s\cdot n}(x,y)$ e $d(x,y) \mid F_{r\cdot m}(x,y) - yF_{MDC(m,n)-1}(x,y)F_{-s\cdot n}(x,y) = F_{MDC(m,n)}(x,y)F_{-s\cdot n+1}(x,y)$ de onde se ver que $d(x,y) \mid F_{MDC(m,n)}(x,y) \cdot F_{-s\cdot n+1}(x,y)$. Quando $d(x,y) \mid F_{MDC(m,n)}(x,y)$, a demonstração fica concluída. Todavia, no caso de $d(x,y) \mid F_{-s\cdot n+1}(x,y)$, supõe-se que $d'(x,y) = MDC(d(x,y), F_{-sn+1}(x,y))$, então, $d'(x,y) \mid d(x,y)$ e $d'(x,y) \mid F_{-sn+1}(x,y)$. Além disso, sabe-se que $MDC(F_{-sn}(x,y), F_{-sn+1}(x,y)) = 1$ e como $d(x,y) \mid F_{-s\cdot n}(x,y)$ e $d(x,y) \mid F_{-s\cdot n+1}(x,y)$, então, $d(x,y) = 1$, logo, $MDC(d(x,y), F_{-sn+1}(x,y)) = 1.$ Por fim, valida-se $d(x,y) \mid F_{MDC(m,n)}(x,y)$.

■

Teorema 11: Seja $r = r(x,y)$ um polinômio nas variáveis *x* e *y*, se houver pelo menos um inteiro *m* positivo, tal que $r(x,y) \mid F_m(x,\mathrm{y})$, então (ALVES & CATARINO, 2016):

$$r(x,y) \mid F_n(x,\mathrm{y}) \Leftrightarrow m \mid n.$$

Demonstração: Pelo Teorema 9, sabe-se que $m \mid n \Rightarrow F_m(x,y) \mid F_n(x,y)$. Assim, pode-se assumir que existe um inteiro *m* positivo, tal que $r(x,y) \mid F_m(x,y)$ e, por transitividade, obtém-se $r(x,y) \mid F_n(x,y)$. Assim, assumindo que $r(x,y) \mid F_n(x,y)$ e *n* não é divisível por *m*, pode-se considerar, pelo algoritmo de Euclides, que existem inteiros q, s e $0 < s < m$, tal que, $n = m \cdot q + s$. Desse modo, pelo Teorema 7, pode-se escrever: $F_n(x,y) = F_{m \cdot q+s}(x,y) =$ $= F_{m \cdot q+(s-1)+1}(x,y) = F_{m \cdot q+1}(x,y)F_s(x,y) + y \cdot F_{m \cdot q}(x,y)F_{s-1}(x,y)$. Como $r(x,y) \mid F_m(x,y)$, $r(x,y) \mid F_{m \cdot q}(x,y)$ e $r(x,y) \mid F_n(x,y)$. Assim, segue que $r(x,y) \mid F_n(x,y) - y \cdot F_{m \cdot q}(x,y)F_{s-1}(x,y) = F_{m \cdot q+1}(x,y)F_s(x,y)$. Com isso, tem-se que $r(x,y) \mid F_{m \cdot q+1}(x,y)F_s(x,y)$ e como $MDC(F_{m \cdot q}(x,y), F_{m \cdot q+1}(x,y)) = 1$, então, pode-se escrever $r(x,y) \mid F_s(x,y)$. Isso evidencia uma contradição, em relação à condição mínima para *m*, uma vez que existe um inteiro *m* positivo que satisfaz $r(x,y) \mid F_m(x,y)$ e $0 < s < m$, sendo *n* divisível por *m*.

■

Seja $F_p(x)$ um termo da sequência polinomial de Fibonacci, de acordo com Hoggatt & Long (1974), $F_p(x)$ é irredutível sobre o anel $\mathbb{Z}[x]$ se somente se p é primo. $\mathbb{Z}[x]$ abrange as funções polinomiais na variável x. Além do mais, Alves & Catarino (2016b) ampliam essa discussão no anel $\mathbb{Z}[x,y]$, isto é, com polinômios bivariados, com aporte no *software CAS Maple*. A seguir, têm-se alguns termos irredutíveis sobre $\mathbb{Z}[x,y]$ com índices primos:

$$F_3(x,y) = x^2 + y$$
$$F_5(x,y) = x^4 + 3x^2y + y^2$$
$$F_7(x,y) = x^6 + 5x^4y + 6x^2y^2 + y^3$$
$$\vdots$$
$$F_{19}(x,y) = x^{18} + 17x^{16}y + 120x^{14}y^2 + 455x^{12}y^3 + 1001x^{10}y^4 + 1287x^8y^5 + 924x^6y^6 + 330x^4y^7 + 45x^2y^8 + y^9$$
$$\vdots$$
$$F_{23}(x,y) = x^{22} + 21x^{20}y + 190x^{18}y^2 + 969x^{16}y^3 + 3060x^{14}y^4 + 6188x^{12}y^5 + 8008x^{10}y^6 + 6435x^8y^7 + 3003x^6y^8 + $$
$$+715x^4y^9 + 66x^2y^{10} + y^{11}$$
$$\vdots$$
$$F_{31}(x,y) = x^{30} + 29x^{28}y + 378x^26y^2 + 2925x^{24}y^3 + 14950x^{22}y^4 + 53130x^{20}y^5 + 134596x^{18}y^6 + 245157x^{16}y^7 +$$
$$+319770x^{14}y^8 + 293930x^{12}y^9 + 184756x^{10}y^{10} + 75582x^8y^{11} + 18564x^6y^{12} + 2380x^4y^{13} + 120x^2y^{14} + y^{15}$$
$$\vdots$$

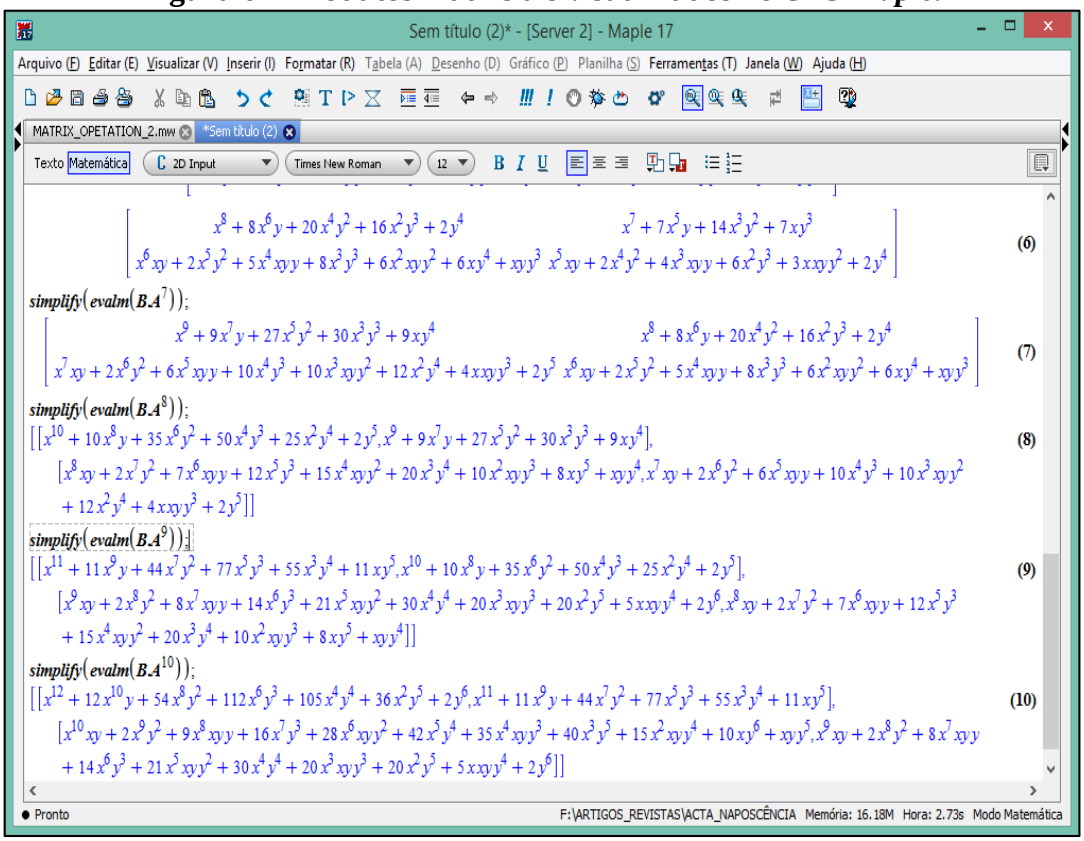
Doravante, algumas propriedades matriciais e de divisibilidade serão discutidas para os números da sequência de Lucas. De início, será abordada a fatoração dos termos polinomiais da sequência de Lucas. Nesse sentido, considerando a Definição 7 e , também, com auxílio do *CAS Maple* pode-se observar que os termos com índice primo são fatoráveis diferentemente do que acontece com o MF. Veja:

$$L_3(x,y) = x^3 + 3xy$$
$$L_5(x,y) = x^5 + 5x^3y + 5xy^2$$
$$L_7(x,y) = x^7 + 7x^5y + 14x^3y^2 + 7xy^3$$
$$L_{11}(x,y) = x^{11} + 11x^9y + 44x^7y^2 + 77x^5y^3 + 55x^3y^4 + 11xy^5$$
$$\vdots$$
$$L_{17}(x,y) = x^{17} + 17x^{15}y + 119x^{13}y^2 + 442x^{11}y^3 + 935x^9y^4 + 1122x^7y^5 + 714x^5y^6 + 204x^3y^7 + 17xy^8$$
$$L_{19}(x,y) = x^{19} + 19x^{17}y + 152x^{15}y^2 + 665x^{13}y^3 + 1729x^{11}y^4 + 2717x^9y^5 + 2508x^7y^6 + 1254x^5y^7 + 285x^3y^8 + 19xy^9$$
$$\vdots$$

Numa abordagem matricial da sequência polinomial bivariada de Lucas, Catalani (2004) define as seguintes matrizes: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x^2 + 2y & x \\ xy & 2y \end{pmatrix}$. Desse modo, por um processo indutivo, pode-se verificar $BA^n = \begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ y \cdot L_{n+1} & y \cdot L_n \end{pmatrix}$. Veja:

$$BA = \begin{pmatrix} x^3 + 3xy & x^2 + 2y \\ y \cdot (x^2 + 2y) & y \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3(x,y) & L_2(x,y) \\ y \cdot L_2(x,y) & y \cdot L_1(x,y) \end{pmatrix}$$
$$BA^2 = \begin{pmatrix} x^4 + 4x^2y + 2y^2 & x^3 + 3xy \\ y \cdot (x^3 + 3xy) & y \cdot (x^2 + 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_4(x,y) & L_3(x,y) \\ y \cdot L_3(x,y) & y \cdot L_2(x,y) \end{pmatrix}$$
$$BA^3 = \begin{pmatrix} x^5 + 5x^3y + 5xy^2 & x^4 + 4x^2y + 2y^2 \\ y \cdot (x^4 + 4x^2y + 2y^2) & y \cdot (x^3 + 3xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_5(x,y) & L_4(x,y) \\ y \cdot L_4(x,y) & y \cdot L_3(x,y) \end{pmatrix}$$
$$BA^4 = \begin{pmatrix} x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3 & x^5 + 5x^3y + 5xy^2 \\ y \cdot (x^5 + 5x^3y + 5xy^2) & y \cdot (x^4 + 4x^2y + 2y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_6(x,y) & L_5(x,y) \\ y \cdot L_5(x,y) & y \cdot L_4(x,y) \end{pmatrix}$$
$$BA^5 = \begin{pmatrix} x^7 + 7x^5y + 14x^3y^2 + 7xy^3 & x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3 \\ y \cdot (x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3) & y \cdot (x^5 + 5x^3y + 5xy^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_7(x,y) & L_6(x,y) \\ y \cdot L_6(x,y) & y \cdot L_5(x,y) \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$BA^n = \begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ y \cdot L_{n+1} & y \cdot L_n \end{pmatrix}.$$

Figura 6 – Produtos matriciais visualizados no *CAS Maple*.



Fonte: Alves & Catarino (2016).

Vale comentar que esses cálculos matriciais, também, foram verificados no *CAS Maple* (Figura 6) e, através de um raciocínio indutivo, pode-se determinar o termo geral. No caso dos polinômios bivariados de Lucas, esse *software* permite escrever a decomposição de seus termos polinomiais em fatores irredutíveis sobre o anel $\mathbb{Z}[x,y]$. Além do mais, baseando-se nas matrizes propostas por Asci & Gurel (2012), são definidas, para $n \geq 1$, as seguintes matrizes:

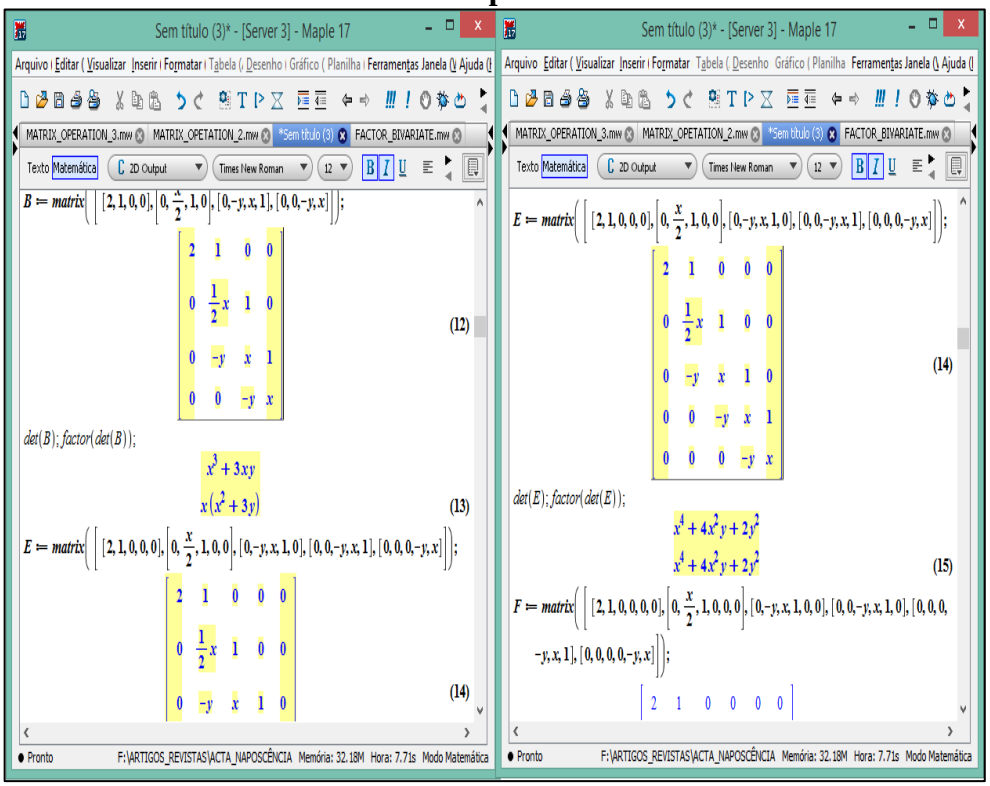
$$D'_n(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & x \end{pmatrix} \qquad H'_n(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & x \end{pmatrix}$$

À vista disso, as matrizes acima permitem verificar que valem as relações $\det(D'_n(x,y)) = F_n(x,y)$ e $\det(H'_n(x,y)) = L_{n-1}(x,y)$ ambas para $n \geq 0$. Assim, foram considerados os termos polinomiais bivariados das sequências generalizadas de Fibonacci e Lucas. Veja:

$$\det(D'_1(x,y)) = 1 = F_1(x,y) \qquad \det(H'_1(x,y)) = 2 = L_0(x,y)$$
$$\det(D'_2(x,y)) = x = F_2(x,y) \qquad \det(H'_2(x,y)) = x = L_1(x,y)$$
$$\det(D'_3(x,y)) = x^2 + y = F_3(x,y) \qquad \det(H'_3(x,y)) = x^2 + 2y = L_2(x,y)$$
$$\det(D'_4(x,y)) = x^3 + 2xy = F_4(x,y) \qquad \det(H'_4(x,y)) = x^3 + 3xy = L_3(x,y)$$
$$\det(D'_5(x,y)) = x^4 + 3x^2y + y^2 = F_5(x,y) \qquad \det(H'_5(x,y)) = x^4 + 4x^2y + 2y^2 = L_4(x,y)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\det(D'_n(x,y)) = F_n(x,y) \qquad \det(H'_n(x,y)) = L_{n-1}(x,y)$$
$$\det(D'_{n+1}(x,y)) = F_{n+1}(x,y) \qquad \det(H'_{n+1}(x,y)) = L_n(x,y)$$

Nesse sentido, pode-se escrever: $\det(H'_4(x,y)) = L_3(x,y) = x^3 + 3xy = x(x^2+3y) = L_1(x,y)(x^2+3y)$ e $\det(H'_5(x,y)) = L_4(x,y) = x^4 + 4x^2y + 2y^2$ (Figura 7). Dessa forma, pode-se ver que $L_4(x,y)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}[x,y]$ quando se determina que $L_3(x,y) = L_1(x,y)(x^2+3y)$. Outro caso de irredutibilidade sobre $\mathbb{Z}[x,y]$ pode ser visto, quando se avalia $\det(H'_9(x,y)) = L_8(x,y) = x^8 + 8x^6y +$ $+20x^4y^2 + 16x^2y^3 + 2y^4$ e, também é possível ver que $\det(H'_{13}(x,y)) = L_{12}(x,y) = x^{12} + 12x^{10}y +$ $+54x^8y^2 + 112x^6y^3 + 105x^4y^4 + 36x^2y^5 + 2y^6 = (x^4 + 4x^2y + 2y^2)(x^8 + 8x^6y + 20x^4y^2 + 16x^2y^3 + y^4) =$ $= L_4(x,y) \cdot L_8(x,y)$ é fatorável. Isso pode ser visualizado no *CAS Maple* (Figura 8).

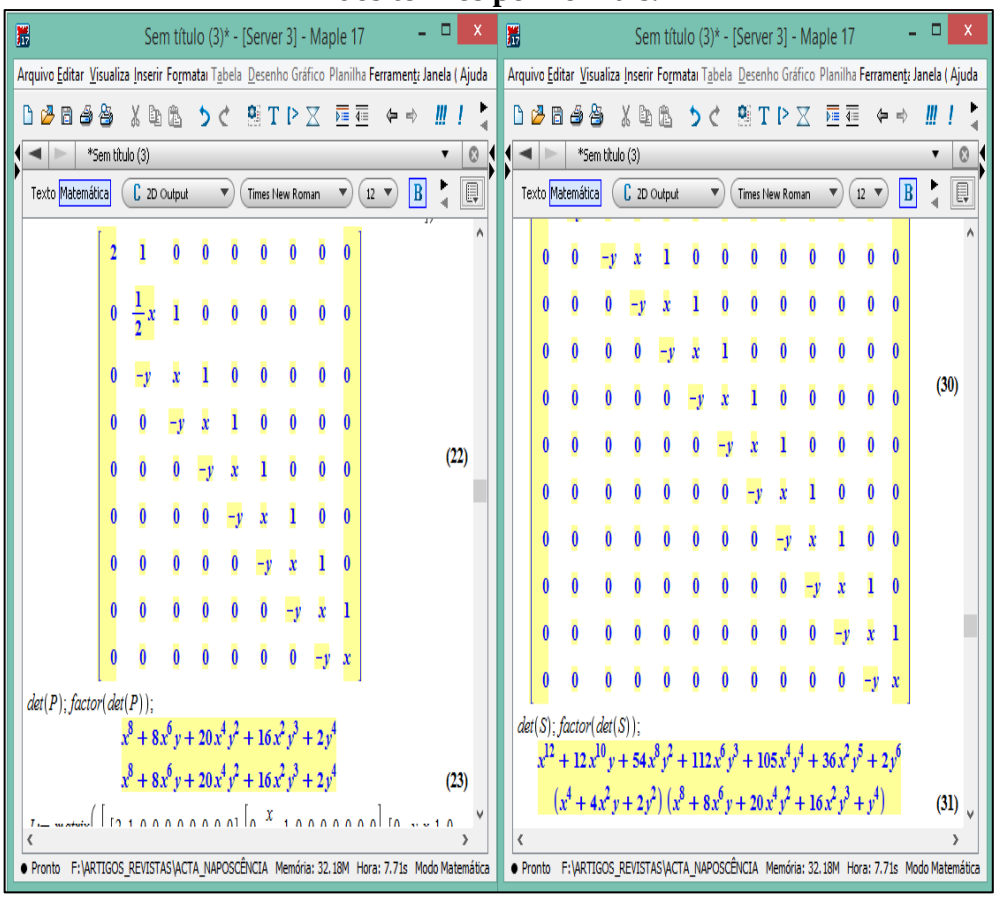
Figura 7 – 1º caso de visualização no *CAS Maple:* decomposição em fatores irredutíveis dos termos polinomiais.



Fonte: Alves & Catarino (2016).

Além do mais, quando se avalia $L_{12}(x,y)$, pode-se observar que, embora $2|12$, $L_{12}(x,y)$ não é divisível por $L_2(x,y)$, tendo em vista que $L_4(x,y)$ e $L_8(x,y)$ são irredutíveis sobre $\mathbb{Z}[x,y]$. E, considerando o conjunto $\{1,2,3,4,6,12\}$ de divisores de 12, apenas $L_4(x,y)\,|\,L_{12}(x,y)$ e, também, 12 também não é divisível por 8. Ademais, pode-se observar que $L_1(x,y)\,|\,L_3(x,y)$ e $L_3(x,y)$ não é divisível por $L_2(x,y)$. Assim, seja $\{1,2,4,8\}$ o conjunto de divisores de 8 e como $L_8(x,y)$ é irredutível, logo, ele não divisível por $L_1(x,y)$, $L_2(x,y)$ e $L_4(x,y)$.

Figura 8 – 2º caso de visualização no *CAS Maple:* decomposição em fatores irredutíveis dos termos polinomiais.



Fonte: Alves & Catarino (2016).

Com isso, pode-se concluir que a propriedade do MF correspondente à $F_m(x,y)\,|\,F_n(x,y) \Leftrightarrow m\,|\,n$ para $m \geq 2$ não é valida para a sequência polinomial bivariada de Lucas. Isso pode ser verificado através da decomposição dos polinômios com auxílio do *software CAS Maple* quando se utiliza o comando *factor [ ]*. A seguir, tem-se a decomposição de outros termos dos polinômios bivariados de Lucas que são redutíveis sobre o anel $\mathbb{Z}[x,y]$.

$$\vdots$$

$$\det(H_{15}(x,y)) = L_{14}(x,y) = x^{14} + 14x^{12}y + 77x^{10}y^2 + 210x^8y^3 + 294x^6y^4 + 196x^4y^5 + 49x^2y^6 + 2y^7 =$$
$$= (x^2 + 2y)(x^{12} + 12x^{10}y + 53x^8y^2 + 104x^6y^3 + 86x^4y^4 + 24x^2y^5 + y^6) = L_2(x,y)(x^{12} + 12x^{10}y + 53x^8y^2$$
$$+104x^6y^3 + 86x^4y^4 + 24x^2y^5 + y^6)$$

$$\det(H_{16}(x,y)) = L_{15}(x,y) = x^{15} + 15x^{13}y + 90x^{11}y^2 + 275x^9y^3 + 450x^7y^4 + 378x^5y^5 + 140x^3y^6 + 15xy^7$$
$$= x(x^2 + 3y)(x^4 + 5x^2y + 5y^2)(x^8 + 7x^6y + 14x^4y^2 + 8x^2y^3 + y^4) = L_1(x,y)(x^2 + 3y)(x^4 + 5x^2y + 5y^2)$$
$$(x^8 + 7x^6y + 14x^4y^2 + 8x^2y^3 + y^4)$$

$$\vdots$$

$$\det(H_{19}(x,y)) = L_{18}(x,y) = x^{18} + 18x^{16}y + 135x^{14}y^2 + 546x^{12}y^3 + 1287x^{10}y^4 + 1782x^8y^5 + 1386x^6y^6 +$$
$$+540x^4y^7 + 81x^2y^8 + 2y^9 = (x^2 + 2y)(x^4 + 4x^2y + y^2)(x^{12} + 12x^{10}y + 54x^8y^2 + 112x^6y^3 + 105x^4y^4 +$$
$$+36x^2y^5 + y^6) = L_2(x,y)(x^4 + 4x^2y + y^2)(x^{12} + 12x^{10}y + 54x^8y^2 + 112x^6y^3 + 105x^4y^4 + 36x^2y^5 + y^6)$$

$$\vdots$$

Tabela 3 – Propriedades oriundas dos modelos de Fibonacci e Lucas.

Propriedades aritméticas	**Modelo de Fibonacci**	**Modelo de Lucas**
Para $k,n \in IN$, com k ímpar, então, $f_n \setminus f_{k\cdot n}$ e $L_n \setminus L_{k\cdot n}$.	$F_m(x,y) \setminus F_n(x,y) \Leftrightarrow m \setminus n$ (Web & Parberry, 1969)	A propriedade correspondente não é verdadeira. Veja: $L_4(x,y) = x^4 + 4x^2y + 2y^2$ e $L_{16}(x,y)$ são irredutíveis. $L_{19}(x,y)$ é redutível sobre $\mathbb{Z}[x,y]$.
Para $k,n \in IN$, então, $f_n \setminus f_{k\cdot n}$ e $L_n \setminus L_{k\cdot n}$.	$F_m(x,y) \setminus F_n(x,y) \Leftrightarrow m \setminus n$ (Web & Parberry, 1969). $F_n^{\,2} \setminus F_{n\cdot m} \Leftrightarrow F_n \setminus m$ (Matijasevi˘c, 1970)	A propriedade correspondente não é verdadeira. Veja: $L_{12}(x,y) = L_4(x,y) \cdot L_8(x,y)$.
Para $m,n \in IN$ e para $d = MDC(m,n)$, então, $MDC(f_m, f_n) = f_d$. (E. Lucas, 1876).	$MDC(\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})) = F_{MDC(m,n)}(x,y)$	A propriedade correspondente não é verdadeira. Veja: $MDC(\mathrm{L}_m(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{L}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})) \neq L_{MDC(m,n)}(x,y)$ $MDC(\mathrm{L}_{12}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{L}_6(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1 \neq \mathrm{L}_6(\mathrm{x},\mathrm{y})$ (PBL)
Para $m,n \in IN$ e para $d = MDC(m,n)$. Se os números $\frac{m}{d}, \frac{n}{d}$ são ambos ímpares, então $MDC(L_m, L_n) = L_d$.	$MDC(\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})) = F_{MDC(m,n)}(x,y)$ com a unidade imaginária $i^2 = -1$ (PBCF)	A propriedade correspondente não é verdadeira. Veja: $MDC(\mathrm{L}_m(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{L}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})) \neq L_{MDC(m,n)}(x,y)$ e $L_8(x,y) = x^8 - 8x^6y + 20x^4y^2 - 16x^2y^3 + 2y^4$ é redutível. $MDC(\mathrm{L}_8(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{L}_4(\mathrm{x},\mathrm{y})) \neq L_4(x,y)$ (PBCL)
$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$	$F_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ com a unidade imaginária	$L_n(x,y) = \alpha^n(x,y) + \beta^n(x,y)$ com a unidade imaginária $i^2 = -1$. (PBCL)

	$i^2 = -1$.	
$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$	$F_n(\mathrm{a},\mathrm{z}) = \frac{\alpha^n(\mathrm{a},\mathrm{z}) - \beta^n(\mathrm{a},\mathrm{z})}{\alpha(\mathrm{a},\mathrm{z}) - \beta(\mathrm{a},\mathrm{z})}$ onde *z* é uma variável complexa. (Tasköprü & Altintas, 2015)	$L_n(\mathrm{a},\mathrm{z}) = \alpha^n(\mathrm{a},\mathrm{z}) + \beta^n(\mathrm{a},\mathrm{z})$ onde *z* é uma variável complexa (Tasköprü & Altintas, 2015)
f_p ou L_p, onde $p \in IN$ e é primo: $f_{19} = 113 \cdot 37$ (Web & Parberry, 1969).	$F_p(x,y)$ para *p* primo. Então, $F_p(x,y)$ é irredutível sobre o anel $\mathbb{Z}[x,y]$. (Hoggatt & Long, 1974) Conjectura: $F_p(\mathrm{z})$ é irredutível sobre o anel $\mathbb{C}[x,y]$	A propriedade correspondente não é verdadeira. Veja $L_1(x,y) \setminus L_{13}(x,y)$ $L_1(x,y) \setminus L_{19}(x,y)$ $L_{12}(x,y)$ não é divisível por $L_2(x,y)$ e $L_3(x,y)$.

Fonte: Alves & Catarino (2016), tradução da autora.

Finalmente, pode-se compreender que apesar dos modelos de Fibonacci e Lucas possuírem definições e relações recorrentes semelhantes, pode-se observar que existem teoremas e propriedades de divisibilidade que não são válidas concomitantemente para os dois modelos. Isso fica explícito na Tabela 3. Vale acentuar que, nesta seção, foram discutidas representações polinomiais bivariadas, contudo, sem a presença da unidade imaginária *i*. Nesse viés, a seguir, serão discutidos os polinômios bivariados e complexos para o modelo de Fibonacci.

3.2.1 Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF)

A classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF), com ênfase nas propriedades de divisibilidade referentes ao Máximo Divisor Comum (MDC), apresenta um padrão algébrico mantido no anel $\mathbb{C}[x,y]$ durante o desenvolvimento das relações obtidas quando se insere a unidade imaginária *i* com $i^2 = -1$. Nesse sentido, de acordo com os trabalhos de Alves & Catarino (2016; 2017), os Teoremas 7 e 9 valem para os Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF). Além disso, os Teoremas 8, 10 e o Lema 3 também valem para os PBCF desde que $MDC(x,y) = 1$. Logo, os PBCF possuem demonstrações análogas às dos PBF.

Iakin (1977), King (1968), Scott (1968) e Waddill & Sacks (1967) investigaram a complexificação do modelo de Fibonacci através da inserção da componente imaginária *i*. Além do mais, Asci & Gurel (2012) discutem as representações polinomiais bivariadas e

complexas das sequências de Fibonacci e Lucas. Nesse contexto, com ênfase no MF, vale a compreensão da função geradora e equação característica para os PBCF, tal que:

$$\begin{cases} g(t) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot t^n = F_0 \cdot t^0 + F_1 \cdot t^1 + F_2 \cdot t^2 + \cdots + F_n \cdot t^n + \cdots \\ ixt \cdot g(t) \coloneqq ix \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot t^{n+1} = ix \cdot F_0 \, t + ix \cdot F_1 \cdot t^2 + \cdots + ix \cdot F_{n-1} \cdot t^n + ix \cdot F_n \cdot t^{n+1} + \cdots \\ yt^2 \cdot g(t) \coloneqq y. \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot t^{n+2} = y.F_0 \cdot t^2 + y.F_1 \cdot t^3 + \cdots + y.F_{n-1} t^{n+1} + yF_n \cdot t^{n+2} + \cdots \end{cases}$$

Assim, aplicando a definição $F_{n+1}(x,y) = ix \cdot F_n(x,y) + y \cdot F_{n-1}(x,y)$ e fazendo $g(t) - (ixt).g(t) - (yt^2).g(t) = F_0(x,y) + F_1(x,y).t - ix.F_0(x,y).t + 0 = t$, encontra-se a função geradora $g(t) = \dfrac{t}{1 - ixt - yt^2}$. Além disso, quando se assume $t_{n+1}(x,y) = \dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)} = t$, tem-se a equação característica $t^2 - ixt - y = 0$. Note que, com base nas Definições 8 e 9, é possível determinar os termos polinomiais das sequências de Fibonacci e Lucas respectivamente:

$$\begin{aligned} F_0(x,y) &= 0 & L_0(x,y) &= 2 \\ F_1(x,y) &= 1 & L_1(x,y) &= ix \\ F_2(x,y) &= ix & L_2(x,y) &= -x^2 + 2y \\ F_3(x,y) &= -x^2 + y & L_3(x,y) &= -ix^3 + 3ixy \\ F_4(x,y) &= -ix^3 + 2ixy & L_4(x,y) &= x^4 - 4x^2y + 2y^2 \\ F_5(x,y) &= x^4 - 3x^2y + y^2 & L_5(x,y) &= ix^5 - 5ix^3y + 5ixy^2 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

À vista disso, *a priori*, serão discutidos alguns teoremas e propriedades referentes às sequências de Fibonacci e Lucas. Todavia, será dada ênfase aos PBCF. Nesse sentido, é relevante que sejam consideradas as matrizes, a seguir, propostas por Asci & Gurel (2012) e definidas, para $n \geq 1$. Veja:

$$D_n(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ix & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{pmatrix} \qquad H_n(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{ix}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{pmatrix}$$

As matrizes acima permitem verificar a veracidade das relações $\det(D_n(x,y)) = F_n(x,y)$ e $\det(H_n(x,y)) = L_{n-1}(x,y)$ ambas para $n \geq 0$. Destarte, foram considerados os termos polinomiais bivariados e complexos das sequências generalizadas de Fibonacci e Lucas. Veja:

$$\begin{array}{ll}
\det(D_1(x,y)) = 1 = F_1(x,y) & \det(H_1(x,y)) = 2 = L_0(x,y) \\
\det(D_2(x,y)) = ix = F_2(x,y) & \det(H_2(x,y)) = ix = L_1(x,y) \\
\det(D_3(x,y)) = -x^2 + y = F_3(x,y) & \det(H_3(x,y)) = -x^2 + 2y = L_2(x,y) \\
\det(D_4(x,y)) = -ix^3 + 2ixy = F_4(x,y) & \det(H_4(x,y)) = -ix^3 + 3ixy = L_3(x,y) \\
\det(D_5(x,y)) = x^4 - 3x^2y + y^2 = F_5(x,y) & \det(H_5(x,y)) = x^4 - 4x^2y + 2y^2 = L_4(x,y) \\
\vdots & \vdots \\
\det(D_n(x,y)) = F_n(x,y) & \det(H_n(x,y)) = L_{n-1}(x,y) \\
\det(D_{n+1}(x,y)) = F_{n+1}(x,y) & \det(H_{n+1}(x,y)) = L_n(x,y)
\end{array}$$

Teorema 12: Seja a matriz complexa $D_n(x,y)$ com $n \geq 1$, de ordem $n \times n$ e $D_0(x,y) = 0$, então, para $n \geq 0$, vale que (ALVES & CATARINO, 2017):

$$\det(D_n(x,y)) = F_n(x,y).$$

Demonstração: Por indução sobre *n*, sabe-se que, para $n = 1$ e $n = 2$, tem-se respectivamente que $\det(D_1(x,y)) = 1 = F_1(x,y)$ e $\det(D_2(x,y)) = ix = F_2(x,y)$, dessa forma, supõe-se que $\det(D_{n-1}(x,y)) = F_{n-1}(x,y)$, e $\det(D_{n-2}(x,y)) = F_{n-2}(x,y)$ sejam válidas, assim:

$$\begin{gathered}
\det(D_n(x,y)) = ix.\det(D_{n-1}(x,y)) + y.\det(D_{n-2}(x,y)) = \\
= ix.F_{n-1}(x,y) + y.F_{n-2}(x,y) = \\
F_n(x,y).
\end{gathered}$$

■

Teorema 13: Para $n > 0$, tem-se que (ALVES & CATARINO, 2016):

$$\begin{cases}
F_n(x,y) = \dfrac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \\
L_n(x,y) = \alpha^n(x,y) + \beta^n(x,y)
\end{cases}.$$

Demonstração: Considerando a equação característica $t^2 - ix \cdot t - y = 0$, têm-se as seguintes

relações: $\alpha(x,y)=\frac{ix+\sqrt{4y-x^2}}{2}$, $\beta(x,y)=\frac{ix-\sqrt{4y-x^2}}{2}$, e $\alpha(x,y)\cdot\beta(x,y)=-y$. Assim, recorrendo à Definição 8 e por indução sobre *n*, pode-se avaliar que:

$$F_{n+1}(x,y)=ix\cdot F_n(x,y)+y\cdot F_{n-1}(x,y)=$$
$$=ix\frac{\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}+y\cdot\frac{\alpha^{n-1}(x,y)-\beta^{n-1}(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=$$
$$=ix\frac{\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}+y\cdot\frac{\frac{\alpha^n(x,y)}{\alpha(x,y)}-\frac{\beta^n(x,y)}{\beta(x,y)}}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=$$
$$=ix\frac{\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}+y\cdot\frac{\alpha^n(x,y)\beta(x,y)-\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{(-y)(\alpha(x,y)-\beta(x,y))}=$$
$$=\frac{ix\cdot\alpha^n(x,y)-ix\cdot\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)+\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=$$
$$=\frac{ix\cdot\alpha(x,y)\cdot\alpha^{n-1}(x,y)-ix\cdot\beta(x,y)\cdot\beta^{n-1}(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)+\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=$$
$$=\frac{\alpha(x,y)^{n+1}-\beta(x,y)^{n+1}}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}.$$

Antes disso, pode-se ver $F_1(x,y)=\frac{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=1$ e $F_2(x,y)=\frac{\alpha^2(x,y)-\beta^2(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=ix$.

E, de modo análogo, sabendo que $L_1(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)=ix$, $L_2(x,y)=\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)=-x^2+2y$ e aplicando a Definição 9, pode-se escrever:

$$L_{n+1}(x,y)=ix\cdot L_n(x,y)+y\cdot L_{n-1}(x,y)=$$
$$=ix\left(\alpha^n(x,y)+\beta^n(x,y)\right)+y\cdot\left(\alpha^{n-1}(x,y)+\beta^{n-1}(x,y)\right)=$$
$$=ix\left(\alpha^n(x,y)+\beta^n(x,y)\right)+y\cdot\left(\frac{\alpha^n(x,y)}{\alpha(x,y)}+\frac{\beta^n(x,y)}{\beta(x,y)}\right)=$$
$$=ix\alpha^n(x,y)+ix\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)-\alpha(x,y)\beta^n(x,y)=$$
$$=\alpha^2(x,y)\alpha^{n-1}(x,y)-y\alpha^{n-1}(x,y)+\beta^2(x,y)\beta^{n-1}(x,y)-y\beta^{n-1}(x,y)+y\alpha^{n-1}(x,y)+y\beta^{n-1}(x,y)=$$
$$=\alpha(x,y)^{n+1}+\beta(x,y)^{n+1}.$$

■

Corolário 3: As raízes da equação característica $t^2-ix\cdot t-y=0$ admitem as seguintes propriedades (ALVES & CATARINO, 2016):

$$\begin{cases} F_n(x,y) = \dfrac{2.\alpha^{\,n}(x,y) - L_n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \\ F_n(x,y) = \dfrac{L_n(x,y) - 2.\beta^{\,n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \end{cases}.$$

Demonstração: Já foi visto que as equações do sistema $\begin{cases} F_n(x,y) = \dfrac{\alpha^{\,n}(x,y) - \beta^{\,n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \\ L_n(x,y) = \alpha^{\,n}(x,y) + \beta^{\,n}(x,y) \end{cases}$ .são válidas. Dessa forma, ao resolver esse sistema, encontram-se as seguintes relações: $F_n(x,y) = \dfrac{2.\alpha^{\,n}(x,y) - L_n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ e $F_n(x,y) = \dfrac{L_n(x,y) - 2.\beta^{\,n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$.

■

Corolário 4: Para $n > 0$, vale (ALVES & CATARINO, 2016):

$$F_{2n}(x,y) = F_n(x,y) \cdot \mathrm{L}_n(x,y).$$

Demonstração: Pelo último teorema, pode-se escrever que $F_{2n}(x,y) = \dfrac{\alpha^{\,2n}(x,y) - \beta^{\,2n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$. E, pelo corolário anterior, são obtidas as igualdades: $\alpha^{\,n}(x,y) = \dfrac{F_n(x,y)\big(\alpha(x,y) - \beta(x,y)\big) + L_n(x,y)}{2}$ e $\beta^{\,n}(x,y) = \dfrac{L_n(x,y) - F_n(x,y)\big(\alpha(x,y) - \beta(x,y)\big)}{2}$. Desse modo, segue que:

$$F_{2n}(x,y) = \frac{\alpha^{\,n}(x,y)\alpha^{\,n}(x,y) - \beta^{\,n}(x,y)\beta^{\,n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \cdot \left[\left(\frac{F_n(x,y)\big(\alpha(x,y) - \beta(x,y)\big) + L_n(x,y)}{2} \right)^2 - \left(\frac{L_n(x,y) - F_n(x,y)\big(\alpha(x,y) - \beta(x,y)\big)}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} \cdot \left(\frac{4F_n(x,y)L_n(x,y)\big(\alpha(x,y) - \beta(x,y)\big)}{4} \right) =$$

$$= F_n(x,y)L_n(x,y).$$

■

Teorema 14: Para $n \geq 1$, vale (ALVES & CATARINO, 2017):

$$F_{-n}(x,y)=\frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}.$$

Demonstração: Avaliando a relação $F_{-n+1}(x,y)=ix.F_{-n}(x,y)+y.F_{-n-1}(x,y)$ para casos particulares como $n=0$, $n=1$ $n=2$ e $n=3$, são obtidas as igualdades abaixo, as quais direcionam um raciocínio indutivo para determinação de $F_{-n}(x,y)=\frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}$.

$$n=0: F_1(x,y)=ix.F_0(x,y)+y.F_{-1}(x,y)\Rightarrow F_{-1}(x,y)=\frac{-F_1(x,y)}{(-y)^1}$$

$$n=1: F_0(x,y)=ix.F_{-1}(x,y)+y.F_{-2}(x,y)\Rightarrow F_{-2}(x,y)=\frac{-F_2(x,y)}{(-y)^2}$$

$$n=2: F_{-1}(x,y)=ix.F_{-2}(x,y)+y.F_{-3}(x,y)\Rightarrow F_{-3}(x,y)=\frac{-F_3(x,y)}{(-y)^3}$$

$$n=3: F_{-2}(x,y)=ix.F_{-3}(x,y)+y.F_{-4}(x,y)\Rightarrow F_{-4}(x,y)=\frac{-F_4(x,y)}{(-y)^4}$$

$$\vdots$$

$$F_{-n}(x,y)=\frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}.$$

E, assumindo $F_{-n-1}(x,y)=F_{-(n+1)}(x,y)=\frac{-F_{n+1}(x,y)}{(-y)^{n+1}}$ e $F_{-n-2}(x,y)=F_{-(n+2)}(x,y)=\frac{-F_{n+2}(x,y)}{(-y)^{n+2}}$,

obtém-se a relação $F_{-n}(x,y)=ix.F_{-n-1}(x,y)+y.F_{-n-2}(x,y)\Rightarrow F_{-n}(x,y)=\frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}$. Além do mais, sabendo que o MF admite a extensão da sua sequência generalizada para índices inteiros e pela Fórmula variante de Binet determinada, anteriormente, para os PBCF, pode-se validar que:

$$F_{-n}(x,y)=\frac{\alpha^{-n}(x,y)-\beta^{-n}(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=$$

$$=\frac{1}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}\left(\frac{1}{\alpha^n(x,y)}-\frac{1}{\beta^n(x,y)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}\left(\frac{\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)}{\alpha^n(x,y)\beta^n(x,y)}\right)=$$

$$=\frac{-1}{(\alpha(x,y)\beta(x,y))^n}\left(\frac{\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}\right)=$$

$$= \frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}.$$

■

Teorema 15: Para $n \geq 1$, vale que (ALVES & CATARINO, 2017):

$$Q_1^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & y.F_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Por indução sobre *n*, segue que:

$$Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_2(x,y) & y.F_1(x,y) \\ F_1(x,y) & yF_0(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1^2(x,y) = Q_1(x,y)Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_3(x,y) & y.F_2(x,y) \\ F_2(x,y) & yF_1(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Q_1^3(x,y) = Q_1^2(x,y)Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_4(x,y) & y.F_3(x,y) \\ F_3(x,y) & yF_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Q_1^4(x,y) = Q_1^3(x,y)Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_5(x,y) & y.F_4(x,y) \\ F_4(x,y) & yF_3(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$Q_1^{n+1}(x,y) = Q_1^n(x,y)Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+2}(x,y) & y.F_{n+1}(x,y) \\ F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 16: (Identidade de Cassini) Para $n \geq 1$, vale que (ALVES & CATARINO, 2017):

$$F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y) - F_n^2(x,y) = (-1)^n y^{n-1}.$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, tem-se a matriz $Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, isso implica que $\det(Q_1^n(x,y)) = \underbrace{\det(Q_1(x,y)) \cdot \ldots \cdot \det(Q_1(x,y))}_{n \text{ fatores}} = (-y)^n$. Por outro lado, pode-se determinar que $Q_1^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & y.F_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Q_1^n(x,y)) = y\left(F_{n+1}(x,y)F_{n-1}(x,y) - F_n^2(x,y)\right)$. E, fazendo $\det(Q_1^n(x,y)) = y\left(F_{n+1}(x,y)F_{n-1}(x,y) - F_n^2(x,y)\right) = (-y)^n$, tem-se: $F_{n+1}(x,y)F_{n-1}(x,y) - F_n^2(x,y) = (-1)^n y^{n-1}$.

■

Teorema 17: Para $n \geq 1$, vale que (ALVES & CATARINO, 2017):

$$Q_1^{-n}(x,y) = \begin{pmatrix} F_{-n+1}(x,y) & y.F_{-n}(x,y) \\ F_{-n}(x,y) & yF_{-n-1}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Supondo que a matriz $Q_1^n(x,y)$ admite a inversa $Q_1^{-n}(x,y) = \left(Q_1^n(x,y)\right)^{-1}$, será aplicada a relação $Q_1^n(x,y).Q_1^{-n}(x,y) = I_2$ para encontrá-la. Desse modo, seja $Q_1^{-n}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tem-se a seguinte igualdade matricial: $\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & y.F_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E, resolvendo essa equação encontra-se que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-F_{n-1}(x,y)}{(-y)^{n-1}} & y \cdot \dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n} \\ \dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n} & y \cdot \dfrac{-F_{n+1}(x,y)}{(-y)^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-n+1}(x,y) & y.F_{-n}(x,y) \\ F_{-n}(x,y) & yF_{-n-1}(x,y) \end{pmatrix} = Q_1^{-n}(x,y).$$

E, de fato, pode-se verificar que $Q_1^n(x,y).Q_1^{-n}(x,y) = I_2$. Logo, obtém-se uma representação para índices inteiros da matriz $Q_1^n(x,y)$.

■

Por fim, neste tópico, foram discutidas relações inerentes à classe dos PBCF. Nesse sentido, foi visto que existe uma relação algébrica entre as sequências de Fibonacci e Lucas, quando se considera suas representações polinomiais bivariadas e complexas, que oportuniza a gênese de teoremas e propriedades relevantes para o processo evolutivo dos dois modelos. Nesse viés, prosseguindo na investigação da complexificação do MF, a seguir, as variáveis serão consideradas complexas.

3.3 O Modelo de Fibonacci na Variável Complexa

Na seção anterior, observa-se uma generalização do MF com ênfase nas suas representações polinomiais. Nesse sentido, prosseguindo na investigação do processo de complexificação da SF e partindo da noção de PBF, as formas polinomiais serão tratadas na

variável complexa. Desse modo, serão exploradas três identidades clássicas; de Cassini, d'Ocagne e Catalan; e a Fórmula de Ross Honsberger. Assim, primeiramente, serão feitas uma abordagem polinomial com duas variáveis, em seguida, a extensão para índices inteiros e, finalmente, a discussão do caso particular para representações com apenas uma variável.

A identidade $f_{n+1}f_{n-1} - f_n \cdot f_n = (-1)^n$, para $n \geq 0$, foi descoberta pelo matemático italiano Giovani Domenico Cassini (1625 – 1712) e trabalhada, em 1753, pelo matemático escocês Robert Simson (1687 – 1768). A segunda identidade $f_n f_n - f_{n+r} f_{n-r} = (-1)^{n-r} f_r^2$, com $m \geq n \geq 1$, foi concebida, em 1879, pelo matemático belga Eugène Charles Catalan (1814 – 1894). Além do mais, tem-se a identidade $f_{m+1} f_n - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m}$, para $m \geq n \geq 1$, deduzida pelo matemático francês Philbert Maurice d'Ocagne (1862 – 1938). E, por fim, a Fórmula de Ross Honsberger (1929 – 2016), $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$ com $m \geq n \geq 0$, criada por Honsberger (1985) e estudada por Koshy (2007).

À vista disso, vale destacar que o Lema 4 e os Teoremas 18 e 19 foram discutidos por Taskoprü & Altintas (2015) e Alves & Oliveira (2017). Dessa forma, serão discutidas algumas definições, lemas e teoremas que envolvem a noção de função geradora discutida por Iakin (1977), equação característica, Fórmula de Binet, dentre outras relações oriundas do MF. Ademais, conforme os artigos de Taskoprü & Altintas (2015) e Alves & Oliveira (2017), podem ser enunciadas as seguintes definições:

Definição 10: A Sequência Generalizada Polinomial (SGP) $\{F_n(a,z)\}_{n=0}^{\infty}$, nas variáveis a e z, é definida pela seguinte recursividade de segunda ordem (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_n(a,z) = a \cdot z \cdot F_{n-1}(a,z) + a^2 \cdot F_{n-2}(a,z) \text{ com } F_0(a,z) = 0,\ F_1(a,z) = 1 \text{ e } n \geq 2.$$

Definição 11: A Sequência Polinomial de Fibonacci (SPF), na variável z, para $a = 1$, é definida pela seguinte relação recorrente (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$f_n(z) = z \cdot f_{n-1}(z) + f_{n-2}(z) \text{ com } f_0(z) = 0,\ f_1(z) = 1 \text{ e } n \geq 2.$$

Lema 4: Para $n \geq 1$, vale (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_n(a,z) = a^{n-1} \cdot f_n(z).$$

Demonstração: Sejam $F_1(a,z)=1=a^0\cdot 1=\mathrm{a}^{1-1}\cdot f_1(z)$ e $F_2(a,z)=az=a^{2-1}\cdot z=a^{2-1}\cdot f_2(z)$, e aplicando as Definições 10 e 11, por indução matemática sobre *n* e, assim, assumindo que $F_{n-1}(a,z)=a^{n-2}\cdot f_{n-1}(z)$ e $F_{n-2}(a,z)=a^{n-3}\cdot f_{n-2}(z)$ são válidas, segue que:

$$\begin{aligned} F_n(a,z) &= a\cdot \mathrm{z}\cdot F_{n-1}(a,z)+a^2\cdot F_{n-2}(a,z)= \\ &= a\cdot \mathrm{z}\cdot a^{n-2}\cdot f_{n-1}(z)+a^2\cdot a^{n-3}\cdot f_{n-2}(z)\ = \\ &= a^{n-1}(z\cdot f_{n-1}(z)+f_{n-2}(z))= \\ &= a^{n-1}\cdot f_n(z). \end{aligned}$$

■

Teorema 18: A função geradora da SGP é (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$g_F(t)=\frac{t}{1-az\cdot t-a^2\cdot t^2}\cdot$$

Demonstração: Aplicando a relação de recorrência $F_n(a,z)-a\cdot \mathrm{z}\cdot F_{n-1}(a,z)-a^2\cdot F_{n-2}(a,z)=0$ e considerando a soma formal $g_F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(a,z)\cdot t^n$ para $t\in\mathbb{R}$, pode-se considerar as seguintes operações:

$$\begin{cases} g(t)\coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}F_n(a,z)\cdot t^n=F_0(a,z)\cdot t^0+F_1(a,z)\cdot t^1+F_2(a,z)\cdot t^2+\cdots+F_n\cdot(a,z)t^n+\cdots \\ azt\cdot g(t)\coloneqq az\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_n(a,z)\cdot t^{n+1}=az\cdot F_0(a,z)\,\mathrm{t}+az\cdot F_1(a,z)\cdot t^2+\cdots+az\cdot F_{n-1}(a,z)\cdot t^n+az\cdot F_n(a,z)\cdot t^{n+1}+\cdots \\ a^2t^2\cdot g(t)\coloneqq a^2.\sum_{n=0}^{\infty}F_n(a,z)\cdot t^{n+2}=a^2.F_0(a,z)\cdot t^2+a^2.F_1(a,z)\cdot t^3+\cdots+a^2.F_{n-1}(a,z)t^{n+1}+a^2F_n(a,z)\cdot t^{n+2}+\cdots \end{cases}$$

Assim, segue que:

$$g_F(t)-az\cdot t.g_F(t)-a^2\cdot t^2.g_F(t)=$$

$$=F_0(a,z)+t.F_1(a,z)-az.t.F_0(a,z)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_n(a,z)-az\cdot F_{n-1}(a,z)-a^2\cdot F_{n-2}(a,z)\right)t^n.$$

Logo:

$$g_F(t)-az\cdot t.g_F(t)-a^2\cdot t^2.g_F(t)=F_0(a,z)+tF_1(a,z)-az.t.F_0(a,z)+\sum_{n=2}^{\infty}(0)\cdot t^n$$

$$g_F(t) - az \cdot t.g_F(t) - a^2 \cdot t^2.g_F(t) = t.$$

$$\therefore g_F(t) = \frac{t}{1 - az \cdot t - a^2 \cdot t^2}.$$

■

Teorema 19: (Fórmula de Binet) Para $n \geq 0$, vale (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_n(a,z) = \frac{\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)}.$$

Demonstração: A partir da teoria das equações recorrentes homogêneas, tem-se a equação característica $t^2 - az \cdot t - a^2 = 0$, cujas raízes são $\alpha(a,z) = \frac{az + a\sqrt{z^2+4}}{2}$ e $\beta(a,z) = \frac{az - a\sqrt{z^2+4}}{2}$. Consequentemente, pode-se escrever que $\alpha(a,z) + \beta(a,z) = \text{az}$, $\alpha(a,z) \cdot \beta(a,z) = -a^2$ e $\alpha(a,z) - \beta(a,z) = a\sqrt{z^2+4}$. Isso implica nas relações $\alpha^2(a,z) - az \cdot \alpha(a,z) - a^2 = 0$ e $\beta^2(a,z) - az \cdot \beta(a,z) - a^2 = 0$. Além disso, são válidas as igualdades $\alpha^{n+1}(a,z) = az \cdot \alpha^n(a,z) + a^2 \cdot \alpha^{n-1}(a,z)$ e $\beta^{n+1}(a,z) = az \cdot \beta^n(a,z) + a^2 \cdot \beta^{n-1}(a,z)$. Com isso, pela hipótese indutiva e pela definição $F_n(a,z) = a \cdot \text{z} \cdot F_{n-1}(a,z) + a^2 \cdot F_{n-2}(a,z)$, para $n \geq 1$, pode-se escrever:

$$F_{n+1}(a,z) = a \cdot \text{z} \cdot F_n(a,z) + a^2 \cdot F_{n-1}(a,z) =$$

$$= az \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} + a^2 \cdot \frac{\left(\alpha^{n-1}(a,z) - \beta^{n-1}(a,z)\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$

$$= az \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} + a^2 \cdot \frac{\left(\frac{\alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z)} - \frac{\beta^n(a,z)}{\beta(a,z)}\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$

$$= az \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} + a^2 \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z)\beta(a,z) - \beta^n(a,z)\alpha(a,z)\right)}{\alpha(a,z)\beta.(a,z)(\alpha(a,z) - \beta(a,z))} =$$

$$= az \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} + a^2 \cdot \frac{\left(\alpha^n(a,z)\beta(a,z) - \beta^n(a,z)\alpha(a,z)\right)}{(-\text{a}^2)(\alpha(a,z) - \beta(a,z))} =$$

$$= \frac{az \cdot \alpha^n(a,z) - az \cdot \beta^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} - \frac{\alpha^{n-1}(a,z) \cdot \alpha(a,z)\beta(a,z) - \beta^{n-1}(a,z) \cdot \alpha(a,z)\beta(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$

$$= \frac{az \cdot \alpha^n(a,z) - az \cdot \beta^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} - \frac{\alpha^{n-1}(a,z) \cdot (-a^2) - \beta^{n-1}(a,z) \cdot (-a^2)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$

$$= \frac{az \cdot \alpha^n(a,z) + a^2\alpha^{n-1}(a,z) - (az \cdot \beta^n(a,z) + a^2\beta^{n-1}(a,z))}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}(a,z) - \beta^{n+1}(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)}.$$

■

Teorema 20: Para todo inteiro *n*, vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{-n}(a,z) = \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} F_n(a,z).$$

Demonstração: A partir da Fórmula variante de Binet demonstrada no teorema anterior, segue que:

$$F_{-n}(a,z) = \frac{\alpha^{-n}(a,z) - \beta^{-n}(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{\alpha^n(a,z)} - \frac{1}{\beta^n(a,z)}\right)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{1}{(\alpha(a,z)\cdot\beta(a,z))^n} \cdot \frac{\beta^n(a,z) - \alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{1}{(-a^2)^n} \cdot \frac{\beta^n(a,z) - \alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} \cdot \frac{\alpha^n(a,z) - \beta^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)} =$$
$$= \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} \cdot F_n(a,z) \cdot$$

■

Particularmente, quando se assume somente uma variável complexa *z* e considerando $a = 1$, pode-se obter a Fórmula variante de Binet na variável complexa e realizar sua extensão para índices inteiros. Assim, sejam $f_n(z) = \frac{\alpha^n(z) - \beta^n(z)}{\alpha(z) - \beta(z)}$ e $F_{-n}(a,z) =$ $= \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} F_n(a,z)$. E, pelo Lema 4, tem-se que $F_n(a,z) = a^{n-1} \cdot f_n(z)$ para $n \geq 1$. Com isso, segue que:

$$F_n(a,z)=\frac{\alpha^n(a,z)-\beta^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=a^{n-1}\cdot f_n(z)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_n(z)=\frac{1}{a^{n-1}}\cdot\frac{\alpha^n(a,z)-\beta^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}.$$

Além do mais, quando as matrizes $A^1=\begin{pmatrix} az & 1\\ a^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2(a,z) & F_1(a,z)\\ a^2F_1(a,z) & a^2F_0(a,z)\end{pmatrix}$ e $A^n=\begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z)\\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-1}(a,z)\end{pmatrix}$ são avaliadas para $n\geq 1$, tem-se, por um processo de indução, que:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z)\\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-1}(a,z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} az & 1\\ a^2 & 0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} azF_{n+1}(a,z)+a^2F_n(a,z) & F_{n+1}(a,z)\\ az\cdot a^2F_n(a,z)+a^2a^2F_{n-1}(a,z) & a^2F_n(a,z)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} F_{n+2}(a,z) & F_{n+1}(a,z)\\ a^2F_{n+1}(a,z) & a^2F_n(a,z)\end{pmatrix}.$$

E, logo, o determinante da matriz A é $\det A=-a^2$. Doravante, com aporte em representações matriciais, será discutida a generalização das identidades clássicas; de Cassini, d'Ocagne e Catalan; e a Fórmula de Honsberger nas variáveis complexas *a* e *z*.

3.3.1 A Fórmula de Honsberger e as identidades de Cassini, d'Ocagne e Catalan

Neste tópico, serão discutidas as identidades generalizadas de Cassini, d'Ocagne e Catalan e a Fórmula de Honsberger, considerando suas representações polinomiais com variáveis complexas *a* e *z*. Nesse sentido, a partir da matriz $A^n=\begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z)\\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-1}(a,z)\end{pmatrix}$, serão enunciados alguns teoremas. Vale destacar que os Teoremas 21, 22, 23 e 24 são discutidos por Taskoprü & Altintas (2015) e Alves & Oliveira (2017).

Teorema 21: Seja $n\geq 1$, para a identidade generalizada de Cassini, vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z)-F_n(a,z)^2=(-1)^n a^{2n-2}.$$

Demonstração: Avaliando o comportamento do determinante da matriz A^n, tem-se que:

$$detA^n = det\begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$= F_{n+1}(a,z)\cdot a^2F_{n-1}(a,z) - a^2F_n(a,z)\cdot F_n(a,z) =$$
$$= a^2(F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z) - F_n{}^2(a,z)).$$

Por outro lado:

$$\det A^n = \det(A\cdot A\cdot ...\cdot A) =$$
$$= \det(A)\cdot ...\cdot \det(A) =$$
$$= \underbrace{\left(-a^2\right)\left(-a^2\right)\cdot ...\cdot \left(-a^2\right)}_{n \text{ vezes}} =$$
$$= (-1)^n\cdot a^{2n}.$$

Portanto:

$$detA^n = a^2(F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z) - F_n{}^2(a,z)) = (-1)^n\cdot a^{2n}.$$
$$\therefore F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z) - F_n(a,z)^2 = (-1)^n a^{2n-2}.$$

■

Teorema 22: Seja $m,n \geq 0$, para a Fórmula de Honsberger, vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{n+m+1}(a,z) = F_{n+1}(a,z)F_{m+1}(a,z) + a^2\cdot F_n(a,z)F_m(a,z).$$

Demonstração: Seja a identidade matricial $A^{n+m} = A^n\cdot A^m$, pode-se escrever:

$$A^{n+m} = \begin{pmatrix} F_{n+m+1}(a,z) & F_{n+m}(a,z) \\ a^2F_{n+m}(a,z) & a^2F_{n+m-1}(a,z) \end{pmatrix}$$

$$A^n\cdot A^m = \begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-1}(a,z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1}(a,z) & F_m(a,z) \\ a^2F_m(a,z) & a^2F_{m-1}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Assim, considerando o produto matricial $A^{n+m} = A^n\cdot A^m$, segue que:

$$\begin{pmatrix} F_{n+m+1}(a,z) & F_{n+m}(a,z) \\ a^2F_{n+m}(a,z) & a^2F_{n+m-1}(a,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z)F_{m+1}(a,z)+a^2F_n(a,z)F_m(a,z) & F_{n+1}(a,z)F_m(a,z)+a^2F_n(a,z)F_{m-1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z)F_{m+1}(a,z)+a^4F_{n-1}(a,z)F_m(a,z) & a^2F_n(a,z)F_m(a,z)+a^4F_{n-1}(a,z)F_{m-1}(a,z) \end{pmatrix}$$

De imediato, a Fórmula de Honsberger é determinada na igualdade acima, quando se considera os elementos correspondentes da 1ª linha e 1ª coluna. E, de modo análogo, assumindo $A^{n+m+p} = A^n \cdot A^m \cdot A^p$, pode-se determinar a relação:

$$\begin{aligned} &F_{n+m+p+1}(a,z) = \\ &= F_{n+1}(a,z)F_{m+1}(a,z)F_{p+1}(a,z) + a^2 \cdot F_n(a,z)F_m(a,z)F_{p+1}(a,z) + \\ &+a^2 \cdot F_{n+1}(a,z)F_m(a,z)F_p(a,z) + a^4 \cdot F_n(a,z)F_{m-1}(a,z)F_p(a,z). \end{aligned}$$

■

Lema 5: Para $r \geq 0,$ vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$B_r = \begin{pmatrix} F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Assumindo $B_0 = \begin{pmatrix} F_{n+0+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+0+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$ e $B_1 = \begin{pmatrix} F_{n+1+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+1+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$.

Assim, por indução, determina-se a matriz B_{r+1}, mantendo fixa a segunda coluna da matriz B_r e, para todo $r \geq 0$, operando as matrizes $a^2A^{n+r} = \begin{pmatrix} a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+r}(a,z) \\ a^4F_{n+r}(a,z) & a^4F_{n+r-1}(a,z) \end{pmatrix}$ e $az \cdot B_r = \begin{pmatrix} az \cdot F_{n+r+2}(a,z) & az \cdot F_{n+2}(a,z) \\ az \cdot a^2F_{n+r+1}(a,z) & az \cdot a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$. Desse modo, segue que:

$$\begin{aligned} B_{r+1} &= \begin{pmatrix} a^2F_{n+r+1}(a,z) + az \cdot F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^4F_{n+r}(a,z) + az \cdot a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+r+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2(a^2F_{n+r}(a,z) + az \cdot F_{n+r+1}(a,z)) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+r+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Teorema 23: Seja $m \geq n \geq 1$, para a identidade generalizada de d´Ocagne, vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{n+1}(a,z)\cdot F_m(a,z) - F_n(a,z)\cdot F_{m+1}(a,z) = (-1)^n a^{2n}\cdot F_{m-n}(a,z).$$

Demonstração: Assumindo a matriz $B_0 = \begin{pmatrix} F_{n+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$, a matriz B_1 é gerada com a primeira coluna da soma da matriz $a^2A^n = \begin{pmatrix} a^2F_{n+1}(a,z) & a^2F_n(a,z) \\ a^4F_n(a,z) & a^4F_{n-1}(a,z) \end{pmatrix}$ com a matriz $az\cdot B_0 = \begin{pmatrix} az\cdot F_{n+2}(a,z) & az\cdot F_{n+2}(a,z) \\ a^3z\cdot F_{n+1}(a,z) & a^3z\cdot F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$, mantendo fixa a segunda coluna da matriz B_0. Dessa forma, obtém-se que: $B_1 = \begin{pmatrix} az\cdot F_{n+2}(a,z) + a^2F_{n+1}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2(az\cdot F_{n+1}(a,z) + a^2F_n(a,z)) & a^2\cdot F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$.

De modo análogo, considerando a soma da primeira coluna da matriz $a^2A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^2F_{n+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \\ a^4F_{n+1}(a,z) & a^4F_n(a,z) \end{pmatrix}$ com a primeira coluna da matriz $az\cdot B_1 = \begin{pmatrix} az\cdot F_{n+3}(a,z) & az\cdot F_{n+2}(a,z) \\ a^3z\cdot F_{n+2}(a,z) & a^3z\cdot F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$, determina-se $B_2 = \begin{pmatrix} F_{n+4}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+3}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$. Logo, segue que:

$$B_1 = \begin{pmatrix} F_{n+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} F_{n+4}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+3}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} F_{n+5}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+4}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} F_{n+6}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+5}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$B_5 = \begin{pmatrix} F_{n+7}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+6}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$B_r = \begin{pmatrix} F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}.$$

E, considerando o Teorema 21, tem-se que:

$$detB_0 = det\begin{pmatrix} F_{n+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= F_{n+2}(a,z)a^2F_{n+1}(a,z) - a^2F_{n+1}(a,z)F_{n+2}(a,z) =$$
$$= 0$$

$$detB_1 = det\begin{pmatrix} F_{n+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= a^2(F_{n+3}(a,z)F_{n+1}(a,z) - F_{n+2}{}^2(a,z)) =$$
$$= a^2 \cdot (-1)^{n+2} \cdot a^{2n+2} =$$
$$= (-1)^{n+2} \cdot a^{2n+4}F_1(a,z)$$

$$detB_2 = det\begin{pmatrix} F_{n+4}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+3}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= a^2 \cdot (F_{n+4}(a,z) \cdot F_{n+1}(a,z) - F_{n+3}(a,z) \cdot F_{n+2}(a,z)) =$$
$$= a^2[(F_{n+1}(a,z)(a\,z\,F_{n+3}(a,z) + a^2F_{n+2}(a,z)) - F_{n+2}(a,z)(a\,z\,F_{n+2}(a,z) + a^2F_{n+1}(a,z))] =$$
$$= a^2[F_{n+1}(a,z)a\,z\,F_{n+3}(a,z) - F_{n+2}(a,z)a\,z\,F_{n+2}(a,z)] =$$
$$= a^2.a\,z.(F_{n+1}(a,z)F_{n+3}(a,z) - F_{n+2}{}^2(a,z)) =$$
$$= a^2.a\,z.[(-1)^{n+2}.a^{2n+2}] =$$
$$= (-1)^{n+2}.a^{2n+4} \cdot F_2(a,z).$$

$$detB_3 = det\begin{pmatrix} F_{n+5}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+4}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= a^2(F_{n+5}(a,z)F_{n+1}(a,z) - F_{n+4}(a,z)F_{n+2}(a,z)) =$$
$$= a^2[(a\,z\,F_{n+4}(a,z) + a^2F_{n+3}(a,z)) \cdot F_{n+1}(a,z) - (azF_{n+3}(a,z) + a^2F_{n+2}(a,z)) \cdot F_{n+2}(a,z)] =$$
$$= a^2((a^2z^2 + a^2)F_{n+1}(a,z)F_{n+3}(a,z) - (a^2z^2 + a^2)F_{n+2}{}^2(a,z)) =$$
$$= a^2(F_{n+1}(a,z)F_{n+3}(a,z) - F_{n+2}{}^2(a,z))(a^2z^2 + a^2) =$$
$$= a^2((-1)^{n+2}a^{2n+2})F_3(a,z) =$$
$$= (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_3(a,z).$$

E, pelo processo indutivo, assumindo que $detB_r = det\begin{pmatrix} F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} = (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_r(a,z)$,

segue que:

$$detB_{r+1} = det\begin{pmatrix} F_{n+r+3}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+2}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} azF_{n+r+2}(a,z) + a^2F_{n+r+1}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2(azF_{n+r+1}(a,z) + a^2F_{n+r}(a,z)) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= az \cdot \left(det\begin{pmatrix} F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} \right) + a^2 \cdot \left(\det\begin{pmatrix} F_{n+r+1}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= az.(F_{n+r+2}(a,z)a^2F_{n+1}(a,z) - a^2F_{n+r+1}(a,z).F_{n+2}(a,z)) + a^2(F_{n+r+1}(a,z)a^2F_{n+1}(a,z) - a^2F_{n+r}(a,z)F_{n+2}(a,z)) =$$

$$= az \cdot [(-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_r(a,z)] + a^2[(-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_{r-1}(a,z)] =$$

$$= (-1)^{n+2}a^{2n+4}\left(az \cdot F_r(a,z) + a^2F_{r-1}(a,z)\right) =$$

$$= (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_{r+1}(a,z).$$

Finalmente, realizando a substituição $m = n + r$ e como $detB_r =$ $= a^2\left(F_{n+r+2}(a,z)F_{n+1}(a,z) - F_{n+r+1}(a,z)F_{n+2}(a,z)\right) = (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_r(a,z)$, isso que implica na validade de $a^2\left(F_{m+2}(a,z)F_{n+1}(a,z) - F_{m+1}(a,z)F_{n+2}(a,z)\right) = (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_{m-n}.(a,z)$.

■

Lema 6: Para $s \geq 2$, vale (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$C_s = \begin{pmatrix} F_{n+s}(a,z) & F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Por indução, deve-se determinar a matriz C_{s+1}. Para isso, a primeira linha da matriz $C_{s-1} = \begin{pmatrix} F_{n+s-1}(a,z) & F_{n-r+s-1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}$ deve ser multiplicada por a^2 e adicionada à primeira linha da matriz $C_s = \begin{pmatrix} F_{n+s}(a,z) & F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}$ multiplicada por *az*. E, assim, tem-se que:

$$C_{s+1} = \begin{pmatrix} a^2F_{n+s-1}(a,z) + az \cdot F_{n+s}(a,z) & a^2F_{n-r+s-1}(a,z) + az \cdot F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(az) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+s+1}(a,z) & F_{n-r+s+1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Ademais, observe que a segunda linha de C_{s+1} não é alterada na operação definida, sendo igual à 2ª linha da matriz C_s. Logo, pode-se escrever:

$$det\begin{pmatrix} F_{n+s}(a,z) & F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} = detC_s$$
$$= az \cdot detC_{s-1} + a^2 detC_{s-2} =$$
$$= az \cdot det\begin{pmatrix} F_{n+s-1}(a,z) & F_{n-r+s-1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} + a^2 \cdot det\begin{pmatrix} F_{n+s-2}(a,z) & F_{n-r+s-2}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

■

Lema 7: Para $s \geq 2$, vale (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$detC_s = det\begin{pmatrix} F_{n+s}(a,z) & F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} = (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2}F_r(a,z)F_s(a,z).$$

Demonstração: Considerando $\det C_0 = a^2F_n(a,z)F_{n+1}(a,z) - a^2F_{n-r}(a,z)F_{n+1}(a,z)$ e $\det C_1 = a^2(F_{n+1}(a,z)F_{n-r}(a,z) - F_{n-r+1}(a,z)F_n(a,z))$, além disso, substituindo n por $n-r-1$ na relação $\det B_r = (-1)^{n+2}a^{2n+4} \cdot F_r(a,z)$, obtém-se $\det B_r = \det C_1 = (-1)^{(n-r-1)+2}a^{2(n-r-1)+4} \cdot F_r(a,z) =$ $= (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z)$, assim, segue que:

$$\det C_1 = a^2(F_{n+1}(a,z)F_{n-r}(a,z) - F_{n-r+1}(a,z)F_n(a,z)) = (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z)$$
$$\therefore \det C_1 = (F_{n+1}(a,z)F_{n-r}(a,z) - F_{n-r+1}(a,z)F_n(a,z)) = (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_1(a,z)$$

Seguindo por indução sobre *s* e aplicando a identidade $\det C_s = az \cdot \det C_{s-1} + a^2 \det C_{s-2}$, pode-se determinar:

$$detC_2 = az \cdot detC_1 + a^2 detC_0 =$$
$$= az \cdot (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) + 0 =$$
$$= (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_2(a,z)$$

$$detC_3 = az \cdot detC_2 + a^2 detC_1 =$$
$$= az \cdot [(-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_2(a,z)] + a^2[(-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_1(a,z)] =$$
$$= (-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z)(az.F_2(a,z) + a^2 \cdot F_1(a,z)) =$$
$$= (-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z).F_3(a,z).$$

Por fim, partindo da identidade $\det C_s = az \cdot \det C_{s-1} + a^2 \det C_{s-2}$ para $s \geq 2$, segue que:

$$\det C_s = az \cdot \det C_{s-1} + a^2 \det C_{s-2} =$$
$$= az[(-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_{s-1}(a,z)] + a^2[(-1)^{n-r+1}.a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_{s-2}(a,z)] =$$
$$= (-1)^{n-r+1} a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z).(az \cdot F_{s-1}(a,z) + a^2 \cdot F_{s-2}(a,z)) =$$
$$= (-1)^{n-r+1} a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_s(a,z).$$

■

Teorema 24: Seja $m \geq n \geq 1$, para a identidade generalizada de Catalan, vale que (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_n(a,z)F_m(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) = (-1)^{n-r} a^{2n-2r} \cdot F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z) .$$

Demonstração: Seja a matriz definida $C_0 = \begin{pmatrix} F_n(a,z) & F_{n-r}(a,z) \\ a^2F_{n+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$ e sabendo que $B_r = \begin{pmatrix} F_{n+r+2}(a,z) & F_{n+2}(a,z) \\ a^2F_{n+r+1}(a,z) & a^2F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}$, ao substituir *n* por $n-r-1$ na matriz B_r obtém-se:

$$C_1 = \begin{pmatrix} F_{n-r-1+r+2}(a,z) & F_{n-r-1+2}(a,z) \\ a^2F_{n-r-1+r+1}(a,z) & a^2F_{n-r-1+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_{n-r+1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Posteriormente, na construção da matriz C_2, a primeira linha de C_0 é multiplicada por a^2 e somada à primeira linha da matriz C_1 multiplicada por *az*. E, por definição, sabe-se que $F_{n+2}(a,z) = a^2F_n(a,z) + az \cdot F_{n+1}(a,z) \Rightarrow F_{n-r+2}(a,z) = a^2F_{n-r}(a,z) + a\,z \cdot F_{n-r+1}(a,z)$. Dessa forma, tem-se que:

$$C_2 = \begin{pmatrix} a^2F_n(a,z) + az \cdot F_{n+1}(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) + a\,z \cdot F_{n-r+1}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} F_{n+2}(a,z) & F_{n-r+2}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Em seguida, a matriz C_3 é gerada pela operação, em que a primeira linha da matriz C_1 multiplicada por a^2 é adicionada à primeira linha da matriz C_2 multiplicada pelo termo *az*.

Além disso, a segunda linha não é alterada. Como $a^2 \cdot F_{n-r+1}(a,z) + az \cdot F_{n-r+2}(a,z) = F_{n-r+3}(a,z)$, então:

$$C_3 = \begin{pmatrix} a^2F_{n+1}(a,z) + az \cdot F_{n+2}(a,z) & a^2 \cdot F_{n-r+1}(a,z) + az \cdot F_{n-r+2}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_{n+3}(a,z) & F_{n-r+3}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, a matriz C_4 é obtida, quando a primeira linha da matriz C_2 é multiplicada por a^2 e somada à primeira linha da matriz C_3 multiplicada por *az*. Assim, segue que:

$$C_4 = \begin{pmatrix} a^2F_{n+2}(a,z) + az \cdot F_{n+3}(a,z) & a^2F_{n-r+2}(a,z) + az \cdot F_{n-r+3}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_{n+4}(a,z) & F_{n-r+4}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix}.$$

De fato, fundamentando-se nos dois lemas anteriores, que abordam o comportamento da representação generalizada das matrizes do tipo C_s, avalia-se $detC_s = \\ = det\begin{pmatrix} F_{n+s}(a,z) & F_{n-r+s}(a,z) \\ a^2F_n(a,z) & a^2F_{n-r}(a,z) \end{pmatrix} = a^2(F_{n-r}(a,z)F_{n+s}(a,z) - F_{n-r+s}(a,z)F_n(a,z))$ fazendo a substituição $s = m - n + r$ com $m \geq n \geq 1$ e $r, s \geq 0$. O que permite escrever que $a^2(F_{n-r}(a,z)F_{n+m-n+r}(a,z) - F_{n-r+m-n+r}(a,z)F_n(a,z)) = a^2(F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) - F_m(a,z)F_n(a,z))$, logo, segue que:

$$a^2(F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) - F_m(a,z)F_n(a,z)) = (-1)^{n-r+1}a^{2n-2r+2} \cdot F_r(a,z) \cdot F_s(a,z) \\ \therefore (F_m(a,z)F_n(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z)) = (-1)^{n-r}.a^{2n-2r} \cdot F_r(a,z) \cdot F_{m-n+r}.(a,z)$$

■

Finalmente, avaliando alguns casos particulares, pode-se observar que ao considerar $m = n$ na identidade generalizada de Catalan, pode-se escrevê-la na forma $F_n^2(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) = (-1)^{n-r}a^{2n-2r} \cdot F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z) = (-1)^{n-r}a^{2n-2r} \cdot F_r^2(a,z)$, que quando assume $r = 1$, passa a representar a identidade de Cassini: $F_n^2(a,z) - F_{n-1}(a,z)F_{n+1}(a,z) =$

$= (-1)^{n-1} a^{2n-2} \cdot F_1^2(a,z) = (-1)^{n-1} a^{2n-2}$. A seguir, as relações estudadas nesta seção, serão discutidas para índices inteiros.

3.3.2 Extensão para Índices Inteiros: Representações na Variável Complexa

Neste tópico, fundamentando-se no artigo de Alves & Oliveira (2017), serão abordadas as representações com índices inteiros para as identidades generalizadas de Cassini, d'Ocagne e Catalan e a Fórmula de Honsberger. Primeiramente, como uma extensão das representações matriciais para os índices inteiros, para a matriz $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1}(a,z) & F_n(a,z) \\ a^2 F_n(a,z) & a^2 F_{n-1}(a,z) \end{pmatrix}$ com $n \geq 0$, pode- se aplicar o Teorema 20, de forma que:

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} F_{-n+1}(a,z) & F_{-n}(a,z) \\ a^2 F_{-n}(a,z) & a^2 F_{-n-1}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{-(n-1)}(a,z) & F_{-n}(a,z) \\ a^2 F_{-n}(a,z) & a^2 F_{-(n+1)}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(-1)^{n-1+1} a^{2(n-1)}} F_{n-1}(a,z) & \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} F_n(a,z) \\ a^2 \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} F_n(a,z) & a^2 \frac{1}{(-1)^{n+1+1} a^{2(n+1)}} F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{(-1)^{n+1} a^{2n-2}} F_{n-1}(a,z) & \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} F_n(a,z) \\ a^2 \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} F_n(a,z) & a^2 \frac{-1}{(-1)^{n+1} a^{2n+2}} F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} \begin{pmatrix} -a^2 F_{n-1}(a,z) & F_n(a,z) \\ a^2 F_n(a,z) & -F_{n+1}(a,z) \end{pmatrix}.$$

Identidade 24: Para *n* inteiro qualquer, a identidade generalizada de Cassini é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{-n+1}(a,z) F_{-n-1}(a,z) - F_{-n}(a,z)^2 = (-1)^{-n} a^{-2n-2}.$$

Demonstração:

$$F_{-n+1}(a,z) F_{-n-1}(a,z) - F_{-n}{}^2(a,z) =$$

$$F_{-(n-1)}(a,z) F_{-(n+1)}(a,z) - F_{-n}{}^2(a,z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{(n-1)+1}a^{2(n-1)}} F_{n-1}(a,z).\frac{1}{(-1)^{(n+1)+1}a^{2(n+1)}} F_{n+1}(a,z) - \left[\frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} F_n(a,z)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n}a^{2n-2}} F_{n-1}(a,z).\frac{1}{(-1)^{n+2}a^{2n+2}} F_{n+1}(a,z) - \frac{1}{(-1)^{2n+2}a^{4n}} F_n{}^2(a,z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{2n+2}a^{4n}} F_{n-1}(a,z)F_{n+1}(a,z) - \frac{1}{(-1)^{2n+2}a^{4n}} F_n{}^2(a,z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{2n+2}a^{4n}} (F_{n-1}(a,z)F_{n+1}(a,z) - F_n{}^2(a,z)) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{2n+2}a^{4n}} .\left((-1)^n a^{2n-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+2}a^{2n+2}} =$$

$$= (-1)^{-n}a^{-2n-2}.$$

■

Identidade 25: Para *m* e *n* inteiros quaisquer, a identidade generalizada de d´Ocagne é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{-n+1}(a,z)F_{-m}(a,z) - F_{-n}(a,z)F_{-m+1}(a,z) = (-1)^{-m-1}a^{-2m}F_{m-\mathrm{n}}(a,\mathrm{z}).$$

Demonstração:

$$F_{-n+1}(a,z)F_{-m}(a,z) - F_{-n}(a,z)F_{-m+1}(a,z) =$$

$$= F_{-(n-1)}(a,z)F_{-m}(a,z) - F_{-n}(a,z)F_{-(m-1)}(a,z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n}a^{2n-2}} F_{n-1}(a,z)\frac{1}{(-1)^{m+1}a^{2m}} F_m(a,z) - \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}} F_n(a,z)\frac{1}{(-1)^{m}a^{2m-2}} F_{m-1}(a,z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+m+1}a^{2n+2m-2}} (F_{n-1}(a,z)F_m(a,z) - F_n(a,z)F_{m-1}(a,z)) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+m}a^{2n+2m-2}} (F_n(a,z)F_{m-1}(a,z) - F_{n-1}(a,z)F_m(a,z)) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+m}a^{2n+2m-2}} \left[(-1)^{n-1}a^{2(n-1)} \cdot F_{(m-1)-(\mathrm{n}-1)}(a,z)\right] =$$

$$= (-1)^{-m-1}a^{-2m}F_{m-\mathrm{n}}(a,z).$$

■

Identidade 26: Para *m*, *n* e *r* inteiros quaisquer, a identidade generalizada de Catalan é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{-n}(a,z)\cdot F_{-m}(a,z)-F_{-n-r}(a,z)\cdot F_{-m+r}(a,z)=(-1)^{-m+r}a^{-2m+2r}\cdot F_{m-n-r}(a,z)\cdot F_{-r}(a,z).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&F_{-n}(a,z)\cdot F_{-m}(a,z)-F_{-n-r}(a,z)\cdot F_{-m+r}(a,z)=\\
&=F_{-n}(a,z)\cdot F_{-m}(a,z)-F_{-(n+r)}(a,z)\cdot F_{-(m-r)}(a,z)=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}}F_n(a,z)\frac{1}{(-1)^{m+1}a^{2m}}F_m(a,z)-\frac{1}{(-1)^{n+r+1}a^{2n+2r}}F_{n+r}(a,z)\frac{1}{(-1)^{m-r+1}a^{2m-2r}}F_{m-r}(a,z)=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n+m+2}a^{2n+2m}}F_n(a,z)F_m(a,z)-\frac{1}{(-1)^{n+m+2}a^{2n+2m}}F_{n+r}(a,z)F_{m-r}(a,z)=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n+m+2}a^{2n+2m}}(F_n(a,z)F_m(a,z)-F_{n+r}(a,z)F_{m-r}(a,z))=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n+m+2}a^{2n+2m}}(-1)^{n+r}a^{2n+2r}\cdot F_{m-n-r}(a,z)\cdot F_{-r}(a,z)=\\
&=(-1)^{-m+r}a^{-2m+2r}\cdot F_{m-n-r}(a,z)\cdot F_{-r}(a,z).
\end{aligned}$$

■

Identidade 27: Para *m* e *n* inteiros quaisquer, a Fórmula generalizada de Honsberger é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$F_{-n-m+1}(a,z)=F_{-n+1}(a,z)F_{-m+1}(a,z)+a^2\cdot F_{-n}(a,z)F_{-m}(a,z)=(-1)^{-n-m}.a^{-2n-2m+2}.F_{n+m-1}(a,z).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&F_{-n-m+1}(a,z)=\\
&=F_{-n+1}(a,z)F_{-m+1}(a,z)+a^2\cdot F_{-n}(a,z)F_{-m}(a,z)=\\
&=F_{-(n-1)}(a,z)F_{-(m-1)}(a,z)+a^2\cdot F_{-n}(a,z)F_{-m}(a,z)=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n}a^{2n-2}}F_{n-1}(a,z)\frac{1}{(-1)^{m}a^{2m-2}}F_{m-1}(a,z)+a^2\cdot\frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}}F_n(a,z)\frac{1}{(-1)^{m+1}a^{2m}}F_m(a,z)=\\
&=\frac{1}{(-1)^{n+m}a^{2n+2m-2}}(a^2.F_{n-1}(a,z)F_{m-1}(a,z)+F_n(a,z)F_m(a,z))=\\
&=(-1)^{-n-m}.a^{-2n-2m+2}.F_{n+m-1}(a,z).
\end{aligned}$$

■

A seguir, as identidades de Cassini, d´Ocagne, Catalan e a Fórmula de Honsberger serão discutidas para o caso particular na variável complexa *z*.

3.3.3 As Representações na Variável Complexa z

Nesta seção, será explorado o caso particular, no qual as representações das identidades de Cassini, d´Ocagne, Catalan e a Fórmula de Honsberger possuem apenas uma variável complexa *z*. Para isso, o Lema 4 será aplicado, de modo que as identidades, a seguir, são válidas.

Identidade 28: Para $n \geq 1$, a identidade generalizada de Cassini é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$f_{n+1}(z) f_{n-1}(z) - f_n(z) f_n(z) = (-1)^n .$$

Demonstração:

$$\begin{cases} F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z) - F_n{}^2(a,z) = a^n \cdot f_{n+1}(z)a^{n-2} \cdot f_{n-1}(z) - a^{n-1} \cdot f_n(z)a^{n-1} \cdot f_n(z) \\ F_{n+1}(a,z)F_{n-1}(a,z) - F_n{}^2(a,z) = (-1)^n a^{2n-2} \end{cases}$$

$$a^{2n-2} \cdot (f_{n+1}(z) f_{n-1}(z) - f_n(z) f_n(z)) = (-1)^n a^{2n-2}$$
$$\therefore (f_{n+1}(z) f_{n-1}(z) - f_n(z) f_n(z)) = (-1)^n .$$

■

Identidade 29: Para $m \geq n \geq 1$, a identidade generalizada de d´Ocagne é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$f_{n+1}(z) \cdot f_m(z) - f_n(z) \cdot f_{m+1}(z) = (-1)^n \cdot f_{m-n}(z).$$

Demonstração:

$$\begin{cases} F_{n+1}(a,z)F_m(a,z) - F_n(a,z)F_{m+1}(a,z) = a^n \cdot f_{n+1}(z) \cdot a^{m-1} \cdot f_m(z) - a^{n-1} \cdot f_n(z) \cdot a^m \cdot f_{m+1}(z) \\ F_{n+1}(a,z)F_m(a,z) - F_n(a,z)F_{m+1}(a,z) = (-1)^n a^{2n} \cdot F_{m-n}(a,z) \end{cases}$$

$$a^{n+m-1} \cdot (f_{n+1}(z) \cdot f_m(z) - f_n(z) \cdot f_{m+1}(z)) = (-1)^n a^{2n} \cdot F_{m-n}(a,z)$$
$$f_{n+1}(z) \cdot f_m(z) - f_n(z) \cdot f_{m+1}(z) = (-1)^n \cdot a^{n-m+1} . F_{m-n}(a,z)$$
$$\therefore f_{n+1}(z) \cdot f_m(z) - f_n(z) \cdot f_{m+1}(z) = (-1)^n \cdot f_{m-n}(z).$$

■

Identidade 30: Para $m \geq n \geq 1$, a identidade generalizada de Catalan é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$f_n(z).f_m(z) - f_{n-r}(z) \cdot f_{m+r}(z) = (-1)^{n-r} \cdot f_{m-n+r}(z) \cdot f_r(z).$$

Demonstração:

$$\begin{cases} F_n(a,z)F_m(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) = a^{n-1} \cdot f_n(z)a^{m-1} \cdot f_m(z) - a^{n-r-1} \cdot f_{n-r}(z)a^{m+r-1} \cdot f_{m+r}(z) \\ F_n(a,z)F_m(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) = (-1)^{n-r} a^{2n-2r} \cdot F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z) \end{cases}$$

$$a^{n+m-2} \cdot (f_n(z).f_m(z) - f_{n-r}(z) \cdot f_{m+r}(z)) = (-1)^{n-r} a^{2n-2r} \cdot F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z)$$
$$f_n(z).f_m(z) - f_{n-r}(z) \cdot f_{m+r}(z) = (-1)^{n-r} \cdot a^{n-m-2r+2}.F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z)$$
$$\therefore f_n(z).f_m(z) - f_{n-r}(z) \cdot f_{m+r}(z) = (-1)^{n-r} \cdot f_{m-n+r}(z) \cdot f_r(z).$$

■

Identidade 31: Para $n, m \geq 0$, a Fórmula generalizada de Honsberger é representada por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$f_{n+m+1}(z) = f_{n+1}(z) f_{m+1}(z) + f_n(z) \cdot f_m(z).$$

Demonstração:

$$F_{n+m+1}(a,z) = F_{n+1}(a,z)F_{m+1}(a,z) + a^2 \cdot F_n(a,z)F_m(a,z)$$
$$a^{n+m} \cdot f_{n+m+1}(z) = a^n f_{n+1}(z) \cdot a^m f_{m+1}(z) + a^2 \cdot a^{n-1} \cdot f_n(z)a^{m-1} \cdot f_m(z)$$
$$\therefore f_{n+m+1}(z) = f_{n+1}(z) f_{m+1}(z) + f_n(z) \cdot f_m(z).$$

■

Por fim, a Tabela 4 apresenta um resumo das identidades clássicas; de Cassini, d'Ocagne e Catalan; e a Fórmula de Honsberger abordadas nesta seção, evidenciando o processo de generalização dessas relações definidas para o MF. Com isso, pode-se compreender, numa temática epistemológica da Matemática, que a sequência generalizada de Fibonacci admite uma discussão da representação polinomial na variável complexa e, posteriormente, sua extensão para índices inteiros. O que deixa explícito um processo evolutivo do MF.

Tabela 4 - Identidades do modelo de Fibonacci discutidas na variável complexa.

Generalização da identidade de Cassini
$f_{n+1} f_{n-1} - f_n \cdot f_n = (-1)^n$, para $n \geq 0$.   Giovani Domenico Cassini   (1625 – 1712)   Robert Simson   (1687 – 1768)
$F_{n+1}(a,z) \cdot F_{n-1}(a,z) - F_n(a,z)^2 = (-1)^n a^{2n-2}$, para $n \geq 1$.
$F_{-n+1}(a,z)F_{-n-1}(a,z) - F_{-n}(a,z)^2 = (-1)^{-n} a^{-2n-2}$, para *n* inteiro qualquer.
$f_{n+1}(z) f_{n-1}(z) - f_n(z) f_n(z) = (-1)^n$ para $n \geq 1$.
Generalização da identidade de d´Ocagne
$f_{m+1} f_n - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m}$, para $m \geq n \geq 1$.   Philbert Maurice d'Ocagne   (1862-1938)
$F_{n+1}(a,z) \cdot F_m(a,z) - F_n(a,z) \cdot F_{m+1}(a,z) = (-1)^n a^{2n} \cdot F_{m-n}(a,z)$, com $m \geq n \geq 1$.
$F_{-n+1}(a,z)F_{-m}(a,z) - F_{-n}(a,z)F_{-m+1}(a,z) = (-1)^{-m-1} a^{-2m} F_{m-n}(a,z)$, para inteiros quaisquer.
$f_{n+1}(z) \cdot f_m(z) - f_n(z) \cdot f_{m+1}(z) = (-1)^n \cdot f_{m-n}(z)$, para $m \geq n \geq 1$.
Generalização da identidade de Catalan
$f_n f_n - f_{n+r} f_{n-r} = (-1)^{n-r} f_r^2$, $m \geq n \geq 1$.   Eugène Charles Catalan   (1814 – 1894)
$F_n(a,z)F_m(a,z) - F_{n-r}(a,z)F_{m+r}(a,z) = (-1)^{n-r} a^{2n-2r} \cdot F_{m-n+r}(a,z) \cdot F_r(a,z)$, para $m \geq n \geq 1$.
$F_{-n}(a,z) \cdot F_{-m}(a,z) - F_{-n-r}(a,z) \cdot F_{-m+r}(a,z) = (-1)^{-m+r} a^{-2m+2r} \cdot F_{m-n-r}(a,z) \cdot F_{-r}(a,z)$, para inteiros quaisquer.
$f_n(z).f_m(z) - f_{n-r}(z) \cdot f_{m+r}(z) = (-1)^{n-r} \cdot f_{m-n+r}(z) \cdot f_r(z)$. para $m \geq n \geq 1$.
Generalização da Fórmula de Honsberger
$f_{n+m+1} = f_{n+1} f_{m+1} + f_n f_m$ Ross Honsberger   (1929 – 2016)
$F_{n+m+1}(a,z) = F_{n+1}(a,z)F(a,z)_{m+1} + a^2 \cdot F_n(a,z) \cdot F_m(a,z)$, para $n,m \geq 0$.
$F_{-n-m+1}(a,z) = F_{-n+1}(a,z)F_{-m+1}(a,z) + a^2 \cdot F_{-n}(a,z)F_{-m}(a,z)$, para inteiros quaisquer.
$f_{n+m+1}(z) = f_{n+1}(z) f_{m+1}(z) + f_n(z) \cdot f_m(z)$, para $n,m \geq 0$.

Fonte: Elaboração da autora.

Por conseguinte, continuando o estudo sobre o processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci, serão discutidos os Quaternions Complexos de Fibonacci, os quais compõem uma Álgebra com quatro dimensões e com uma estrutura algébrica definida com a intenção de generalizar os números complexos bidimensionais em dimensões superiores. Dessa forma, o MF será explorado na álgebra quaterniônica a partir da inserção de unidades imaginárias.

3.4 Quaternions Complexos de Fibonacci (QCF)

Os Quaternions são estudados na área da Álgebra Linear, sendo assim, determinadas operações fundamentais da Álgebra como, por exemplo, as partes vetoriais e escalares, os conjugados, as semi-normas, as formas polares e os produtos internos, dentre outras, são definidas para os Quaternions. *A priori*, existem duas estruturas quaterniônicas: os Quaternions sobre $\mathbb{R}$, os quais possuem componentes reais, e os Biquaternions sobre o $\mathbb{C}$, que possuem componentes complexas. Dessa forma, os Quaternions representam um subconjunto dos Biquaternions (Quaternions complexificados) (SANGWINE, ELL & BIHAM, 2011, p. 608).

Os Quaternions foram desenvolvidos por Willian Rowan Hamilton (1805-1865) em 1843. Antes disso, em 1833, Hamilton fundamentou a definição dos números complexos como pares ordenados de números reais para uma representação geométrica. Atualmente, os números complexos bidimensionais são localizados no plano de Argand-Gauss. Todavia, Menon (2009, p. 2305-4) explica que os Quaternions sugiram a partir da tentativa de generalização dos números complexos na forma $z = a + bi$ em três dimensões. Para isso, Hamilton definiu os tripletos com a seguinte forma algébrica: $t = a + bi + cj$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com as unidades imaginárias i e j, de modo que $i^2 = j^2 = -1$. Nesse sentido:

> Em meados do século XIX, Hamilton iniciou o estudo das generalizações através desses tripletos, mas deparou-se com um problema: com as regras acima introduzidas e outras que buscou estabelecer, os tripletos não obedecem à propriedade de fechamento no caso da multiplicação, o que leva, por exemplo, a uma álgebra que não pode ser generalizada a outras dimensões. Após 15 anos de estudos e várias tentativas, descobriu que a introdução de uma terceira unidade imaginária, com propriedades, como veremos, bem definidas, levava a uma estrutura fechada. Esses novos "objetos" com quatro componentes e 3 unidades imaginárias foram introduzidos por Hamilton em 1843 e por ele denominados *quaternions* (MENON, 2009, p. 2305-4).

Os Quaternions são números hipercomplexos, ou seja, representam uma extensão dos números complexos na forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, onde se tem a parte real $\mathrm{Re(z)} = a$, parte imaginária $\mathrm{Im(z)} = b$ e a unidade imaginária *i*. Halici (2012, 2013) e Oliveira & Alves (2018) explicam que um Quaternion é definido pela equação $q = q_0.1 + q_1.e_1 + q_2.e_2 + q_3.e_3$, assim, ele também tem duas partes: uma escalar real composta por (q_0, q_1, q_2, q_3) e uma vetorial formada pela base $(1, e_1, e_2, e_3)$, onde e_1, e_2 e e_3 são números complexos que satisfazem à $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$.

Semelhantemente, segundo Horadam (1963, 1993) e Sangwine, Ell & Biham (2011), pode-se considerar a equação, que determina os Quaternions, escrita na forma $q = q_0.1 + q_1.i + q_2.j + q_3.k$ onde i, j e k são as unidades imaginárias. Assim, a composição de q é organizada em: parte escalar $S(q) = q_0.1 = q_0$ e parte vetorial $V(q) = q_1.i + q_2.j + q_3.k$. Logo, pode-se escrever que $q = S(q) + V(q)$. Além do mais, o conjugado de um Quaternion é dado por: $\bar{q} = S(q) - V(q) \therefore \bar{q} = q_0.1 - q_1.i - q_2.j - q_3.k$.

Nesse sentido, conforme o trabalho de Ninahuanca (2015, p.18), pode-se compreender a existência do Quaternion denominado de puramente escalar, que possui parte vetorial nula e, consequentemente, tem um subespaço unidimensional. E, o Quaternion puro ou puramente vetorial que tem apenas a parte vetorial, ou seja, sua parte escalar é nula, como consequência, apresenta subespaço vetorial tridimensional. Além disso, Ninahuanca (2015, p. 19) descreve um Quaternion como uma soma direta de dois subespaços, ou seja, "a soma direta do conjunto dos reais com o conjunto dos vetores em três dimensões". Essa soma é denotada por: $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, assim, o Quaternion é o conjunto gerado pela base canônica $(1, i, j, k)$, em que, $1 = (1,0,0,0)$, $i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$ e $k = (0,0,0,1)$. A notação $\mathbb{H}$ para a Álgebra Quaterniônica é em homenagem à Hamilton.

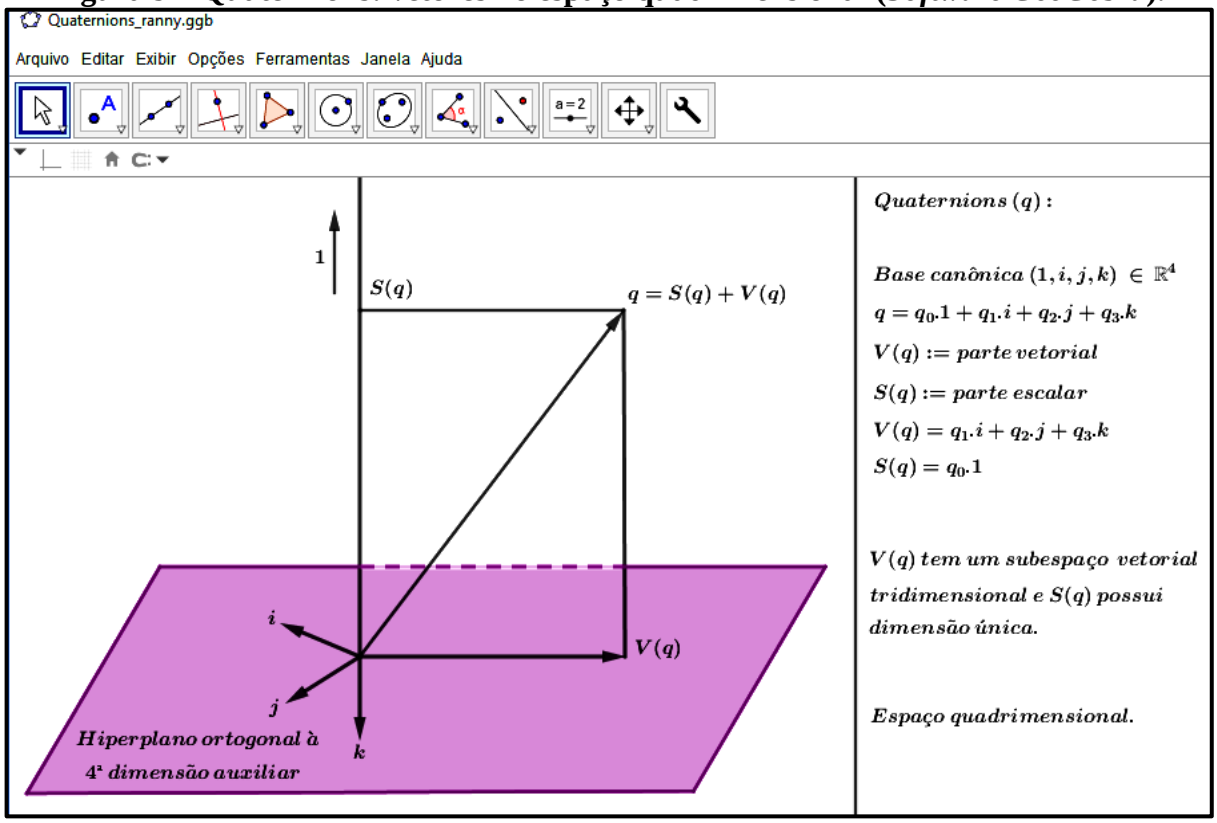
À vista disso, compreende-se que os Quaternions são somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, desse modo, esses números hipercomplexos possuem quatro dimensões. Assim, em busca de uma representação geométrica, os Quaternions são vetores no espaço quadrimensional, onde a dimensão da parte escalar é considerada como dimensão auxiliar (4ª dimensão) (Figura 9). Por outro lado, o produto quaterniônico é linear, de maneira que Horadam (1993) apresenta: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. Veja na Tabela 5.

Tabela 5 – Produto quaterniônico.

	1	i	j	k
1	$1^2 = 1$	$1i = i$	$1j = j$	$1k = k$
i	$i1 = i$	$i^2 = -1$	$ij = k$	$ik = -j$
j	$j1 = j$	$ji = -k$	$j^2 = -1$	$jk = i$
k	$k1 = k$	$ki = j$	$kj = -i$	$k^2 = -1$

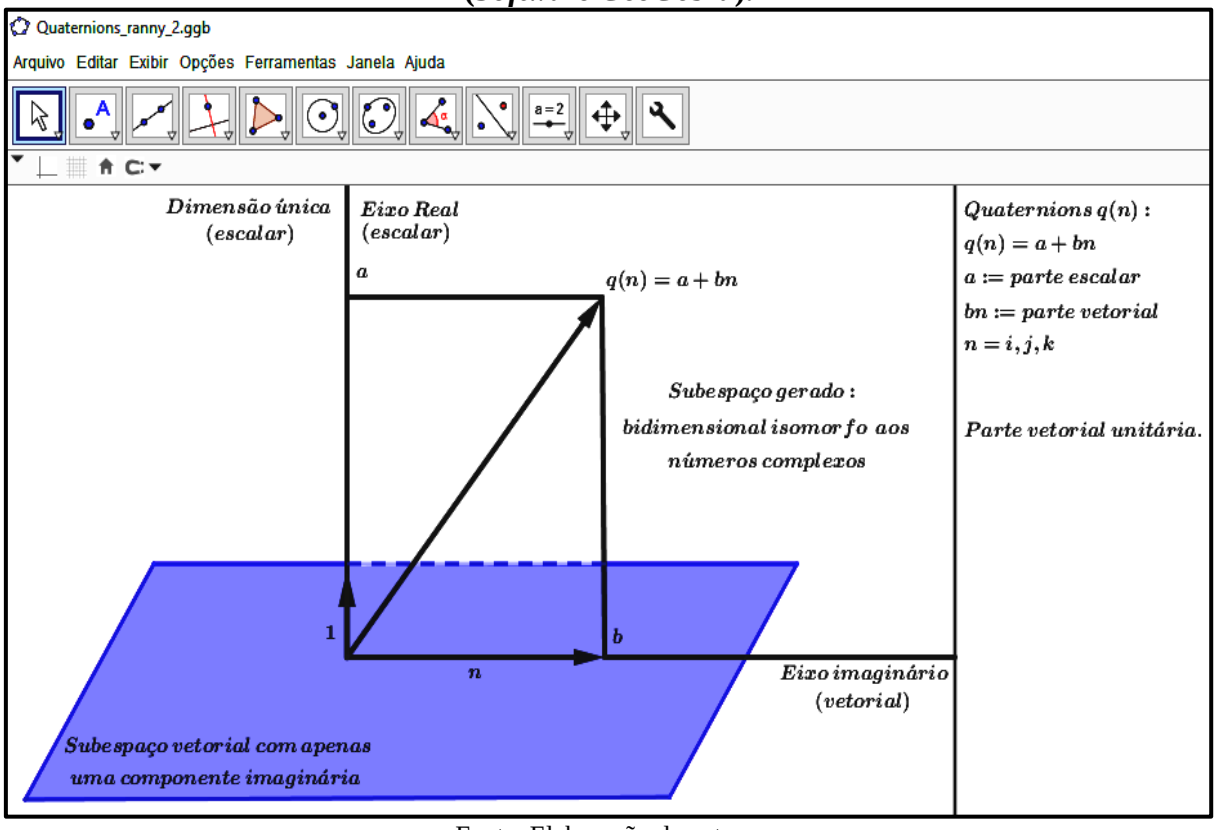
Fonte: Elaboração da autora.

Figura 9 – Quaternions: vetores no espaço quadrimensional (*Software GeoGebra*).



Fonte: Elaboração da autora.

Figura 10 – Quaternions: subespaço bidimensional isomorfo aos números complexos (*Software GeoGebra*).



Fonte: Elaboração da autora.

E, pode-se avaliar os Quaternions da forma $q(n)=a+bn$ onde $n=i,j,k$ com $a,b\in\mathbb{R}$. Nesse caso, a parte vetorial é unitária, ou seja, contém apenas uma unidade imaginária. Desse modo, os Quaternions na forma $q(n)$ possuem partes vetoriais paralelas e formam um subespaço bidimensional isomorfo aos números complexos, além disso, vale acentuar que esse subespaço é gerado pelo vetor $1=(1,0,0,0)$ de dimensão escalar e pelo Quaternion puramente vetorial unitário (ver Figura 10).

Além do mais, vale enfatizar que os Quaternions são discutidos nos artigos da Matemática Pura, nos quais podem ser destacados os autores: Hamilton (1848), Horadam (1963, 1993), Conway & Smith (2003), Sangwine, Ell & Biham (2011), Halici (2012, 2013), Flaut & Shpakivskyi (2013), Dray & Manogue (2015), Oliveira & Alves (2018), Alves (2018a). Nesse repertório, há os Quaternions definidos para o MF.

Nesse sentido, um Quaternion de Fibonacci (QF) é determinado pela equação $Q_n=F_n+F_{n+1}e_1+F_{n+2}e_2+F_{n+3}e_3$, onde a parte escalar Real é composta por $(F_n,F_{n+1},F_{n+2},F_{n+3})$, com os números reais de Fibonacci, e a parte vetorial possui a base $(1,e_1,e_2,e_3)$. E, de modo análogo, quando a parte escalar é composta pelos números de Fibonacci na sua forma complexa, $C_n=F_n+i.F_{n+1}$ com $i^2=-1$, determina-se um Quaternion Complexo de Fibonacci, o qual é descrito por $R_n=Q_n+i.\mathrm{Q}_{n+1}$ (HALICI, 2013). Dessa forma, pode-se escrever um Quaternion Complexo de Fibonacci (QCF) pela seguinte equação: $R_n=\mathrm{C}_n+\mathrm{C}_{n+1}e_1+\mathrm{C}_{n+2}e_2+\mathrm{C}_{n+3}e_3$, assim:

$$\begin{gathered}R_n=Q_n+i.\mathrm{Q}_{n+1}=\\=(F_n+F_{n+1}e_1+F_{n+2}e_2+F_{n+3}e_3)+i.(F_{n+1}+F_{n+2}e_1+F_{n+3}e_2+F_{n+4}e_3)=\\=(F_n+i.F_{n+1})+(F_{n+1}+\mathrm{i}.F_{n+2})e_1+(F_{n+2}+\mathrm{i}.F_{n+3})e_2+(F_{n+3}+\mathrm{i}.F_{n+4})e_3=\\=\mathrm{C}_n+\mathrm{C}_{n+1}e_1+\mathrm{C}_{n+2}e_2+\mathrm{C}_{n+3}e_3.\end{gathered}$$

À vista disso, serão enunciadas algumas definições e discutidos teoremas oriundos da generalização do MF através dos Quaternions. Primeiramente, será apresentada a função geradora $G(x,t)$ para os QCF da forma R_n, posteriormente, serão abordadas: a Fórmula variante de Binet para os QCF e sua extensão para índices inteiros. Assim:

$$\begin{cases} G(x,t) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)t^n = R_0 \cdot t^0 + R_1 \cdot t^1 + R_2 \cdot t^2 + \cdots + R_n \cdot t^n + \cdots \\ t \cdot G(x,t) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)t^{n+1} = R_0 \cdot t + R_1 \cdot t^2 + \cdots + R_{n-1} \cdot t^n + R_n \cdot t^{n+1} + \cdots \\ t^2 \cdot G(x,t) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)t^{n+2} = R_0 \cdot t^2 + R_1 \cdot t^3 + \cdots + R_{n-1}t^{n+1} + R_n \cdot t^{n+2} + \cdots \end{cases}$$

Como $R_n - R_{n-1} - R_{n-2} = 0$, desde que $R_n = \mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n+1}\, e_1 + \mathrm{C}_{n+2}\, e_2 + \mathrm{C}_{n+3}\, e_3$, segue:

$$\begin{gathered} G(x,t) - t \cdot G(x,t) - t^2 \cdot G(x,t) = \\ = R_0 \cdot t^0 + R_1 \cdot t - R_0 \cdot \mathrm{t} + \left(R_2 - R_1 - R_0\right) \cdot t^2 + \left(R_3 - R_2 - R_1\right) \cdot t^3 + \cdots + \left(R_n - R_{n-1} - R_{n-2}\right) \cdot t^n + \cdots = \\ = R_0 + R_1 \cdot t - R_0 \cdot \mathrm{t}. \end{gathered}$$

Logo:

$$\begin{gathered} G(x,t)\left(1 - t - t^2\right) = R_0 + R_1 \cdot t - R_0 \cdot \mathrm{t} \Rightarrow \\ \Rightarrow G(x,t) = \frac{R_0 + \left(R_1 - R_0\right) \cdot t}{\left(1 - t - t^2\right)}. \end{gathered}$$

Definição 12: Sendo $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$, o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação (OLIVEIRA & ALVES):

$$Q_n = F_n + F_{n+1}.e_1 + F_{n+2}.e_2 + F_{n+3}.e_3.$$

Definição 13: Sendo $i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1$, o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação (HALICI, 2012):

$$Q_n = F_n + F_{n+1} \cdot i + F_{n+2} \cdot j + F_{n+3} \cdot k.$$

Definição 14: Sendo $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$, o Quaternion Complexo de Fibonacci é definido pelas equações (OLIVEIRA & ALVES):

$$R_n = Q_n + i.\mathrm{Q}_{n+1}$$

$$R_n = \mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n+1}\, e_1 + \mathrm{C}_{n+2}\, e_2 + \mathrm{C}_{n+3}\, e_3.$$

Teorema 25: Seja $R_n = R_1 F_n + R_0 F_{n-1}$ para $n \geq 0$, a Fórmula variante de Binet para os QF é determinada por (OLIVEIRA & ALVES):

$$R_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(R_1 - R_0.\beta)\alpha^n - (R_1 - R_0.\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Demonstração: Como $R_0 = C_0 + C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3$ e $R_1 = C_1 + C_2 e_1 + C_3 e_2 + C_4 e_3$, então, para a recursividade $R_{n+1} = Q_{n+1} + iQ_{n+2}$, será considerada a equação característica $t^2 - t - 1 = 0$, cujas raízes são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, desse modo, tem-se as relações: $\alpha.\beta = -1$ e $\alpha + \beta = 1$. Assim, aplicando $Fn = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ em $R_n = R_1 F_n + R_0 F_{n-1}$, segue:

$$R_n = R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\frac{\alpha^n}{\alpha} - \frac{\beta^n}{\beta}}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\beta^n\alpha - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= \frac{R_1(\alpha^n - \beta^n) + R_0(\beta^n\alpha - \alpha^n\beta)}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(R_1 - R_0.\beta)\alpha^n - (R_1 - R_0.\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

■

Teorema 26: A Fórmula variante de Binet para os QF com índices inteiros é dada por (OLIVEIRA & ALVES):

$$R_{-n} = \frac{C\alpha^{-n} - D\beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(R_1 + R_0\beta)\alpha^{-n} - (R_1 + R_0\alpha)\beta^{-n}}{\alpha - \beta}.$$

Demonstração: Analogamente à demonstração do teorema anterior, tem-se que:

$$R_{-n} = R_1F_{-n} + R_0F_{-n-1} =$$
$$= R_1F_{-n} + R_0F_{-(n+1)} =$$
$$= R_1\left(\frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\alpha^{-n-1} - \beta^{-n-1}}{\alpha - \beta}\right) =$$
$$= \frac{R_1\left(\alpha^{-n} - \beta^{-n}\right) - R_0\left(\beta^{-n}\alpha - \alpha^{-n}\beta\right)}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{R_1\alpha^{-n} - R_1\beta^{-n} - R_0\beta^{-n}\alpha + R_0\alpha^{-n}\beta}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{\left(R_1 + R_0\beta\right)\alpha^{-n} - \left(R_1 + R_0\alpha\right)\beta^{-n}}{\alpha - \beta}.$$

■

A seguir, os Quaternions definidos para o MF, serão discutidos numa abordagem matricial a fim de apresentar alguns teoremas e propriedades.

3.4.1 Representações Matriciais para os Quaternions de Fibonacci

As representações matriciais para os Quaternions Fibonaccianos são geradas através de uma combinação linear em dois casos: o primeiro que envolve a parte escalar real $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$ formada pelos números de Fibonacci e a base composta pelas matrizes S_0, S_1, S_2 e S_3. E, o segundo caso, onde se considera a parte escalar complexa $(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3})$ constituída pelos números complexos de Fibonacci. Para isso, Halici (2013) considera as matrizes definidas, sendo $i^2 = -1$, a seguir.

$$S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \sigma_0 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & -i\sigma_2 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & \bar{0} \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \bar{0} \end{pmatrix},\ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando as matrizes S_0, S_1, S_2 e S_3, podem-se verificar os produtos matriciais a seguir. Com isso, pode-se observar que valem as equações: $S_1S_2 = -S_2S_1 = S_3$, $S_2S_3 = -S_3S_2 = S_1$ e $S_3S_1 = -S_1S_3 = S_2$. E, sendo S_0 uma matriz identidade, logo, ela é o elemento neutro em um produto matricial, assim, pode-se constatar a igualdade $S_0.S_h = S_h.S_0$ onde $h = 0,1,2,3$.

$$S_1.S_2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=S_3$$

$$S_2.S_1=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=-S_3$$

$$S_2.S_3=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=S_1$$

$$S_3.S_2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=-S_1$$

$$S_3.S_1=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=S_2$$

$$S_1.S_3=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=-S_2$$

Teorema 27: O Quaternion de Fibonacci $Q_n=(F_n,F_{n+1},F_{n+2},F_{n+3},)$ pode ser descrito na forma (OLIVEIRA & ALVES, 2018):

$$Q_n=F_n.S_0+F_{n+1}.S_1+F_{n+2}.S_2+F_{n+3}.S_3=\begin{pmatrix}F_n&F_{n+1}&F_{n+2}&F_{n+3}\\-F_{n+1}&F_n&-F_{n+3}&F_{n+2}\\-F_{n+2}&F_{n+3}&F_n&-F_{n+1}\\-F_{n+3}&-F_{n+2}&F_{n+1}&F_n\end{pmatrix}.$$

Demonstração:

$$Q_n = F_n.S_0 + F_{n+1}.S_1 + F_{n+2}.S_2 + F_{n+3}.S_3 =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + F_{n+1}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + F_{n+2}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + F_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2} & 0 \\ 0 & F_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2} & 0 \\ 0 & -F_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 28: O Quaternion Complexo de Fibonacci $R_n = (\mathrm{C}_n, \mathrm{C}_{n+1}, \mathrm{C}_{n+2}, \mathrm{C}_{n+3})$, pode ser escrito na forma (OLIVEIRA & ALVES, 2018):

$$R_n = C_n.S_0 + C_{n+1}.S_1 + C_{n+2}.S_2 + C_{n+3}.S_3 = \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+1} & C_n & -C_{n+3} & C_{n+2} \\ -C_{n+2} & C_{n+3} & C_n & -C_{n+1} \\ -C_{n+3} & -C_{n+2} & C_{n+1} & C_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Como $R_n = Q_n + i.\mathrm{Q}_{n+1}$, de onde se tem $R_n = (C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}) =$ $= C_n e_0 + C_{n+1}.e_1 + C_{n+2}.e_2 + C_{n+3}.e_3$, assim, segue que:

$$R_n = C_n.S_0 + C_{n+1}.S_1 + C_{n+2}.S_2 + C_{n+3}.S_3 =$$

$$= C_n.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + C_{n+1}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + C_{n+2}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + C_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= C_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} \\ -C_{n+1} & C_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+3} & C_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+3} & -C_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+1} \\ C_{n+1} & C_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

■

Além do mais, Halici (2013) define o seguinte produto matricial: $K = \eta_1 \otimes I_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}$ sendo $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Isso permite escrever uma representação matricial para os QF com oito componentes dessa forma, são consideradas as matrizes a seguir:

$$A_0 = I_2 \otimes S_0 = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = I_2 \otimes S_1 = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = I_2 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = I_2 \otimes S_3 = \begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

Definição 15: Considerando as matrizes *A* e *B* de dimensões (*m* x *n*) e (*p* x *q*) respectivamente, tem-se que o produto de Kronecker entre as matrizes *A* e *B* é a matriz, cuja dimensão é (*mp* x *nq*), determinada por (SINGER, NOBRE & ROCHA, 2017):

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Considerando as matrizes A_0, A_1, A_2 e A_3, podem-se verificar os produtos matriciais a seguir. Com isso, pode-se observar que valem as equações $A_1A_2 = -A_2A_1 = A_3$, $A_2A_3 = -A_3A_2 = A_1$, $A_3A_1 = -A_1A_3 = A_2$ e $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = -I_8$. E, sendo a matriz A_0 uma identidade, logo, ela é o elemento neutro em um produto matricial, assim, pode-se constatar que $A_0.A_h = A_h.A_0$ e $A_0^2 = -A_h^2 = A_0 = I_8$ para $h = 1,2,3$.

$$A_1.A_2=\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=A_3$$

$$A_2.A_1=\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_3$$

$$A_2.A_3=\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=A_1$$

$$A_3.A_2=\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_1$$

$$A_3.A_1=\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=A_2$$

$$A_1.A_3=\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_2$$

$$A_1^2=\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_0=-I_8$$

$$A_2^2=\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_0=-I_8$$

$$A_3^2=\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=-A_0=-I_8$$

Teorema 29: O Quaternion de Fibonacci pode ser escrito pela equação (OLIVEIRA & ALVES):

$$R_n=(F_n+KF_{n+1})A_0+(F_{n+1}+KF_{n+2})A_1+(F_{n+2}+KF_{n+3})A_2+(F_{n+3}+KF_{n+4})A_3=$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & -F_{n+2} & -F_{n+3} & -F_{n+4} & F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & F_{n+4} & -F_{n+3} & -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & -F_{n+4} & -F_{n+1} & F_{n+2} & -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ F_{n+4} & F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Seja a equação $R_n = (F_n A_0 + KF_{n+1}A_0) + (F_{n+1}A_1 + KF_{n+2}A_1) + (F_{n+2}A_2 + KF_{n+3}A_2) + +(F_{n+3}A_3 + KF_{n+4}A_3)$ e usando os resultados, a seguir, de $F_{n+1}.I_4.S_0$, $F_{n+2}.I_4.S_1$, $F_{n+3}.I_4.S_2$ e $F_{n+4}.I_4.S_3$, posteriormente, cada parcela será calculada.

$$F_{n+1}.I_4.S_0 = F_{n+1}.\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} I_2.\sigma_0 & 0 \\ 0 & I_2.\sigma_0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

$$F_{n+2}.I_4.S_1 = F_{n+2}.\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} I_2.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -I_2.i\sigma_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & -\eta_1 \end{pmatrix}.$$

$$F_{n+3}.I_4.S_2 = F_{n+3}.\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & I_2.\sigma_0 \\ -I_2.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_{n+4}.I_4.S_3 = F_{n+4}.\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+4}.\begin{pmatrix} 0 & I_2.i\sigma_2 \\ I_2.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+4}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+4}.\begin{pmatrix} 0 & \eta_1 \\ \eta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para a primeira parcela, segue que:

$$F_nA_0 + KF_{n+1}A_0 = F_n.\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+1}.\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1}.I_4 \\ -F_{n+1}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1}.I_4.S_0 \\ -F_{n+1}.I_4.S_0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix}.$$

Para a segunda parcela, segue que:

$$(F_{n+1}A_1 + KF_{n+2}A_1) = F_{n+1}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+2}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.I_4 \\ -F_{n+2}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.I_4.S_1 \\ -F_{n+2}.I_4.S_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.\eta_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 \\ -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} \\ 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 \\ 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} \\ 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para a terceira parcela, segue que:

$$F_{n+2}A_2 + KF_{n+3}A_2 = F_{n+2}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+3}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_4 \\ -F_{n+3}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_4.S_2 \\ -F_{n+3}.I_4.S_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.\sigma_0 \\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.\sigma_0 \\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_2 \\ -F_{n+3}.I_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+3}.I_2 \\ F_{n+3}.I_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.\sigma_0 \\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_2 \\ -F_{n+3}.I_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+3}.I_2 \\ F_{n+3}.I_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.\sigma_0 \\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} \\ -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} \\ F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para a quarta parcela, segue que:

$$(F_{n+3}A_3 + KF_{n+4}A_3) = F_{n+3}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+4}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.I_4 \\ -F_{n+4}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.I_4.S_3 \\ -F_{n+4}.I_4.S_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.i\sigma_2 \\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.i\sigma_2 \\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.\eta_1 \\ F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+4}.\eta_1 \\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.i\sigma_2 \\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.\eta_1 \\ F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+4}.\eta_1 \\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.i\sigma_2 \\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.\eta_1 \\ F_{n+3}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.\eta_1 \\ F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+4}.\eta_1 \\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.\eta_1 \\ F_{n+3}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+4} \\ 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 \\ 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+4} & 0 & 0 \\ -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} \\ 0 & 0 & F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 \\ 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0 & 0 \\ F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por fim, considerando que a matriz Q_n é dada pela equação $Q_n = F_n S_0 + F_{n+1} S_1 + +F_{n+2} S_2 + F_{n+3} S_3$, pode-se fazer $Q'_n = F_{n+1} S_0 + F_{n+2} S_1 + F_{n+3} S_2 + F_{n+4} S_3$, assim, reunindo as parcelas, segue que:

$$R_n = (F_n A_0 + KF_{n+1} A_0) + (F_{n+1} A_1 + KF_{n+2} A_1) + (F_{n+2} A_2 + KF_{n+3} A_2) + (F_{n+3} A_3 + KF_{n+4} A_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1} & -F_{n+2} & -F_{n+3} & -F_{n+4} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & F_{n+4} & -F_{n+3} \\ F_{n+3} & -F_{n+4} & -F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+4} & F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q_n & Q'_n \\ -Q'_n & Q_n \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 30: O Quaternion de Fibonacci $Q_{-n} = (F_{-n}, F_{-n+1}, F_{-n+2}, F_{-n+3},)$ pode ser escrito pela equação (OLIVEIRA & ALVES, 2018):

$$Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + F_{-n+3}.S_3 = (-1)^n . \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Aplicando a identidade de Koshy (2001) $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$, segue que:

$$Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + F_{-n+3}.S_3 =$$

$$= F_{-n}.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + F_{-n+1}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + F_{-n+2}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + F_{-n+3}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{-n}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}.F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^n.F_{n-1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1}.F_{n-2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-2}.F_{n-3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^n\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -F_{n-1} \\ F_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n-2} & 0 \\ 0 & F_{n-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n-2} & 0 \\ 0 & -F_{n-2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-2}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$= (-1)^n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & -F_{n-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 31: O Quaternion Complexo de Fibonacci $R_{-n} = (\mathrm{C}_{-n}, \mathrm{C}_{-n+1}, \mathrm{C}_{-n+2}, \mathrm{C}_{-n+3})$ pode ser escrito pela equação (OLIVEIRA & ALVES, 2018):

$$R_{-n} = C_{-n}.S_0 + C_{-n+1}.S_1 + C_{-n+2}.S_2 + C_{-n+3}.S_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{-n} & C_{-n+1} & C_{-n+2} & C_{-n+3} \\ -C_{-n+1} & C_{-n} & -C_{-n+3} & C_{-n+2} \\ -C_{-n+2} & C_{-n+3} & C_{-n} & -C_{-n+1} \\ -C_{-n+3} & -C_{-n+2} & C_{-n+1} & C_{-n} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} (-F_n + iF_{n-1}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: De modo análogo ao Teorema 28, pode-se escrever que $R_{-n} = C_{-n}.S_0 + C_{-n+1}.S_1 + +C_{-n+2}.S_2 + C_{-n+3}.S_3$ considerando que $C_n = F_n + i.\mathrm{F}_{n+1} \Rightarrow C_{-n} = F_{-n} + i.\mathrm{F}_{-n+1}$. E aplicando a identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$, segue que:

$$R_{-n} = \begin{pmatrix} C_{-n} & C_{-n+1} & C_{-n+2} & C_{-n+3} \\ -C_{-n+1} & C_{-n} & -C_{-n+3} & C_{-n+2} \\ -C_{-n+2} & C_{-n+3} & C_{-n} & -C_{-n+1} \\ -C_{-n+3} & -C_{-n+2} & C_{-n+1} & C_{-n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-n} + i.\mathrm{F}_{-n+1} & F_{-n+1} + i.\mathrm{F}_{-n+2} \\ -(F_{-n+1} + i.\mathrm{F}_{-n+2}) & F_{-n} + i.\mathrm{F}_{-n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n+2} + i.\mathrm{F}_{-n+3} & F_{-n+3} + i.\mathrm{F}_{-n+4} \\ -(F_{-n+3} + i.\mathrm{F}_{-n+4}) & F_{-n+2} + i.\mathrm{F}_{-n+3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -(F_{-n+2} + i.\mathrm{F}_{-n+3}) & F_{-n+3} + i.\mathrm{F}_{-n+4} \\ -(F_{-n+3} + i.\mathrm{F}_{-n+4}) & -(F_{-n+2} + i.\mathrm{F}_{-n+3}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n} + i.\mathrm{F}_{-n+1} & -(F_{-n+1} + i.\mathrm{F}_{-n+2}) \\ F_{-n+1} + i.\mathrm{F}_{-n+2} & F_{-n} + i.\mathrm{F}_{-n+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ (-1).(-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1).(-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ (-1).(-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1).(-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ (-1).(-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1).(-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} (-F_n + iF_{n-1}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 32: Para os Quaternions de Fibonacci, vale a equação (OLIVEIRA & ALVES, 2018):

$$R_{-n} = (F_{-n} + KF_{-n+1})A_0 + (F_{-n+1} + KF_{-n+2})A_1 + (F_{-n+2} + KF_{-n+3})A_2 + (F_{-n+3} + KF_{-n+4})A_3 =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-4} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-2} & F_{n-1} & F_{n-4} & F_{n-3} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} & -F_{n-3} & -F_{n-4} & F_{n-1} & F_{n-2} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n & F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & -F_{n-3} & F_{n-4} & -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-3} & F_{n-4} & -F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-4} & F_{n-3} & F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Analogamente ao Teorema 29, porém, considerando os índices inteiros e a identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$, segue que:

$$R_{-n} = (F_{-n} + KF_{-n+1})A_0 + (F_{-n+1} + KF_{-n+2})A_1 + (F_{-n+2} + KF_{-n+3})A_2 + (F_{-n+3} + KF_{-n+4})A_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-n} & F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+1} & F_{-n} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n} & -F_{-n+1} \\ -F_{-n+3} & -F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n+4} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+1} & -F_{-n+4} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+3} & F_{-n+4} & F_{-n+1} & -F_{-n+2} \\ -F_{-n+4} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} & F_{-n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{-n+1} & -F_{-n+2} & -F_{-n+3} & -F_{-n+4} \\ F_{-n+2} & -F_{-n+1} & F_{-n+4} & -F_{-n+3} \\ F_{-n+3} & -F_{-n+4} & -F_{-n+1} & F_{-n+2} \\ F_{-n+4} & F_{-n+3} & -F_{-n+2} & -F_{-n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n} & F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+1} & F_{-n} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n} & -F_{-n+1} \\ -F_{-n+3} & -F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^n.F_{n-1} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -(-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} \\ (-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ (-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ (-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^n.F_{n-1} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-4} \\ F_{n-2} & F_{n-1} & F_{n-4} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & -F_{n-4} & F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_{n-2} & -F_{n-3} & F_{n-4} \\ -F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-4} & -F_{n-3} \\ F_{n-3} & F_{n-4} & -F_{n-1} & -F_{n-2} \\ -F_{n-4} & F_{n-3} & F_{n-2} & -F_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} Q_{-n} & -Q'_{-n} \\ Q'_{-n} & Q_{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, o resultado é simplificado, de modo que, $Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + +F_{-n+3}.S_3 \Rightarrow Q'_{-n} = F_{-n+1}S_0 + F_{-n+2}S_1 + F_{-n+3}S_2 + F_{-n+4}S_3$.

■

Definição 16: São definidos os conjuntos: $H = \left\{ Q_n : Q_n = \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}\right) \right\}$, onde F_n é um número real de Fibonacci, e $H' = \left\{ P_n : P_n = \begin{pmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \right\}$ para $w, z \in \mathbb{C}$, de modo que existe isomorfismo entre H e H' numa aplicação $Q_n \to P_n$ (HALICI, 2012).

Teorema 33: Para $n \geq 0$, desde que $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ e através de uma aplicação $Q_n \to P_n$, pode-se obter:

$$P_n = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Por meio de uma aplicação $Q_n \to P_n$, pode-se escrever que $P_n = F_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F_{n+1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + F_{n+2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + F_{n+3} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Desse modo, para $n = 0$, verifica-se que $P_0 = F_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 + i.F_1 & -F_2 - i.F_3 \\ F_2 - i.F_3 & F_0 - i.F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & -C_2 \\ \overline{C_2} & \overline{C_0} \end{pmatrix}$.

Destarte, pelo processo indutivo, segue que:

$$P_1 = F_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1 + i.F_2 & -F_3 - i.F_4\\ F_3 - i.F_4 & F_1 - i.F_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1 & -C_3\\ \overline{C_3} & \overline{C_1}\end{pmatrix}$$

$$P_2 = F_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_2 + i.F_3 & -F_4 - i.F_5\\ F_4 - i.F_5 & F_2 - i.F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_2 & -C_4\\ \overline{C_4} & \overline{C_2}\end{pmatrix}$$

$$P_3 = F_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_6\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_3 + i.F_4 & -F_5 - i.F_6\\ F_5 - i.F_6 & F_3 - i.F_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_3 & -C_5\\ \overline{C_5} & \overline{C_3}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_n = F_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_n + i.F_{n+1} & -F_{n+2} - i.F_{n+3}\\ F_{n+2} - i.F_{n+3} & F_n - i.F_{n+1}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}C_n & -C_{n+2}\\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n}\end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = P_n + F_{n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} - F_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = F_{n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}F_{n+1} + i.F_{n+2} & -F_{n+3} - i.F_{n+4}\\ F_{n+3} - i.F_{n+4} & F_{n+1} - i.F_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{n+1} & -C_{n+3}\\ \overline{C_{n+3}} & \overline{C_{n+1}}\end{pmatrix}.$$

■

Teorema 34: Para $n > 1$, desde que $E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ e através de uma aplicação $Q_{-n} \to P_n$, pode-se obter uma representação com índices inteiros, tal que:

$$P_{-n} = = \begin{pmatrix}C_{-n} & -C_{-n+2}\\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}}\end{pmatrix} = (-1)^n.\begin{pmatrix}(-F_n + i.F_{n-1}) & (F_{n-2} - i.F_{n-3})\\ (-F_{n-2} - i.F_{n-3}) & (-F_n - i.F_{n-1})\end{pmatrix}.$$

Demonstração: Por meio de uma aplicação $Q_{-n} \to P_n$, pode-se escrever que $P_{-n} = F_{-n}E + F_{-n+1}I + F_{-n+2}J + F_{-n+3}K$. Dessa forma, pelo processo indutivo e aplicando a identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$, pode-se verificar que:

$$P_{-1} = F_{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-1} + i.F_0 & -F_1 - i.F_2\\ F_1 - i.F_2 & F_{-1} - i.F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-1} & -C_1\\ \overline{C_1} & \overline{C_{-1}}\end{pmatrix}$$

$$P_{-2} = F_{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-2}+i.F_{-1} & -F_0 - i.F_1\\ F_0 - i.F_1 & F_{-2} - i.F_{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-2} & -C_0\\ \overline{C_0} & \overline{C_{-2}}\end{pmatrix}$$

$$P_{-3} = F_{-3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-3}+i.F_{-2} & -F_{-1} - i.F_0\\ F_{-1} - i.F_0 & F_{-3} - i.F_{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-3} & -C_{-1}\\ \overline{C_{-1}} & \overline{C_{-3}}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_{-n} = F_{-n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-n}+i.F_{-n+1} & -F_{-n+2} - i.F_{-n+3}\\ F_{-n+2} - i.F_{-n+3} & F_{-n} - i.F_{-n+1}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}C_{-n} & -C_{-n+2}\\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}}\end{pmatrix}$$

$$n+1: P_{-n+1} = P_{-n} - F_{-n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = F_{-n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}F_{-n+1}+i.F_{-n+2} & -F_{-n+3} - i.F_{-n+4}\\ F_{-n+3} - i.F_{-n+4} & F_{-n+1} - i.F_{-n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-n+1} & -C_{-n+3}\\ \overline{C_{-n+3}} & \overline{C_{-n+1}}\end{pmatrix}.$$

■

Teorema 35: Sejam $P_n^{-1} \in H'$ e $\det\left(P_n\right) \neq 0$, a matriz inversa de P_n é dada por:

$$P_n^{-1} = \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix}\overline{C_n} & C_{n+2}\\ \overline{-C_{n+2}} & C_n\end{pmatrix}.$$

Demonstração: Considerando a relação $P_n.P_n^{-1} = I_2 = P_n^{-1}.P_n$, pode-se avaliar que:

$$P_n.P_n^{-1} = I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}C_n & -C_{n+2}\\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}C_n.a_{11} - C_{n+2}.a_{21} & C_n.a_{12} - C_{n+2}.a_{22}\\ \overline{C_{n+2}}.a_{11} + \overline{C_n}.a_{21} & \overline{C_{n+2}}.a_{12} + \overline{C_n}.a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema da equação matricial e como $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} =$ $= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$, encontra-se a seguinte matriz inversa:

$$P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_{n+2}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \\ \dfrac{\overline{-C_{n+2}}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_n}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.$$

E, de fato, pode-se verificar que:

$$(P_n^{-1}).P_n = \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n}.C_n + C_{n+2}.\overline{C_{n+2}} & -\overline{C_n}.C_{n+2} + C_{n+2}.\overline{C_n} \\ -\overline{C_{n+2}}.C_n + C_n.\overline{C_{n+2}} & \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + C_n.\overline{C_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

■

Propriedade 1: Para $n \geq 0$, a matriz P_n satisfaz à:

$$\det\left(P_n\right).\det\left(P_n^{-1}\right) = 1.$$

Demonstração: Como que $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}$ e $\det(P_n^{-1}) = \left(\dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right)$,

segue que:

$$\det(P_n).\det(P_n^{-1}) =$$

$$= (\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}).\left(\frac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right) =$$

$$= 1.$$

■

Propriedade 2: Para $n \geq 0$, a matriz P_n satisfaz à:

$$\left(P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.$$

Demonstração: Avaliando a recorrência $(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 = (P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1})$, segue que:

$$(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 \Rightarrow \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n}.b_{11} + C_{n+2}.b_{21} & \overline{C_n}.b_{12} + C_{n+2}.b_{22} \\ -\overline{C_{n+2}}.b_{11} + C_n.b_{21} & -\overline{C_{n+2}}.b_{12} + C_n.b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (P_n^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} = P_n.$$

De fato:

$$(P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1}) = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2} - C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_{n+2}}.\overline{C_n} - \overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + \overline{C_n}.C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

■

Propriedade 3: Para $n \geq 0$, a matriz P_n satisfaz à:

$$\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.P_n^{-1}.$$

Demonstração: Primeiramente, calculando a inversa $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}$, deve se verificar as igualdades $(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1} = I_2 = (P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1})$. Dessa forma, segue que:

$$(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1} = I_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\therefore (P_n.P_n^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, tem-se que $(P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, de fato:

$$P_n.P_n^{-1} = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{-C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2} - C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_n}.\overline{C_{n+2}} - \overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} & \dfrac{0}{\det(P_n)} \\ \dfrac{0}{\det(P_n)} & \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

A seguir, os Quaternions serão discutidos numa abordagem da variável complexa, evidenciando a Fórmula de Binet e sua representação para índices inteiros.

3.4.2 Os Quaternions de Fibonacci na Variável Complexa

Nesta seção, os Quaternions serão discutidos numa abordagem da variável complexa. Dessa forma, os termos da sequência generalizada de Fibonacci serão representados com a notação $F_n(a,z)$ onde *a* e *z* são variáveis complexas. Para isso, vale recordar que, de modo geral, um Quaternion é descrito na forma $q = q_0.1 + q_1.i + q_2.j + q_3.k$ onde i, j e k são as unidades imaginárias e os coeficientes são números reais. E, o conjunto dos Quaternions é conhecido como uma Álgebra de quatro dimensões (IAKIN, 1977, IAKIN, 1981, PLAZA & FALCÓN, 2008, ALVES & OLIVEIRA, 2017). À vista disso, a seguir, serão discutidas definições e relações quaterniônicas para o MF na variável complexa.

Definição 17: Os Quaternions de Fibonacci de ordem *n* são descritos, nas variáveis *a* e *z*, por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$Q_n(a,z) = F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i + F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k \text{, para } n \geq 0.$$

Essa definição permite determinar alguns termos da sequência generalizada quaterniônica para o MF, denotada por $\{Q_n(a,z)\}_{n\in IN}$. Veja:

$$\begin{aligned}
Q_0(a,z) &= F_0(a,z) + F_1(a,z)i + F_2(a,z)\,j + F_3(a,z)k = 0 + (1)\cdot i + (az)\cdot j + (a^2z^2 + a^2)\cdot k \\
Q_1(a,z) &= F_1(a,z) + F_2(a,z)i + F_3(a,z)\,j + F_4(a,z)k = 1 + (az)\cdot i + (a^2z^2 + a^2)\cdot j + (a^3z^3 + 2a^3z)\cdot k \\
Q_2(a,z) &= F_2(a,z) + F_3(a,z)i + F_4(a,z)\,j + F_5(a,z)k = az + (a^2z^2 + a^2)\cdot i + (a^3z^3 + 2a^3z)\cdot j + (a^4z^4 + 3a^4z^2 + a^4)\cdot k \\
&\vdots \\
Q_n(a,z) &= F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i + F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k.
\end{aligned}$$

Teorema 36: Para os Quaternions de Fibonacci de ordem *n*, nas variáveis a e z, vale a seguinte relação recorrente (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$Q_{n+1}(a,z) = az\cdot Q_n(a,z) + a^2Q_{n-1}(a,z)\text{, } \forall \text{ inteiro } n \geq 0.$$

Demonstração: Aplicando a Definição 17 e agrupando os termos, convenientemente, de acordo com a base canônica $\{1,\ i,\ j,\ k\}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
&az\cdot Q_n(a,z) + a^2Q_{n-1}(a,z) = \\
&= az(F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i + F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k) + a^2(F_{n-1}(a,z) + F_n(a,z)i + F_{n+1}(a,z)\,j + F_{n+2}(a,z)k) = \\
&= (azF_n(a,z) + a^2F_{n-1}(a,z)) + (az\,F_{n+1}(a,z) + a^2F_n(a,z))i + (az\,F_{n+2}(a,z) + a^2F_{n+1}(a,z))\,j + (az\,F_{n+3}(a,z) + a^2F_{n+2}(a,z))k =
\end{aligned}$$

$$= F_{n+1}(a,z) + F_{n+2}(a,z)i + F_{n+3}(a,z)\,j + F_{n+4}(a,z)k =$$
$$= Q_{n+1}(a,z).$$

■

Corolário 5: Um Quaternion de Fibonacci de ordem *n* é descrito, nas variáveis *a* e *z*, para índices inteiros, por (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$Q_{-n}(a,z) = (-1)^{-n-1} a^{-2n} \left(F_n(a,z) - a^2 F_{n-1}(a,z) \cdot i + a^4 F_{n-2}(a,z) \cdot j - a^6 F_{n-3}(a,z) \cdot k \right).$$

Demonstração: Pelo Teorema 20, pode-se escrever:

$$Q_{-n}(a,z) = F_{-n}(a,z) + F_{-n+1}(a,z)i + F_{-n+2}(a,z)\,j + F_{-n+3}(a,z)k =$$
$$= F_{-n}(a,z) + F_{-(n-1)}(a,z)i + F_{-(n-2)}(a,z)\,j + F_{-(n-3)}(a,z)k =$$
$$= \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} \cdot F_n(a,z) + \frac{1}{(-1)^n a^{2n-2}} \cdot F_{n-1}(a,z) \cdot i + \frac{1}{(-1)^{n-1} a^{2n-4}} \cdot F_{n-2}(a,z) \cdot j + \frac{1}{(-1)^{n-2} a^{2n-6}} \cdot F_{n-3}(a,z) \cdot k =$$
$$= \frac{1}{(-1)^{n+1} a^{2n}} \left(F_n(a,z) - a^2 F_{n-1}(a,z) \cdot i + a^4 F_{n-2}(a,z) \cdot j - a^6 F_{n-3}(a,z) \cdot k \right) =$$
$$= (-1)^{-n-1} a^{-2n} \left(F_n(a,z) - a^2 F_{n-1}(a,z) \cdot i + a^4 F_{n-2}(a,z) \cdot j - a^6 F_{n-3}(a,z) \cdot k \right).$$

■

Lema 8: A equação característica $t^2 - az \cdot t - a^2 = 0,$ cujas raízes são $\alpha(a,z)$ e $\beta(a,z)$, satisfaz às relações a seguir, $\forall$ inteiro $n \geq 0$ (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$\alpha(a,z)^n = \alpha(a,z) \cdot F_n(a,z) + a^2 \cdot F_{n-1}(a,z)$$

$$\beta(a,z)^n = \beta(a,z) \cdot F_n(a,z) + a^2 \cdot F_{n-1}(a,z).$$

Demonstração: As sequências dos números na forma $Q_n(a,z) = F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i +$ $+F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k$ e $\{F_n(a,z)\}_{n=0}^{\infty}$ possuem propriedades semelhantes. Desse modo, por substituição direta de $\alpha(a,z)$ na equação característica, tem-se que:

$$t^2 - az \cdot t - a^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2(a,z) = az \cdot \alpha(a,z) + a^2 \cdot 1$$
$$\therefore \alpha^2(a,z) = \alpha \cdot (a,z) F_2(a,z) + a^2 \cdot F_1(a,z).$$

Posteriormente, por indução e assumindo $\alpha^{n-1}(a,z) = \alpha(a,z) \cdot F_{n-1}(a,z) + a^2 \cdot F_{n-2}(a,z),$ segue que:

$$\alpha^n(a,z) =$$
$$= \alpha(a,z)\cdot\alpha^{n-1}(a,z) =$$
$$= \alpha(a,z)\cdot\left(\alpha(a,z)\cdot F_{n-1}(a,z) + a^2\cdot F_{n-2}(a,z)\right) =$$
$$= \alpha^2(a,z)\cdot F_{n-1}(a,z) + \alpha(a,z)\cdot a^2\cdot F_{n-2}(a,z) =$$
$$= \left(az\cdot\alpha(a,z) + a^2\cdot 1\right)F_{n-1}(a,z) + \alpha(a,z)\cdot a^2\cdot F_{n-2}(a,z) =$$
$$= az\cdot F_{n-1}(a,z)\cdot\alpha(a,z) + a^2F_{n-1}(a,z) + a^2\cdot F_{n-2}(a,z)\alpha(a,z) =$$
$$= (az\cdot F_{n-1}(a,z) + a^2\cdot F_{n-2}(a,z))\cdot\alpha(a,z) + a^2F_{n-1}(a,z) =$$
$$= F_n(a,z)\cdot\alpha(a,z) + a^2F_{n-1}(a,z).$$

De modo análogo, determina-se $\beta^n(a,z) = \beta(a,z)\cdot F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z) \ \ \forall\ n \geq 0.$

■

Teorema 37: Sejam $\overline{\alpha(\mathrm{a,z})} = 1 + \alpha(\mathrm{a,z})\mathrm{i} + \alpha(\mathrm{a,z})^2 j + \alpha(\mathrm{a,z})^3\,\mathrm{k}$ e $\overline{\beta(\mathrm{a,z})} = 1 + \beta(\mathrm{a,z})\mathrm{i} + \beta(\mathrm{a,z})^2 j + +\beta(\mathrm{a,z})^3\,\mathrm{k}$, a Fórmula de Binet para os Quaternions de Fibonacci de ordem *n*, nas variáveis *a* e *z*, é (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$Q_n(a,z) = \frac{\overline{\alpha(a,\mathrm{z})}\cdot\alpha^n(a,z) - \overline{\beta(a,\mathrm{z})}\cdot\beta^n(a,z)}{\alpha(a,\mathrm{z}) - \beta(a,\mathrm{z})},\ \forall\ n \geq 0\,.$$

Demonstração: Sabendo que $Q_n(a,z) = F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i + F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k$ e considerando $\alpha^n(a,z) = \alpha(a,z)\cdot F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z)$ e $\beta^n(a,z) = \beta(a,z)\cdot F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z)$, segue que:

$$\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z) + a^2\cdot Q_{n-1}(a,z) =$$
$$= \alpha(a,z)\cdot\left(F_n(a,z) + F_{n+1}(a,z)i + F_{n+2}(a,z)\,j + F_{n+3}(a,z)k\right) +$$
$$+ a^2\cdot(F_{n-1}(a,z) + F_n(a,z)i + F_{n+1}(a,z)\,j + F_{n+2}(a,z)k) =$$
$$= \alpha(a,z)F_n(a,z) + \alpha(a,z)F_{n+1}(a,z)i + \alpha(a,z)F_{n+2}(a,z)\,j + \alpha(a,z)F_{n+3}(a,z)k +$$
$$+ a^2\cdot F_{n-1}(a,z) + a^2\cdot F_n(a,z)i + a^2\cdot F_{n+1}(a,z)\,j + a^2\cdot F_{n+2}(a,z)k =$$
$$= (\alpha(a,z)F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z)) + (\alpha(a,z)F_{n+1}(a,z) + a^2\cdot F_n(a,z))\cdot i +$$
$$+(\alpha(a,z)F_{n+2}(a,z) + a^2\cdot F_{n+1}(a,z))\cdot j + (\alpha(a,z)F_{n+3}(a,z) + a^2\cdot F_{n+2}(a,z))\cdot k =$$
$$= \alpha^n(a,z) + \alpha^{n+1}(a,z)i + \alpha^{n+2}(a,z)\,j + \alpha^{n+3}(a,z)k =$$
$$= \alpha^n(a,z)(1 + \alpha(a,z)i + \alpha^2(a,z)\,j + \alpha^3(a,z)k) =$$
$$= \alpha^n(a,z)\cdot\overline{\alpha(a,z)}.$$

Assim, determina-se $\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z)+a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\alpha^n(a,z)\cdot\overline{\alpha(a,z)}$. E, de modo análogo, obtém-se $\beta(a,z)\cdot Q_n(a,z)+a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\beta^n(a,z)\cdot\overline{\beta(a,z)}$. Com isso, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z)+a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)\\ \beta(a,z)\cdot Q_n(a,z)+a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)-\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z)\\ a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)=\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\beta(a,z)\cdot Q_n(a,z)\end{cases}$$

Igualando as equações relativas à $a^2\cdot Q_{n-1}(a,z)$, tem-se que:

$$\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)-\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z)=\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\beta(a,z)\cdot Q_n(a,z)$$
$$\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)=\alpha(a,z)\cdot Q_n(a,z)-\beta(a,z)\cdot Q_n(a,z)$$
$$\therefore Q_n(a,z)=\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}.$$

■

Corolário 6: Para todo inteiro *n*, a Fórmula de Binet para os Quaternions de Fibonacci de ordem *n*, nas variáveis *a* e *z*, é (ALVES & OLIVEIRA, 2017):

$$Q_{-n}(a,z)=\left(-a^2\right)^{-n}\left(\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right).$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, pode-se escrever que:

$$Q_{-n}(a,z)=$$
$$=\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\alpha^{-n}(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\beta^{-n}(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=$$
$$=\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^n(a,z)}\right)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\left(\frac{1}{\beta^n(a,z)}\right)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=$$
$$=\frac{1}{\left(\alpha(a,z)\cdot\beta(a,z)\right)^n}\cdot\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)}{(\alpha-\beta)}=$$
$$=\frac{1}{\left(-a^2\right)^n}\cdot\left(\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right)=$$
$$=\left(-a^2\right)^{-n}\cdot\left(\frac{\overline{\alpha(a,z)}\cdot\beta^n(a,z)-\overline{\beta(a,z)}\cdot\alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right).$$

■

A seguir, numa perspectiva de generalização dos Quaternions, os Octonions serão definidos e discutidos, evidenciando a Fórmula de Binet e sua representação para índices inteiros.

3.5 Octonions de Fibonacci (OF)

Conway & Smith (2003, p.8) explicam que logo após a descoberta dos Quaternions feita por Hamilton, surgiram os Octonions, os quais foram desenvolvidos em 1843 por John T. Graves, um amigo de Hamilton. Posteriormente, em 1845, os Octonions também foram redescobertos, independentemente, por Arthur Cayley (1821-1895) e, em sua homenagem, os Octonions também são conhecidos como números de Cayley.

Vale destacar que os Octonions, assim como os Quaternions, representam uma extensão dos números complexos bidimensionais. Porém, quando se faz esse processo de generalização e o conjunto numérico é ampliado, consequentemente, ocorre a perda de algumas propriedades algébricas. Por exemplo, os Quaternions não apresentam a propriedade comutativa da multiplicação. E, os Octonions, por sua vez, não são associativos na multiplicação, a ausência dessa última propriedade foi identificada por Hamilton.

Isso permitiu a construção de novas estruturas algébricas em dimensões superiores, contribuindo para o desenvolvimento de diferentes Álgebras. Nesse sentido, Batista & Santos (2012, p.32) descrevem que a álgebra de divisão dos Quaternions é um caso particular das Álgebras de Clifford, as quais são denominadas de álgebra geométrica e "são construídas a partir de uma forma quadrática em um espaço vetorial". Por outro lado, Pendeza (2006, p.15) explica que a álgebra do Octonions também é conhecida como Álgebra de Cayley.

Segundo Santos (2016), os Octonions representam uma extensão não-associativa dos Quaternions. Todavia, eles constituem uma álgebra com oito componentes de base, formando uma álgebra de divisão normada com oito dimensões sobre $\mathbb{R}$. Dessa forma, os Octonions possuem 7 componentes imaginárias: $i,\ j,\ k,\ l,\ li,\ lj,\ lk$ e, assim, os números octoniônicos são descritos na seguinte forma algébrica:

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk.$$

Com isso, $x \in \mathbb{R}$, de modo que ele pode ser considerado com um ponto ou vetor em $\mathbb{R}^8$. Além do mais, o Octonion *x* é composto por duas partes: a parte escalar positiva x_1 e uma parte vetorial constituída por $\left(x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk\right)$. De acordo com Pendeza (2006, p.17), sendo $\mathbb{O}$ o conjunto dos Octonions, estes podem ser escritos como uma soma direta, tal que, $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus V$, onde $\mathbb{R}$ é o corpo dos reais e V é um espaço Euclidiano.

Tabela 6 – Produto octoniônico.

Números octoniônicos								
	1	***i***	***j***	***k***	***l***	***li***	***lj***	***lk***
1	**1**	***i***	***j***	***k***	***l***	***li***	***lj***	***lk***
i	***i***	**–1**	***k***	$-j$	$-li$	***l***	$-lk$	***lj***
j	***j***	$-k$	**–1**	***i***	$-lj$	***lk***	***l***	$-li$
k	***k***	***j***	$-i$	**–1**	$-lk$	$-lj$	***li***	***l***
l	***l***	***li***	***lj***	***lk***	**–1**	$-i$	$-j$	$-k$
li	***li***	$-l$	$-lk$	***lj***	***i***	**–1**	$-k$	***j***
lj	***lj***	***lk***	$-l$	$-li$	***j***	***k***	**–1**	$-i$
lk	***lk***	$-lj$	***li***	$-l$	***k***	$-j$	***i***	**–1**
Octonions de Fibonacci - adaptação								
	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	**1**	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	**–1**	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	**–1**	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	**–1**	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	**–1**	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	**–1**	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	**–1**	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	**–1**

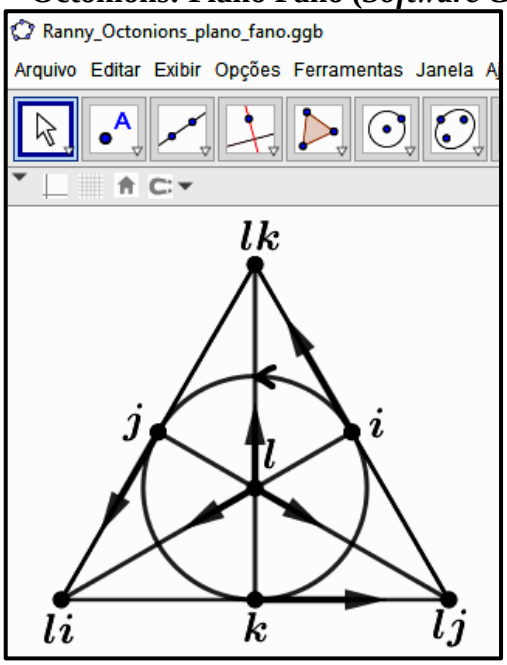
Fonte: Elaboração da autora.

Assim, assumindo as unidades imaginárias como uma base ortonormal da Álgebra 8-dimensional, pode-se verificar a multiplicação dos Octonions na Tabela 6 e esquematizá-la pelo diagrama denominado de Plano Fano (Figura 11). Os pontos do Plano Fano são os elementos da base dos Octonions, ou seja, as componentes imaginárias. E, as setas

determinam os sinais dos resultados da multiplicação. Dessa forma, sobre os axiomas de Gino Fano, segue que:

> O nome do diagrama é devido aos axiomas de Gino Fano (1892), um italiano que definiu as primeiras fundamentações à geometria projetiva: Axioma 1: Existem uma reta e um ponto que não são incidentes. Axioma 2: Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos. Axioma 3: Dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta. (PENDEZA, 2006, p.18)

Figura 11 – Octonions: Plano Fano (*Software GeoGebra*).



Fonte: Elaboração da autora.

Além do mais, vale comentar que os Octonions são discutidos na literatura da Matemática Pura, na qual podem ser destacados os autores: Conway & Smith (2003), Pendeza (2006), Batista & Santos (2012), Dray & Manogue (2015), Santos (2016) e Karataş & Halici (2016). Assim, numa abordagem da sequência generalizada de Fibonacci, os Octonions são definidos para o MF e isso pode ser evidenciado nos artigos de: Keçilioglu & Akkus (2014), Savin (2015), Halici (2015), Ipek & Çimen (2016) e Alves (2018a).

Com isso, a seguir, serão apresentadas as definições e relações recorrentes octoniônicas para o MF, tendo o trabalho de Keçilioglu & Akkus (2014) como referência principal. Além disso, será considerada a equação característica $t^2 - t - 1 = 0$, cujas raízes são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dessa forma, pode-se escrever as relações: $\alpha.\beta = -1$ e $\alpha + \beta = 1$. E, assim, essas raízes podem escritas na Fórmula de Binet, tal que, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

Definição 18: Sendo $e_0 = 1,\ e_1 = i,\ e_2 = j,\ e_3 = k,\ e_4 = e,\ e_5 = ie,\ e_6 = je,\ e_7 = ke$ e $e_7 = ke$. O Octonion de Fibonacci é definido, para $n \geq 0$, por (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$O_n = F_n\, e_0 + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3 + F_{n+4}e_4 + F_{n+5}e_5 + F_{n+6}e_6 + F_{n+7}e_7$$

$$O_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}e_s \cdot$$

Definição 19: O Octonion conjugado de um Octonion de Fibonacci é definido da seguinte forma (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$\overline{O}_n = F_n\, e_0 - F_{n+1}e_1 - F_{n+2}e_2 - F_{n+3}e_3 - F_{n+4}e_4 - F_{n+5}e_5 - F_{n+6}e_6 - F_{n+7}e_7$$

$$\overline{O}_n = F_n\, e_0 - \sum_{s=1}^{7} F_{n+s}e_s \cdot$$

Definição 20: O Octonion de Fibonacci é representado, com índices inteiros, por (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$O_{-n} = F_{-n}\, e_0 + F_{-n+1}e_1 + F_{-n+2}e_2 + F_{-n+3}e_3 + F_{-n+4}e_4 + F_{-n+5}e_5 + F_{-n+6}e_6 + F_{-n+7}e_7$$

$$O_{-n} = \sum_{s=0}^{7} (-1)^{n+1-s} \cdot F_{n-s}e_s \cdot$$

Aplicando $F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$, tem-se que:

$$\begin{gathered} O_{-n} = F_{-n}\, e_0 + F_{-n+1}e_1 + F_{-n+2}e_2 + F_{-n+3}e_3 + F_{-n+4}e_4 + F_{-n+5}e_5 + F_{-n+6}e_6 + F_{-n+7}e_7 = \\ = F_{-n}\, e_0 + F_{-(n-1)}e_1 + F_{-(n-2)}e_2 + F_{-(n-3)}e_3 + F_{-(n-4)}e_4 + F_{-(n-5)}e_5 + F_{-(n-6)}e_6 + F_{-(n-7)}e_7 = \\ = (-1)^{n+1} \cdot \left[(-1)^0 F_n\, e_0 + (-1)^{-1} F_{(n-1)}e_1 + (-1)^{-2} F_{(n-2)}e_2 + \cdots + (-1)^{-7} F_{(n-7)}e_7 \right] = \\ = \sum_{s=0}^{7} (-1)^{n+1-s} \cdot F_{n-s}e_s \cdot \end{gathered}$$

Definição 21: O Octonion conjugado de um Octonion de Fibonacci, com índices inteiros, é definido da seguinte forma (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$\overline{O}_{-n} = F_{-n}\, e_0 - F_{-n+1}e_1 - F_{-n+2}e_2 - F_{-n+3}e_3 - F_{-n+4}e_4 - F_{-n+5}e_5 - F_{-n+6}e_6 - F_{-n+7}e_7$$

$$\overline{O}_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n \cdot e_0 - \sum_{s=1}^{7} (-1)^{n+1-s} \cdot F_{n-s} e_s \cdot$$

À vista disso, são obtidas as seguintes relações:

$$O_n + \overline{O}_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s} e_s + F_n e_0 - \sum_{s=1}^{7} F_{n+s} e_s$$
$$O_n + \overline{O}_n = 2 \cdot F_n \cdot e_0 \cdot$$

$$O_{-n} + \overline{O}_{-n} = \sum_{s=0}^{7} (-1)^{n+1-s} \cdot F_{n-s} e_s + \left[(-1)^{n+1} \cdot F_n \cdot e_0 - \sum_{s=1}^{7} (-1)^{n+1-s} \cdot F_{n-s} e_s \right]$$
$$\therefore O_{-n} + \overline{O}_{-n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot F_n \cdot e_0 \cdot$$

Teorema 38: A Função Geradora para o conjunto dos OF é (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$g(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2} \right) \cdot \sum_{s=0}^{7} \left(F_s + F_{s-1} \cdot x \right) e_s \cdot$$

Demonstração: Seja $g(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} O_n \cdot x^n,$ pode-se escrever que:

$$g(x) = O_0 + O_1 \cdot x + O_2 \cdot x^2 + O_3 \cdot x^3 + \cdots + O_n \cdot x^n + \cdots$$
$$x \cdot g(x) = O_0 \cdot x + O_1 \cdot x^2 + O_2 \cdot x^3 + \cdots + O_{n-1} \cdot x^n + O_n \cdot x^{n+1} + \cdots$$
$$x^2 \cdot g(x) = O_0 \cdot x^2 + O_1 \cdot x^3 + O_2 \cdot x^4 + \cdots + O_{n-1} \cdot x^{n+1} + O_n \cdot x^{n+2} + \cdots$$

Assim, segue que:

$$g(x) - x \cdot g(x) - x^2 \cdot g(x) =$$
$$= O_0 + \left(O_1 - O_0 \right) x + \left(O_2 - O_1 - O_0 \right) x^2 + \cdots + \left(O_n - O_{n-1} - O_{n-2} \right) x^n + \cdots =$$
$$= O_0 + \left(O_1 - O_0 \right) x =$$
$$= \left(F_0 e_0 + F_1 e_1 + \cdots + F_7 e_7 \right) + \left[\left(F_1 e_0 + F_2 e_1 + \cdots + F_8 e_7 \right) - \left(F_0 e_0 + F_1 e_1 + \cdots + F_7 e_7 \right) \right] x =$$
$$= \left(F_0 + F_{-1} \cdot x \right) e_0 + \left(F_1 + F_0 \cdot x \right) e_1 + \cdots + \left(F_7 + F_6 \cdot x \right) e_7 =$$
$$= \sum_{s=0}^{7} \left(F_s + F_{s-1} \cdot x \right) e_s \cdot$$

Portanto:

$$g(x)\left(1-x-x^2\right)=\sum_{s=0}^{7}\left(F_s+F_{s-1}\cdot x\right)e_s$$

$$\therefore g(x)=\left(\frac{1}{1-x-x^2}\right)\cdot\sum_{s=0}^{7}\left(F_s+F_{s-1}\cdot x\right)e_s\cdot$$

■

Teorema 39: Sejam $\sum_{s=0}^{7}\alpha^s e_s=\alpha^*$ e $\sum_{s=0}^{7}\beta^s e_s=\beta^*$, para $n\geq 0$, a Fórmula de Binet para os OF é descrita por (KEÇILIOGLU & AKKUS, 2014):

$$O_n=\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\cdot$$

Demonstração: Recordando que a Fórmula de Binet é $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, pode-se escrever que:

$$O_n=F_n\,e_0+F_{n+1}e_1+F_{n+2}e_2+F_{n+3}e_3+F_{n+4}e_4+F_{n+5}e_5+F_{n+6}e_6+F_{n+7}e_7=$$

$$=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)e_0+\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)e_1+\left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right)e_2+\cdots+\left(\frac{\alpha^{n+7}-\beta^{n+7}}{\alpha-\beta}\right)e_7=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left[(\alpha^n e_0+\alpha^{n+1}e_1+\cdots+\alpha^{n+7}e_7)-(\beta^n e_0+\beta^{n+1}e_1+\cdots+\beta^{n+7}e_7)\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left[\alpha^n(e_0+\alpha e_1+\alpha^2e_2+\cdots+\alpha^7e_7)-\beta^n(e_0+\beta e_1+\beta^2e_2+\cdots+\beta^7e_7)\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left[\alpha^n\left(\sum_{s=0}^{7}\alpha^s e_s\right)-\beta^n\left(\sum_{s=0}^{7}\beta^s e_s\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left[\alpha^n\alpha^*-\beta^n\beta^*\right]\cdot$$

■

Teorema 40: Para todo inteiro *n*, a Fórmula de Binet para os OF é descrita por:

$$O_{-n}=(-1)^{-n}\cdot\left(\frac{\alpha^*\beta^n-\beta^*\alpha^n}{\alpha-\beta}\right)\cdot$$

Demonstração: Como $\alpha\beta = -1$, segue que:

$$O_{-n} = \frac{\alpha^* \alpha^{-n} - \beta^* \beta^{-n}}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \left(\frac{\alpha^*}{\alpha^n} - \frac{\beta^*}{\beta^n} \right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \left(\frac{\alpha^* \beta^n - \beta^* \alpha^n}{\alpha^n \beta^n} \right) =$$
$$= \alpha^{-n} \beta^{-n} \cdot \left(\frac{\alpha^* \beta^n - \beta^* \alpha^n}{\alpha - \beta} \right) =$$
$$= (-1)^{-n} \cdot \left(\frac{\alpha^* \beta^n - \beta^* \alpha^n}{\alpha - \beta} \right) \cdot$$

■

Teorema 41: A Identidade de Catalan para os OF, com $n,\ r \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$O_n^2 - O_{n+r} \cdot O_{n-r} = \frac{(-1)^{n-r} \cdot \alpha^* \cdot \beta^* \cdot \left(\alpha^r - \beta^r \right)^2}{(\alpha - \beta)^2} \cdot$$

Demonstração: Como $O_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $\alpha\beta = -1$, segue que:

$$O_n^2 - O_{n+r} \cdot O_{n-r} =$$
$$= \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+r} - \beta^* \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n-r} - \beta^* \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) =$$
$$= \frac{-2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n + \alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(\alpha^r \beta^{-r} + \alpha^{-r} \beta^r \right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(-2 + \alpha^r \beta^{-r} + \alpha^{-r} \beta^r \right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(-2 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r} \right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(\frac{-2\alpha^r \beta^r + \alpha^{2r} + \beta^{2r}}{\alpha^r \beta^r} \right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \cdot \alpha^{n-r} \cdot \beta^* \cdot \beta^{n-r} \cdot \left(\alpha^r - \beta^r\right)^2}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \cdot \beta^* \cdot (\alpha\beta)^{n-r} \cdot \left(\alpha^r - \beta^r\right)^2}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \cdot \beta^* \cdot (-1)^{n-r} \cdot \left(\alpha^r - \beta^r\right)^2}{(\alpha - \beta)^2}.$$

■

Teorema 42: A Identidade de Cassini para os OF, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$O_{n+1} \cdot O_{n-1} - O_n^2 = (-1)^n \cdot \alpha^* \cdot \beta^* \cdot$$

Demonstração: Como $O_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $\alpha\beta = -1$, segue que:

$$O_{n+1} \cdot O_{n-1} - O_n^2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n-1} - \beta^* \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 =$$

$$= \frac{2\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n - \alpha^* \alpha^{n+1} \beta^* \beta^{n-1} - \alpha^* \alpha^{n-1} \beta^* \beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(2 - \alpha\beta^{-1} - \beta\alpha^{-1}\right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^n \left(\frac{2\alpha\beta - a^2 - \beta^2}{\alpha\beta}\right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^* \cdot \alpha^{n-1} \cdot \beta^* \cdot \beta^{n-1} \cdot (-1)(\alpha - \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} =$$

$$= \alpha^* \cdot \beta^* \cdot (\alpha\beta)^{n-1} \cdot (-1) =$$
$$= (-1)^n \cdot \alpha^* \cdot \beta^* \cdot$$

■

Teorema 43: A Identidade de d'Ocagne para os OF, com $n, m \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$O_{m+1} \cdot O_n - O_m \cdot O_{n+1} = \frac{\alpha^* \beta^* \left(\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n\right)}{\alpha - \beta} \cdot$$

Demonstração: Como $O_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}$, segue que:

$$O_{m+1} \cdot O_n - O_m \cdot O_{n+1} =$$
$$= \left(\frac{\alpha^* \alpha^{m+1} - \beta^* \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^* \alpha^m - \beta^* \beta^m}{\alpha - \beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) =$$
$$= \frac{\alpha^* \alpha^m \beta^* \beta^n (-\alpha + \beta) + \alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^m (-\beta + \alpha)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{\alpha^* \alpha^m \beta^* \beta^n (-\alpha + \beta) - \alpha^* \alpha^n \beta^* \beta^m (-\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{(-\alpha + \beta) \alpha^* \beta^* \left(\alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m\right)}{(\alpha - \beta)^2} =$$
$$= \frac{(-1) \alpha^* \beta^* \left(\alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m\right)}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{\alpha^* \beta^* \left(\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n\right)}{\alpha - \beta} \cdot$$

■

A seguir, os Octonions serão discutidos numa abordagem da variável complexa, evidenciando a Fórmula de Binet e sua representação para índices inteiros. Além disso, o próximo tópico é uma extensão da discussão realizada sobre os Quaternions na variável complexa.

3.5.1 Os Octonions de Fibonacci na Variável Complexa

Nesta seção, os Octonions serão discutidos no contexto da variável complexa. Semelhantemente à abordagem quaterniônica, os termos da sequência generalizada de Fibonacci serão representados com a notação $F_n(a,z)$ onde *a* e *z* são variáveis complexas. Além do mais, este tópico amplia a discussão dos QF para uma álgebra de oito dimensões. Apresentando, assim, uma extensão das relações quaterniônicas discutidas, *a priori*, por Alves & Oliveira (2017), numa abordagem da variável complexa. Nesse sentido, destaca-se a Fórmula variante de Binet e sua extensão para índices inteiros. A seguir, serão discutidas definições e relações octoniônicas para o MF na variável complexa.

Definição 22: Os OF de ordem *n* são descritos para $n \geq 0$, nas variáveis *a* e *z*, por:

$$O_n(a,z) = F_n(a,z)e_0 + F_{n+1}(a,z)e_1 + F_{n+2}(a,z)e_2 + F_{n+3}(a,z)e_3 + \\ + F_{n+4}(a,z)e_4 + F_{n+5}(a,z)e_5 + F_{n+6}(a,z)e_6 + F_{n+7}(a,z)e_7 \cdot$$

$$O_n(a,z) = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}(a,z)e_s \cdot$$

Com isso, essa definição permite determinar alguns termos da sequência generalizada octoniônica para o MF, denotada por $\{O_n(a,z)\}_{n\in IN}$. Veja:

$$\begin{aligned} O_0(a,z) &= F_0(a,z)e_0 + F_1(a,z)e_1 + F_2(a,z)e_2 + \cdots + F_7(a,z)e_7 \\ O_1(a,z) &= F_1(a,z)e_0 + F_2(a,z)e_1 + F_3(a,z)e_2 + \cdots + F_8(a,z)e_7 \\ O_2(a,z) &= F_2(a,z)e_0 + F_3(a,z)e_1 + F_4(a,z)e_2 + \cdots + F_9(a,z)e_7 \\ &\vdots \\ O_n(a,z) &= F_n(a,z)e_0 + F_{n+1}(a,z)e_1 + F_{n+2}(a,z)e_2 + \cdots + F_{n+7}(a,z)e_7 \cdot \end{aligned}$$

Teorema 44: Para os OF de ordem *n*, nas variáveis *a* e *z*, vale a seguinte relação recorrente:

$$O_{n+1}(a,z) = az \cdot O_n(a,z) + a^2 O_{n-1}(a,z), \ \forall \text{ inteiro } n \geq 0.$$

Demonstração: Como $O_n(a,z) = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}(a,z)e_s$, então, pode-se escrever:

$$az \cdot O_n(a,z) + a^2 O_{n-1}(a,z) = \\ = az(F_n(a,z)e_0 + F_{n+1}(a,z)e_1 + \cdots + F_{n+7}(a,z)e_7) + a^2(F_{n-1}(a,z)e_0 + F_n(a,z)e_1 + \cdots + F_{n+6}(a,z)e_7) = \\ = (azF_n(a,z) + a^2F_{n-1}(a,z))e_0 + (a\,z\,F_{n+1}(a,z) + a^2F_n(a,z))e_1 + \cdots + (a\,z\,F_{n+7}(a,z) + a^2F_{n+6}(a,z))e_7 = \\ = F_{n+1}(a,z)e_0 + F_{n+2}(a,z)e_1 + F_{n+3}(a,z)e_2 + \cdots + F_{n+8}(a,z)e_7 =$$

$$= O_{n+1}(a,z).$$

■

Corolário 07: Um OF de ordem *n* é descrito, nas variáveis *a* e *z*, para índices inteiros, por:

$$Q_{-n}(a,z) = (-1)^{-n-1}a^{-2n}\cdot(F_n(a,z)e_0 - a^2F_{n-1}(a,z)e_1 + a^4F_{n-2}(a,z)e_2 - a^6F_{n-3}(a,z)e_3 + \\ + a^8F_{n-4}(a,z)e_4 - a^{10}F_{n-5}(a,z)e_5 + a^{12}F_{n-6}(a,z)e_6 - a^{14}F_{n-7}(a,z)e_7)\cdot$$

Demonstração: Como $F_{-n}(a,\mathrm{z}) = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}}F_n(a,\mathrm{z})$, pode-se escrever:

$$O_{-n}(a,z) = F_{-n}(a,z)e_0 + F_{-n+1}(a,z)e_1 + F_{-n+2}(a,z)e_2 + \cdots + F_{-n+7}(a,z)e_7 = \\ = F_{-n}(a,z)e_0 + F_{-(n-1)}(a,z)e_1 + F_{-(n-2)}(a,z)e_2 + \cdots + F_{-(n-7)}(a,z)e_7 = \\ = \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}}\cdot F_n(a,z)e_0 + \frac{1}{(-1)^{n}a^{2n-2}}\cdot F_{n-1}(a,z)\cdot e_1 + \cdots + \frac{1}{(-1)^{n-6}a^{2n-14}}\cdot F_{n-7}(a,z)e_7 = \\ = \frac{1}{(-1)^{n+1}a^{2n}}\cdot(F_n(a,z)e_0 - a^2F_{n-1}(a,z)e_1 + a^4F_{n-2}(a,z)e_2 - a^6F_{n-3}(a,z)e_3 + \\ + a^8F_{n-4}(a,z)e_4 - a^{10}F_{n-5}(a,z)e_5 + a^{12}F_{n-6}(a,z)e_6 - a^{14}F_{n-7}(a,z)e_7)\cdot$$

■

Teorema 45: Sejam $\overline{\overline{\alpha(\mathrm{a,z})}} = e_0 + \alpha(\mathrm{a,z})e_1 + \alpha(\mathrm{a,z})^2e_2 + \alpha(\mathrm{a,z})^3e_3 + \alpha(\mathrm{a,z})^4e_4 + \alpha(\mathrm{a,z})^5e_5 + \alpha(\mathrm{a,z})^6e_6 + \\ + \alpha(\mathrm{a,z})^7e_7$ e $\overline{\overline{\beta(\mathrm{a,z})}} = e_0 + \beta(\mathrm{a,z})e_1 + \beta(\mathrm{a,z})^2e_2 + \beta(\mathrm{a,z})^3e_3 + \beta(\mathrm{a,z})^4e_4 + \beta(\mathrm{a,z})^5e_5 + \beta(\mathrm{a,z})^6e_6 + \\ + \beta(\mathrm{a,z})^7e_7$, a Fórmula de Binet para os OF de ordem *n*, nas variáveis *a* e *z*, é:

$$O_n(a,z) = \frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z) - \overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)}{\alpha(a,z) - \beta(a,z)},\ \forall\ n \geq 0\,.$$

Demonstração: Sabendo que $O_n(a,z) = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}(a,z)e_s$ e considerando que:

$$\alpha^n(a,z) = \alpha(a,z)\cdot F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z) \Rightarrow \alpha^n(a,z) = \alpha(a,z)\cdot O_n(a,z) + a^2\cdot O_{n-1}(a,z)$$

$$\beta^n(a,z) = \beta(a,z)\cdot F_n(a,z) + a^2\cdot F_{n-1}(a,z) \Rightarrow \beta^n(a,z) = \beta(a,z)\cdot O_n(a,z) + a^2\cdot O_{n-1}(a,z)\,.$$

Segue que:

$$\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)+a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=$$
$$=\alpha(a,z)(F_n(a,z)e_0+F_{n+1}(a,z)e_1+\cdots+F_{n+7}(a,z)e_7)+a^2(F_{n-1}(a,z)e_0+F_n(a,z)e_1+\cdots+F_{n+6}(a,z)e_7)=$$
$$=\left[\alpha(a,z)\cdot F_n(a,z)+a^2\cdot F_{n-1}(a,z)\right]e_0+\left[\alpha(a,z)\cdot F_{n+1}(a,z)+a^2\cdot F_n(a,z)\right]e_1+\cdots+$$
$$+\left[\alpha(a,z)\cdot F_{n+7}(a,z)+a^2\cdot F_{n+6}(a,z)\right]e_7=$$
$$=\alpha(a,z)^n e_0+\alpha(a,z)^{n+1}e_1+\alpha(a,z)^{n+2}e_2+\alpha(a,z)^{n+3}e_3+\cdots+\alpha(a,z)^{n+7}e_7=$$
$$=\alpha(a,z)^n\left(e_0+\alpha(a,z)e_1+\alpha(a,z)^2e_2+\alpha(a,z)^3e_3+\cdots+\alpha(a,z)^7e_7\right)=$$
$$=\alpha(a,z)^n\cdot\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot$$

Dessa forma, determina-se $\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)+a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\alpha^n(a,z)\cdot\overline{\overline{\alpha(a,z)}}$. E, de modo análogo, obtém-se $\beta(a,z)\cdot O_n(a,z)+a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\beta^n(a,z)\cdot\overline{\overline{\beta(a,z)}}$. Assim, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)+a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)\\ \beta(a,z)\cdot O_n(a,z)+a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)-\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)\\ a^2\cdot O_{n-1}(a,z)=\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)-\beta(a,z)\cdot O_n(a,z)\end{cases}$$

Igualando as equações referentes à $a^2\cdot O_{n-1}(a,z)$, tem-se que:

$$\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)-\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)=\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)-\beta(a,z)\cdot O_n(a,z)$$
$$\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)=\alpha(a,z)\cdot O_n(a,z)-\beta(a,z)\cdot O_n(a,z)$$
$$\therefore O_n(a,z)=\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}.$$

■

Corolário 08: Para todo inteiro *n*, a Fórmula de Binet para os OF de ordem *n*, nas variáveis *a* e *z*, é dada por:

$$Q_{-n}(a,z)=\left(-a^2\right)^{-n}\cdot\left(\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\beta^n(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\alpha^n(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right).$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, segue que:

$$O_{-n}(a,z)=\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\alpha^{-n}(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\beta^{-n}(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=$$

$$=\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^{n}(a,z)}\right)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\left(\frac{1}{\beta^{n}(a,z)}\right)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\alpha(a,z)\cdot\beta(a,z)\right)^{n}}\cdot\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\beta^{n}(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\alpha^{n}(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}=$$

$$=\frac{1}{\left(-a^{2}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{\overline{\overline{\alpha^{n}(a,z)}}\cdot\beta^{n}(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\alpha^{n}(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right)=$$

$$=\left(-a^{2}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{\overline{\overline{\alpha(a,z)}}\cdot\beta^{n}(a,z)-\overline{\overline{\beta(a,z)}}\cdot\alpha^{n}(a,z)}{\alpha(a,z)-\beta(a,z)}\right).$$

■

Finalmente, encerra-se o capítulo sobre o campo epistêmico-matemático desta pesquisa. Além do mais, esse estudo do modelo complexo de Fibonacci é um aporte teórico que oferece ao professor-pesquisador um repertório de relações recorrentes complexas definidas para o MF, a fim de selecionar conteúdos que serão transpostos para situações didáticas.

4 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DA COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI NO CURSO DE LICENCIATURA

Esta pesquisa teve sua fase experimental desenvolvida num curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de HM, por meio da transposição didática da complexificação do MF. Para isso, foi realizado um estudo do campo epistêmico-matemático, de modo que se pretendia explorar a sequência generalizada de Fibonacci numa abordagem epistemológica e dentro de um contexto cognitivo-didático no âmbito da formação inicial de professores de Matemática.

Para isso, foram elaboradas situações didáticas compostas por situações-problema. Essas situações foram concebidas com enfoque na TSD. Dessa forma, doravante, será discutido o percurso metodológico que antecede a realização didática, tal que, são apresentadas a concepção das situações didáticas e a predição dos possíveis comportamentos e soluções que os alunos possam manifestar durante a discussão das situações-problema. Isso caracteriza, respectivamente, a fase de concepção e análise *a priori* pregada pela ED.

4.1 Concepção das Situações Didáticas

Na segunda etapa da ED, vale destacar o momento de concepção das situações didáticas, se baseando nas ideias de Pais (2002, p. 101-102), em que as variáveis são definidas numa perspectiva microdidática, a fim de determinar a relação entre o processo de complexificação da SF e a proposição das situações-problema. Segundo Almouloud (2016, p.116), as situações-problema são questões abertas com enunciados objetivos ou elaboradas "em um contexto mais ou menos matematizado", cuja "função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema". Assim, vale ressaltar que, é necessário transformar as relações matemáticas Fibonaccianas em um conteúdo a ser ensinado, tendo em vista que o modelo complexificado de Fibonacci, como já foi discutido anteriormente, é abordado na literatura da Matemática Pura. Dessa forma:

> Em decorrência, o levantamento dos diversos obstáculos a serem considerados permitirá análise dos fatores que permitirão superar os problemas observados na aprendizagem, em conformidade com os objetivos da pesquisa, o que viabiliza a etapa seguinte: a concepção da sequência didática. (POMMER, 2013, p. 23).

Nesse sentido, na concepção da situação didática, compreende-se o processo de complexificação da SF como um conteúdo a ser trabalhado em sala de aula, assim, foi formulado a seguinte hipótese didática: o desenvolvimento de um estudo sobre o processo de complexificação da SF, a fim de investigar seus teoremas e suas propriedades, objetivando explorar sua forma complexa dentro de um contexto de ensino de HM, trabalhada com o viés didático da TSD, oportuniza mobilizar o pensamento intuitivo do estudante, conduzindo-o ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial.

A hipótese foi elaborada, fundamentando-se no fato de que a ED em complementaridade com TSD apresenta pressupostos epistemológicos, didáticos e cognitivos, de modo que centraliza suas pesquisas na investigação de relações matemáticas trabalhadas no contexto da Didática da Matemática. Além do mais, a determinação da disciplina de HM, como um local para a realização didática, foi bastante relevante, pois a HM está, intrinsecamente, associada à epistemologia dos conceitos matemáticos oriundos de um contexto e período histórico. Assim, na construção de teoremas e propriedades, os alunos tiveram que utilizar argumentos válidos em uma demonstração matemática. Portanto, na realização didática, foi enfatizada a evolução da estrutura algébrica da SF numa perspectiva histórica.

À vista disso, nas análises prévias da ED, a complexificação do MF foi definida como campo epistêmico-matemático, que fundamenta a concepção das situações-problema. Nesse sentido, vale recordar que relações recorrentes para os números Gaussianos de Fibonacci, teoremas inerentes à classe dos PBF, recorrências quaterniônicas e os Octonions foram assuntos estudados, com a finalidade de especificar um conteúdo para ser trabalhado em sala de aula. Assim, os PBCF foi o conteúdo selecionado para elaboração das situações-problema.

Além do mais, a classe dos PBCF foi selecionada como o conteúdo para ser trabalhado em sala de aula, pelo fato de que as relações matemáticas abordadas, nesse repertório matemático, exigem poucos conhecimentos prévios e matemáticos dos alunos. Por exemplo, a maioria das propriedades matemáticas discutidas, nas situações didáticas, é validada por indução matemática que é um conteúdo visto no início do curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, a disciplina de HM não exige disciplinas como pré-requisitos.

Dessa forma, as situações-problema têm uma função de nortear a compreensão da complexificação do MF, através da inserção da unidade imaginária i e de variáveis numa

abordagem polinomial e matricial da sequência generalizada de Fibonacci. A seguir, na análise *a priori,* é feita uma análise das situações didáticas, buscando descrever possíveis comportamentos dos alunos, diante da resolução das situações-problema propostas.

4.2 Análise *a priori* das Situações Didáticas

As situações didáticas foram estruturadas como um conjunto de situações-problema organizadas, numa perspectiva histórica e evolutiva das representações algébricas do MF. Dessa forma, esse conjunto aborda questões inerentes à classe dos PBCF, no que diz respeito à forma generalizada e complexa da SF. Ou seja, nas situações de ensino, as representações matriciais, a extensão para índices inteiros e a Fórmula de Binet são exploradas para a classe dos PBCF.

Nesse sentido, neste tópico, será descrito o que se espera nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD durante a resolução das situações-problema. Tendo em vista que as situações-problema são elaboradas com enfoque na TSD. Doravante, serão discutidas as situações-problema que compõem o questionário aplicado (Apêndice A).

Figura 12 – Primeiros termos das sequências bivariadas polinomiais de Fibonacci e Lucas

n	$F_n(x,y)$		n	$L_n(x,y)$
0	0		0	2
1	1		1	ix
2	ix		2	$-x^2+2y$
3	$-x^2+y$		3	$-x^3i+3xyi$
4	$-x^3i+2xyi$	and	4	$x^4-4x^2y+2y^2$
5	$x^4-3x^2y+y^2$		5	$x^5i-5x^3yi+5xy^2i$
6	$x^5i-4x^3yi+3y^2xi$		6	$-x^6+6x^4y-9x^2y^2+2y^3$
7	$-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3$		7	$-x^7i+7x^5yi-14x^3y^2+7xy^3i$
⋮	⋮		⋮	⋮

Fonte: Asci & Gurel (2012).

No artigo científico de Asci & Gurel (2012), pode-se observar os primeiros termos da sequência dos PBCF (Figura 12). A partir de então, será discutido o conjunto de situações didáticas. Nesse contexto, são propostas algumas questões norteadoras, tal como, a situação-problema (1): De acordo com essa tabela, pede-se para verificar se existe alguma relação da

mesma com a sequência (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...), caso compreenda que sim, explicá-la detalhadamente, em seguida, determine outros dos termos presentes na sequência dos PBCF.

Na situação-problema (1), na etapa de ação, o aluno deve assumir a responsabilidade de resolver o problema proposto. Assim, partir da análise da Figura 12, espera-se que o aluno busque estabelecer uma relação entre as sequências $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...)$ e $(0,1,ix,-x^2+y,-x^3i+2xyi,x^4-3x^2y+y^2,...)$, observando que cada termo da segunda sequência é um polinômio nas variáveis x e y, além de enxergar a relação de seus coeficientes com a primeira sequência. Assim, os alunos deverão partir da definição do modelo notacional de Fibonacci $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para um inteiro $n \geq 1$, para se obter uma relação de recorrência para os PBCF.

Na situação de formulação, neste momento, deve ocorrer a troca de informações entre o aluno e o meio organizado, ou seja, a linguagem usada habitualmente deve passar pelo processo de formalização. Para isso, se faz necessário que os alunos se apropriem de novos conhecimentos para elaborar argumentos, que posteriormente, possam ser validados. Dessa forma, dando continuidade a fase anterior, o aluno deve inserir na definição $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ com $n \geq 1$, as duas variáveis *x*, *y* e a unidade imaginária *i*, procurando determinar a seguinte recorrência: $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$, assumindo $f_0(x,y) = 0$ e $f_1(x,y) = 1$.

A fase de validação é caracterizada por ter como objetivo, convencer os interlocutores de que os argumentos utilizados para a resolução do problema são válidos, além do mais, possibilita ao aluno provar ou refutar as conjecturas elaboradas, por meio de uma linguagem matemática mais apropriada. À vista disso, nesta etapa, o aluno prosseguirá realizando alguns cálculos na relação $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$ para $n \geq 1$, partindo dos valores iniciais $f_0(x,y) = 0$ e $f_1(x,y) = 1$. E, assim finalmente, o estudante deverá encontrar alguns dos termos da sequência dos PBCF.

A institucionalização acontece com a mediação do professor, que deve deixar explícita sua intenção, ao conferir as propriedades construídas, a fim de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído por meio da formalização e generalização. Dessa maneira, quando o docente retoma posse do problema, deve-se ter condições de verificar que a classe

dos PBCF representa uma generalização da SF, na forma bivariada e complexa, obtida a partir da inserção das variáveis *x, y* e da unidade imaginaria *i*.

A seguir, será discutida a representação dos termos da sequência dos PBCF, na forma de determinante de uma matriz definida por Asci & Gurel. Assim, tem-se a seguinte situação-problema (2): Na Figura 13, tem-se uma matriz proposta por Asci & Gurel (2012). Explique, com suas palavras, a função e as propriedades dessa matriz, inclusive, seu comportamento para as ordens 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, etc. Além disso, considere o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0.$

Dessa forma, na situação-problema (2), a etapa de ação é um momento, em que o aluno deve analisar o comportamento da matriz proposta, através de sua construção nas ordens 2x2, 3x3, 4x4, e assim por diante, a fim de encontrar uma generalização e definir a matriz como tridiagonal. Na formulação, espera-se que o aluno calcule os determinantes das matrizes, além disso, consiga identificá-los como elementos da sequência dos PBCF e, assumindo $D_0(x,y) = 0$, estabelecer uma relação com o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0$.

Figura 13 – Matriz tridiagonal.

$$D_n(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ix & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

Fonte: Asci & Gurel (2012).

Continuando o raciocínio da etapa anterior, na fase de validação, o aluno deve relacionar o teorema $D_0(x,y) = 0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0,$ à recorrência $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1,$ com os valores iniciais $f_0(x,y) = 0$ e $f_1(x,y) = 1$, e a partir deste, por indução matemática provar a veracidade do teorema. Desse modo, na institucionalização, o docente deve ter argumentos que permitam investigar o comportamento tridiagonal da matriz, com origem na sua representação generalizada, assim como a identificação dos termos da sequência dos PBCF, como resultado do cálculo do determinante

da matriz, servindo assim como pressupostos para a validação do teorema $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0.$

Dando prosseguimento, será enunciada a seguinte situação-problema (3): A Fórmula de Binet conhecida por $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ foi formulada por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786 – 1856). Existe uma fórmula análoga para a classe dos PBCF? Caso exista, deduzir a mesma. Considere a equação $t^2 - ixt - y = 0.$ Neste caso, no momento de ação, a partir da Fórmula de Binet, o aluno deverá propor a expressão $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ para $n \geq 0$ como uma Fórmula variante de Binet, assim como foi formulado, na situação-problema (1), com recorrência em $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1,$ com os valores iniciais $f_0(x,y) = 0$ e $f_1(x,y) = 1$.

Na formulação, o aluno deve determinar as raízes da equação característica $t^2 - ixt - y = 0,$ obtendo como resultados: $\alpha(x,y) = \frac{ix + \sqrt{4y - x^2}}{2}$ e $\beta(x,y) = \frac{ix - \sqrt{4y - x^2}}{2}$, além disso, deve-se propor escrever a definição $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y),$ para $n \geq 1,$ em função da Fórmula variante de Binet $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$.

Na fase de validação, partindo da formulação elaborada, desenvolvendo-a, espera-se que o aluno valide $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0,$ considerando o índice $n+1,$ com a obtenção de $f_{n+1}(x,y) = \frac{\alpha^{n+1}(x,y) - \beta^{n+1}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$. Na situação de institucionalização, finalmente, deve-se ter argumentos para se determinar uma Fórmula análoga para a classe dos PBCF.

Numa perspectiva histórica, apresenta-se a situação-problema (4): Baseando-se na tabela da Figura 14, ao comparar a coluna da esquerda com a coluna da direita, é possível interpretar e significar uma perspectiva histórica-evolutiva da sequência concebida por Leonardo Pisano em 1202?

Na situação-problema (4), na etapa de ação, interpretando a Figura 14, por meio da comparação entre as duas colunas, o aluno deverá observar que houve um levantamento bibliográfico do MF e sua respectiva extensão representada por propriedades dos PBCF. Na formulação, o aluno deve compreender a existência de um hiato histórico da SF, no que diz respeito a sua representação generalizada, por meio da classe de polinômios bivariados na sua forma complexa, assumindo também representações matriciais e por meio de expressões como funções geradoras e a Fórmula variante de Binet, assim como sua extensão para índices inteiros. O que caracteriza uma evolução histórica do MF.

Figura 14 – Quadro comparativo da SF com o modelo matemático dos PBCF.

Descrição histórica	Propriedades dos polinomios bivariados de Fibonacci
$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ Fórmula fornecida por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786 – 1856).	$F_n(x,y) = \frac{\left(\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ Fórmula variante de Binnet
$g(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$ Abraham De Moivre (1667–1754) empregou a noção de função geradora ao modelo de Fibonacci.	$g(t) = \frac{t}{1-ix\cdot t - y\cdot t^2}$ Função geradora do modelo PBF
$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial estudada em 1960, por Charles King (GOULD, 1981)	$Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial introduzida por Asci & Gurel (2013).
$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ Processo de extensão da SF ao campo dos índices inteiros discutida por Broussseau (1963)	$F_{-n}(x,y) = \frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}$ Processo de extensão da SPF ao campo dos índices inteiros
$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ Identidade formulada por Domênico Cassini (1625 – 1712)	$F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y) - F_n(x,y)^2 = (-1)^n y^{n-1}$ Fórmula variante de Cassini fornecida por Asci & Gurel (2013).
$f_m \setminus f_n \Leftrightarrow m \setminus n$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$F_m(x,y) \setminus F_n(x,y) \Leftrightarrow m \setminus n$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$mdc(F_n(x,y), F_{n+1}(x,y)) = 1$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$mdc(F_n(x,y), F_{n+1}(x,y)) = 1$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$\begin{cases} H_0(x,y) = a_0, H_1(x,y) = a_1, \\ H_{n+1}(x,y) = x\cdot H_n(x,y) + y\cdot H_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Polinômios bivariados introduzidos por Catalani em 2004.	$\begin{cases} F_0(x,y) = 0, F_1(x,y) = 1, \\ F_{n+1}(x,y) = ix\cdot F_n(x,y) + y\cdot F_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Forma complexa dos PBF introduzidos por Asci & Gurel (2012; 2013)

Fonte: Alves & Catarino (2017).

Desse modo, a validação é feita numa vertente histórica das representações matemáticas para o MF, assim, espera-se que o aluno note que a generalização apresentada na

Figura 14, para a SF, ocorre inicialmente através da discussão dos PBCF, sendo essa representação possível devido à inserção das variáveis *x, y* e da unidade imaginaria *i* nas relações recorrentes do MF, expressando-o em diferentes expressões matemáticas, proporcionando formas generalizadas da SF, dentro de um processo evolutivo.

Com isso, na institucionalização, pode-se formalizar que Leonardo Pisano modeliza a SF a partir da situação-problema sobre a descrição da reprodução dos coelhos, de onde se obtém a sequência $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$. Assim, a situação discutida nesta fase, permite fazer uma interpretação numa perspectiva histórica do desenvolvimento evolutivo da SF, quanto a sua representação generalizada por meio dos PBCF.

Finalmente, encerra-se o conjunto de situações didáticas com a discussão da seguinte situação-problema (5): Argumente e deduza qualquer propriedade da sequência de Fibonacci e que possa ser relacionada com o modelo matemático dos PBCF. Justifique essa relação e considere a equação $x^2 - x - 1 = 0$. Na ação, o estudante deve comparar as duas colunas (Figura 14) e selecionar uma propriedade, a fim de entender como é feita a generalização das propriedades para os PBCF. Na fase seguinte, supõe-se que a propriedade selecionada caracterize uma extensão para índices inteiros.

Assim, na fase de formulação, o aluno deve pensar em escrever as propriedades $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x, y) = \dfrac{-f_n(x, y)}{(-y)^n}$ em função da Fórmula de Binet e da sua fórmula variante respectivamente. Desse modo, no momento de validação, espera-se que o aluno desenvolva os cálculos para índices inteiros, primeiramente, para a expressão $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, a fim de se obter $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$. Em seguida, de modo análogo para $f_n(x, y) = \dfrac{\alpha^n(x, y) - \beta^n(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$, encontrando $f_{-n}(x, y) = \dfrac{-f_n(x, y)}{(-y)^n}$.

Para isso, vale comentar que, assim como foi estudado na situação-problema (3) para a equação $t^2 - ixt - y = 0$, também se deve determinar as raízes para de $x^2 - x - 1 = 0$, a fim de realizar possíveis simplificações. À vista disso, na institucionalização, deve formalizar e sistematizar os argumentos para verificar que as propriedades $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, que é uma

extensão da SF, e $f_{-n}(x,y)=\frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$, que é uma extensão dos PBCF, fazem parte do processo de generalização da SF, no contexto dos índices inteiros. A seguir, tem-se a fase de experimentação, na qual serão explicadas como e onde foram aplicadas as situações-problema, os sujeitos da pesquisa e quais métodos foram usados para a coleta de dados.

4.3 Experimentação

A experimentação aconteceu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) no campus Fortaleza, no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de HM, 3º semestre. A pesquisa contou com a participação de sete alunos matriculados nessa disciplina. Além do mais, a pesquisa tem o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (ver Anexo C), dessa forma, foi disponibilizado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos alunos participantes (ver Apêndice B).

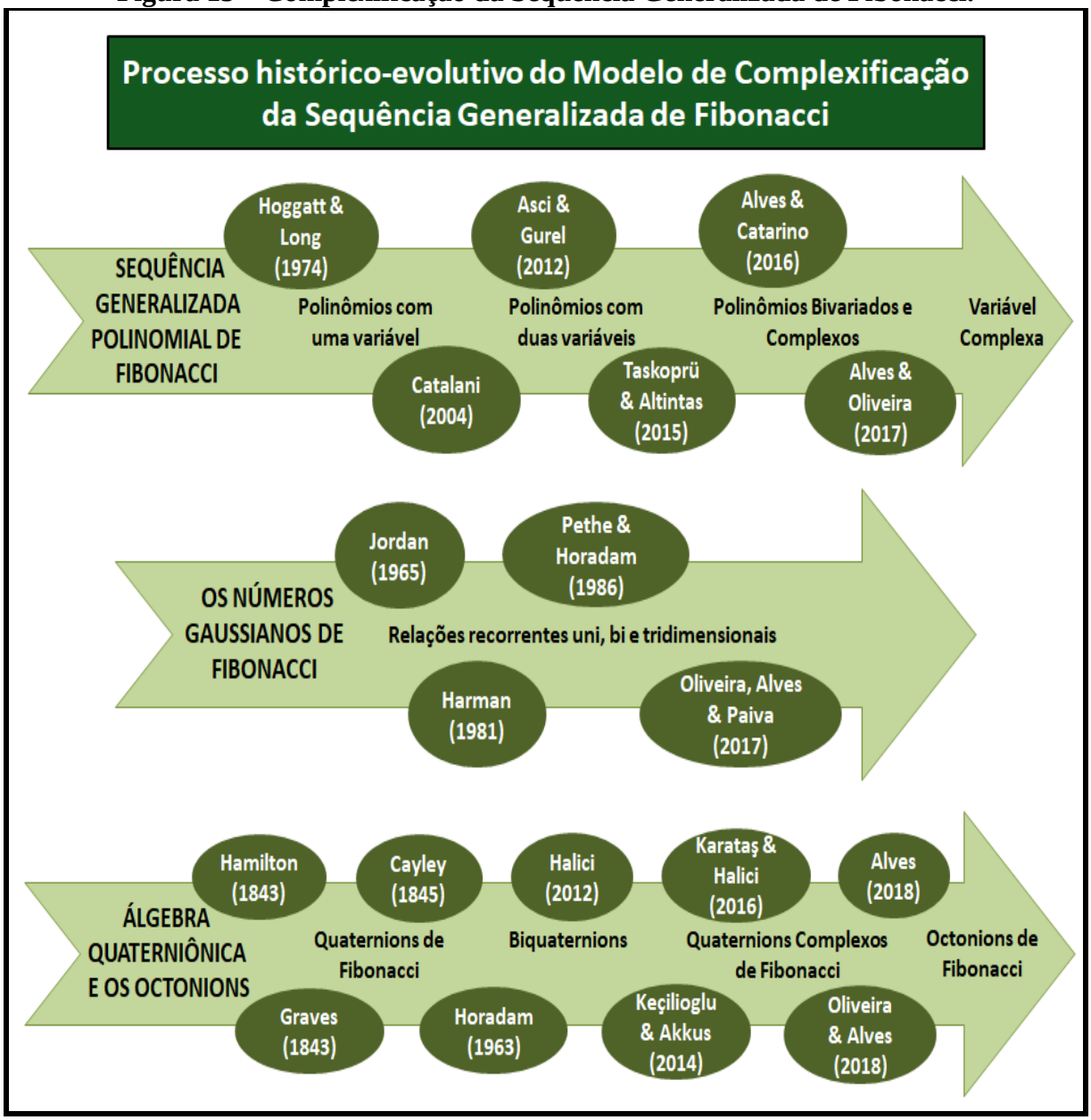
Com isso, a aplicação aconteceu durante oito dias, em formas de aulas de uma hora e meia, realizadas como situações didáticas com enfoque na TSD. As situações-problema foram propostas em uma lista de exercícios que foram discutidos em grupo e as estratégias de soluções foram descritas no quadro e/ou papel. Nos três primeiros dias, foram apresentados o MF e sua perspectiva histórica e evolutiva, evidenciando o viés epistemológico-matemático da SF. E, os demais dias foram organizados da seguinte forma: para cada dia, foi discutida uma situação-problema distinta.

Além disso, foram realizados alguns procedimentos para a coleta de dados como: observações, registros fotográficos das produções escritas e gravações dos depoimentos dos alunos. No próximo tópico, serão analisados os dados e resultados obtidos durante a aplicação da TSD, assim, serão apresentadas as descrições e observações mais relevantes para a validação da pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

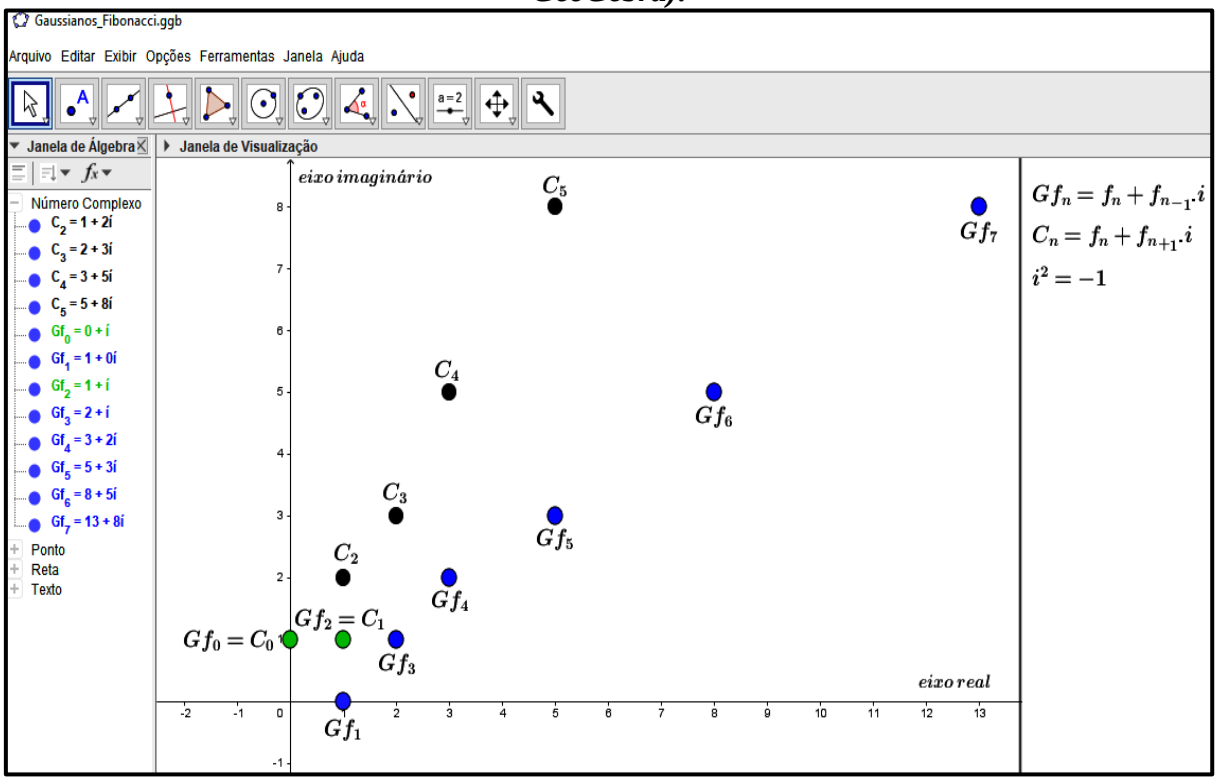
A análise dos dados, coletados durante a experimentação desta pesquisa, é feita de acordo com a fase de análise *a posteriori* da ED, tendo como enfoque a TSD, e tendo em vista a validação interna desta pesquisa. Dessa forma, a seguir, serão descritas observações significativas atinentes aos momentos de aplicação. Além do mais, vale recordar que um dos objetivos da pesquisa foi investigar as representações generalizadas da SF numa abordagem complexa. Nesse sentido, a Figura 15 ilustra a esquematização do processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci discutido nesta pesquisa.

Figura 15 – Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci.



Fonte: Elaboração da autora.

Figura 16 – Números Gaussianos de Fibonacci: plano de Argand-Gauss (*Software GeoGebra*).



Fonte: Elaboração da autora.

Assim, a Figura 15 apresenta o processo histórico-evolutivo da SF em duas abordagens: polinomial e do crescimento dimensional das representações Fibonaccianas. Dessa forma, primeiramente, a sequência generalizada polinomial de Fibonacci é desenvolvida em quatro categorias consecutivas: com uma variável, com duas variáveis, polinômios complexos e na variável complexa. Isso acontece com a inserção das variáveis e da unidade imaginária *i* na relação recursiva unidimensional de Fibonacci.

Além do mais, vale destacar que a inserção de unidades imaginárias, como *i*, *j* e *k*, proporciona um crescimento dimensional das representações generalizadas da SF. Desse modo, *a priori*, a inserção da componente imaginária *i* possibilita a representação algébrica da SF, na forma complexa com os números Gaussianos de Fibonacci, e sua visualização geométrica bidimensional (Figura 16). Os números bidimensionais fundamentam o estudo das relações recorrentes tridimensionais numa perspectiva *n*-dimensional. E, permitem explorar os termos da SF numa álgebra de quatro dimensões (Quaternions) e, posteriormente, em oito dimensões (Octonions).

Numa perspectiva da transposição didática, considerando o modelo complexo de Fibonacci, vale ressaltar que os PBCF foram selecionados para serem trabalhados na fase

experimental desta pesquisa, ou seja, em situações didáticas. Para isso, a TSD foi utilizada com o propósito de fundamentar o momento de experimentação da ED. Dessa forma, no próximo tópico serão discutidas as fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD relativas ao momento de aplicação desta pesquisa. Essas etapas foram identificadas durante a resolução das situações-problema, além disso, foi observado como o aluno pensa a partir de seus conhecimentos prévios e desenvolve um raciocínio inferencial.

Nesse sentido, as atividades foram elaboradas para se trabalhar, de modo implícito, a validade de teoremas e propriedades inerentes à SF, a fim de oportunizar a compreensão do processo histórico-evolutivo das representações generalizadas da SF. De fato, durante as aplicações, foram apontados obstáculos epistemológicos e cognitivos. Os entraves cognitivos estão relacionados com a dificuldade que, inicialmente, os alunos tiveram de compreender que o modelo notacional de Fibonacci para os naturais possui representações matriciais, polinomiais e complexas, além de poderem ser exploradas nas variáveis real e complexa. E, os obstáculos epistemológicos causam as dificuldades de aprendizagem. A seguir, serão detalhadas as análises feitas *a posteriori* e discutida a validação interna desta pesquisa.

5.1 Análise *a Posteriori* e Validação Interna da Pesquisa

As situações didáticas foram desenvolvidas com os alunos, através da proposição de atividades compostas por questões norteadoras, de modo que as questões instigassem os alunos a se empenhar para resolvê-las, isto é, para a efetivação do contrato didático. Ademais, as situações-problema abordam a construção de teoremas e propriedades, além de possibilitar a compreensão do processo de complexificação do MF no contexto da classe dos PBCF.

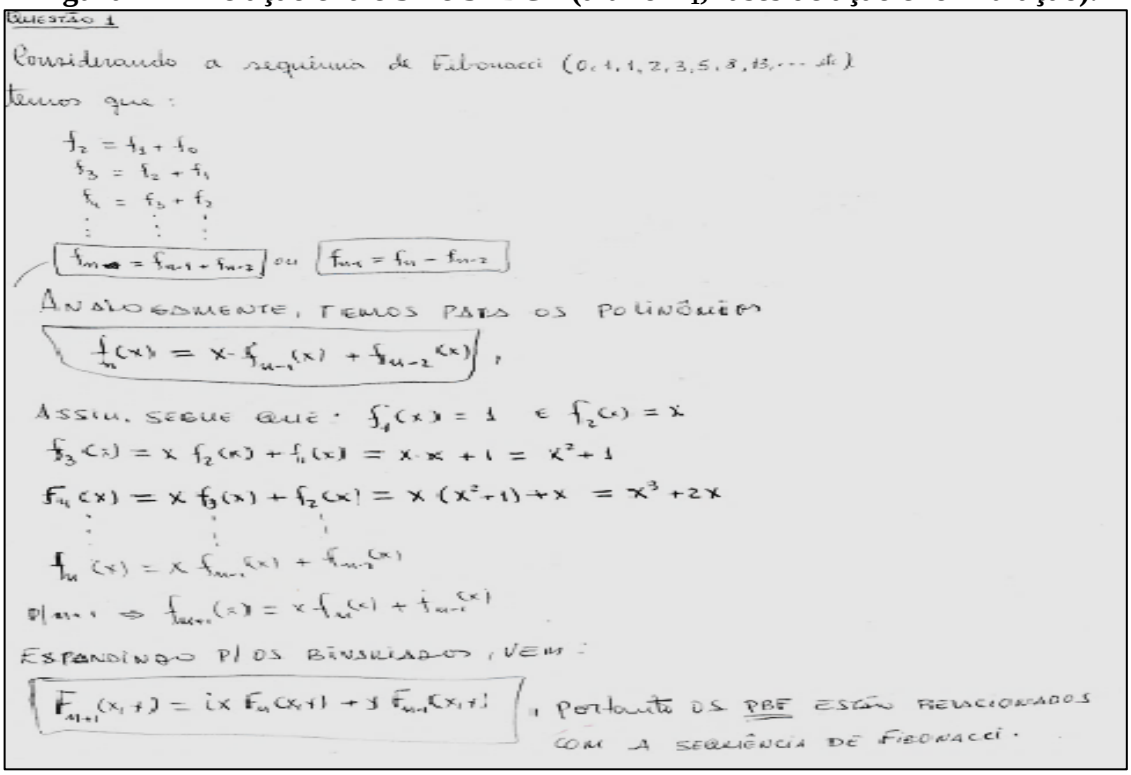
Nesse sentido, na discussão das situações-problema, são consideradas algumas variáveis didáticas. Essas variáveis estão relacionadas com a maneira como as questões foram propostas e resolvidas. Assim, as situações-problema direcionam os alunos à compreensão de que os PBCF surgem com a inserção, na relação recorrente unidimensional da SF, das variáveis e da unidade imaginária i. Assim, de início, o MF original foi apresentado aos alunos, desse modo, os estudantes sabiam que a Fórmula de Binet é uma fórmula fechada para determinação dos termos da SF. Com isso, as fases de validação, das questões que envolviam a discussão de teoremas e propriedades, foram caracterizadas pelo uso do método de indução matemática, tendo em vista que é um método de demonstração que faz parte do conhecimento

prévio da turma. Por fim, isso possibilitou a discussão de uma Fórmula variante de Binet e a extensão para índices inteiros dos PBCF.

À vista disso, a realização didática é iniciada através da distribuição da lista de exercícios aos alunos, orientando-os a interagir entre si para refletirem sobre quais elementos serão necessários para a resolução das situações-problema. E, assim, buscando sistematizar uma estratégia de resolução para, em seguida, formular argumentos que possam ser validados posteriormente. Nesse momento, as discussões e construções feitas pelos alunos são coletadas por meio de gravações de áudios e registro de imagens de suas produções.

Desse modo, na situação-problema (1), com o objetivo de estabelecer uma relação entre as sequências de Fibonacci e dos PBCF, além de determinar outros termos da sequência dos PBCF, nas fases de ação e formulação, pode-se observar na Figura 17 que o aluno A_1 estabeleceu uma relação entre as sequências $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$ e $(0, 1, ix, -x^2 + y, -x^3i + 2xyi, x^4 - 3x^2y + y^2, ...)$, além de descrever a definição do modelo notacional de Fibonacci $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, com inteiro $n \geq 1$, buscando obter a relação de recorrência $f_{n+1}(x, y) = ixf_n(x, y) + yf_{n-1}(x, y)$ para $n \geq 1$ dos PBCF.

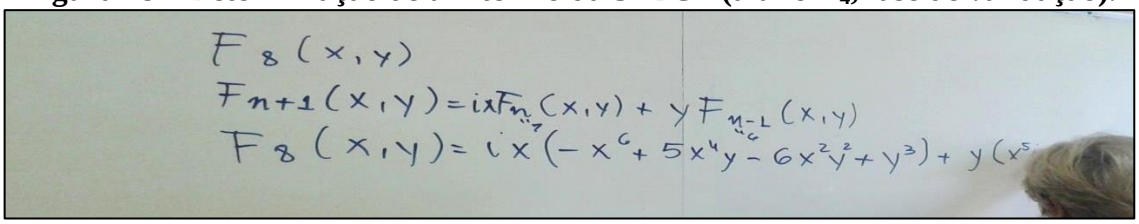
Figura 17 – Relação entre SF e SPBCF (aluno A_1, fases de ação e formulação).



Fonte: Dados da pesquisa.

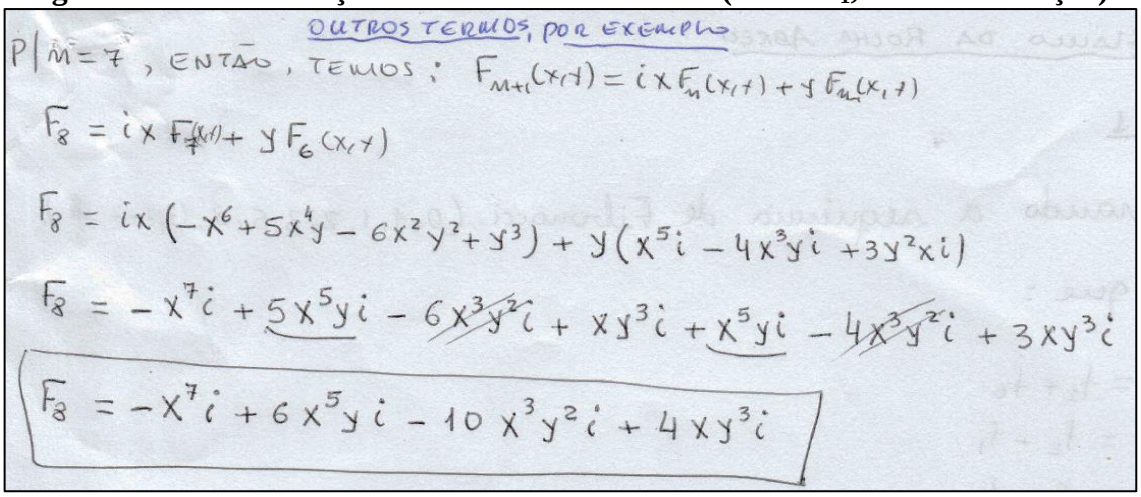
A fim de validar sua formulação, os alunos A_1 e A_4 realizaram alguns cálculos descritos nas Figuras 18 e 19, recorrendo à relação $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$, e como resultado determinaram um termo da Sequência dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (SPBCF).

Figura 18 – Determinação de um termo da SPBCF (aluno A_4, fase de validação).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 19 – Determinação de um termo da SPBCF (aluno A_1, fase de validação).



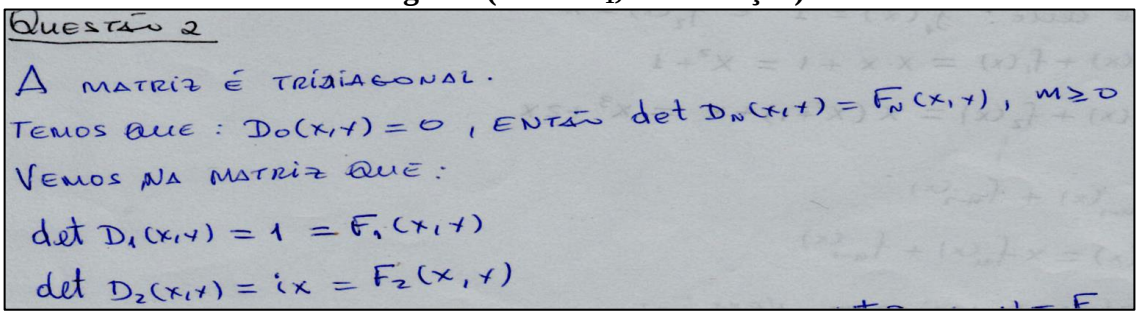
Fonte: Dados da pesquisa.

Dando continuidade, na situação-problema (2), é apresentada aos alunos uma matriz proposta por Asci & Gurel (2012), assim, propõe-se aos alunos que expliquem as funções e propriedades dessa matriz, inclusive seu comportamento para as ordens quadradas como 2x2, 3x3, 4x4, e assim por diante, considerando o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0$. Dessa forma, tem-se a situação de ação registrada na Figura 20. Assim, como o aluno A_1, o aluno A_5 também classifica a matriz proposta como "tridiagonal" quando argumenta:

> *Aluno A_5: [...] Essa matriz proposta por esses estudiosos vão originar os Polinômios Bivariados. A matriz diagonal é aquela que todos os elementos que não estão na diagonal principal são zero. Comparando aqui, essa tem três "camadas" como sendo três diagonais [...].*

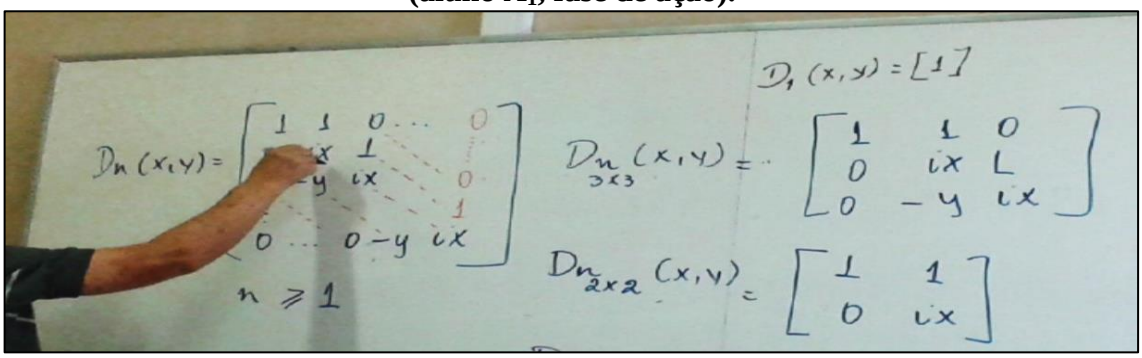
Nesse sentido, esses dois alunos também estudaram o comportamento da matriz nas ordens quadradas, tal fato pode ser observado nas Figuras 21 e 22.

Figura 20 – Caracterização da matriz proposta por Asci & Gurel (2012) como tridiagonal (aluno A_1, fase de ação).



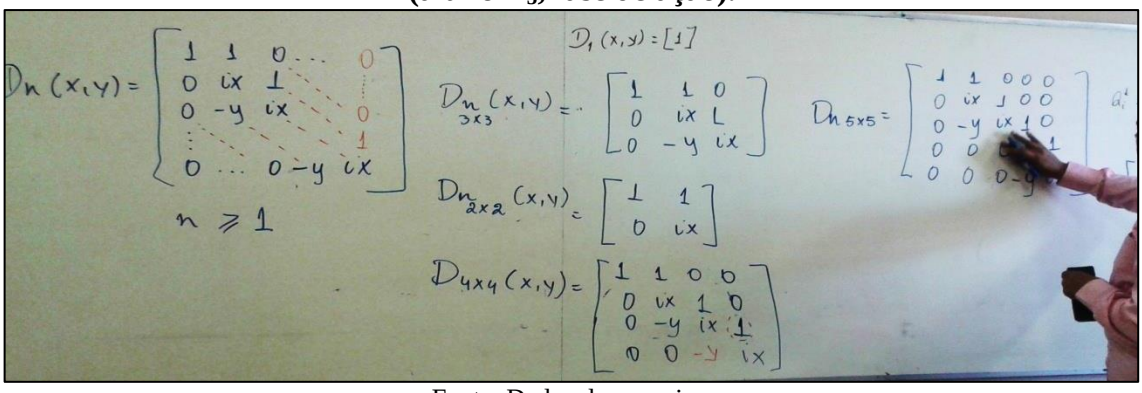
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 21 – Estudo do comportamento da matriz tridiagonal nas ordens quadradas (aluno A_1, fase de ação).



Fonte: Dados da pesquisa.

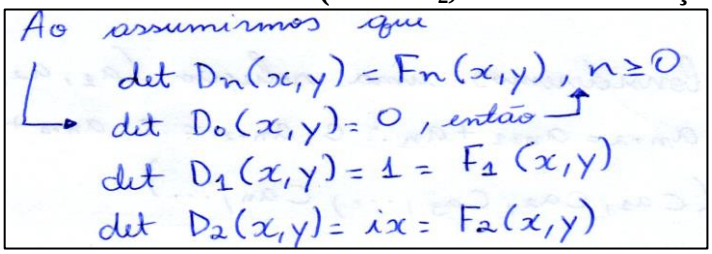
Figura 22 – Estudo do comportamento da matriz tridiagonal nas ordens quadradas (aluno A_5, fase de ação).



Fonte: Dados da pesquisa.

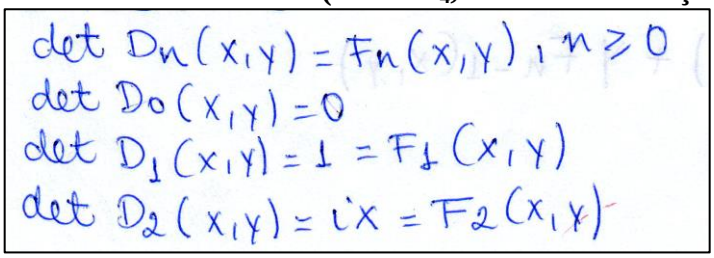
Assim, o momento de formulação, descrito nas Figuras 23 e 24, possibilitou os alunos A_2 e A_4 argumentarem a possível identificação do determinante das matrizes, como sendo uma representação dos elementos da sequência dos PBCF, a partir do momento em que se assume $D_0(x,y) = 0$, estabelecendo, assim, para $n \geq 0$, uma relação com o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y)$.

Figura 23 – Identificação do determinante das matrizes como sendo uma representação dos elementos da SPBCF (aluno A_2, fase de formulação).



Fonte: Dados da pesquisa.

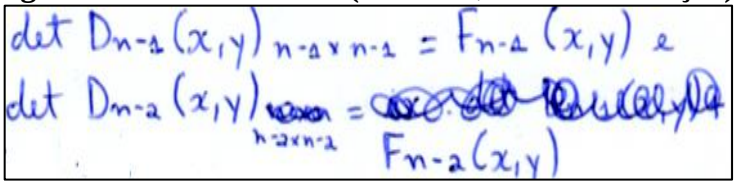
Figura 24 – Identificação do determinante das matrizes como sendo uma representação dos elementos da SPBCF (aluno A_4, fase de formulação).



Fonte: Dados da pesquisa.

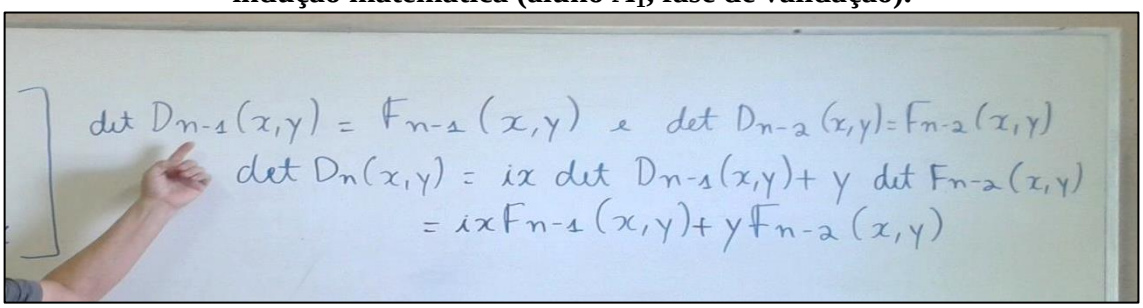
A validação dessa situação-problema ocorreu a partir do passo indutivo assumido pelo aluno A_2, registrado na Figura 25, seguido do uso da formulação (teorema) $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0$, recorrendo à $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$. De fato, pode-se ver, a seguir, nas Figuras 26 e 27, que o aluno A_1 consegue por indução matemática provar a veracidade do teorema.

Figura 25 – Passo indutivo (aluno A_2, fase de validação).



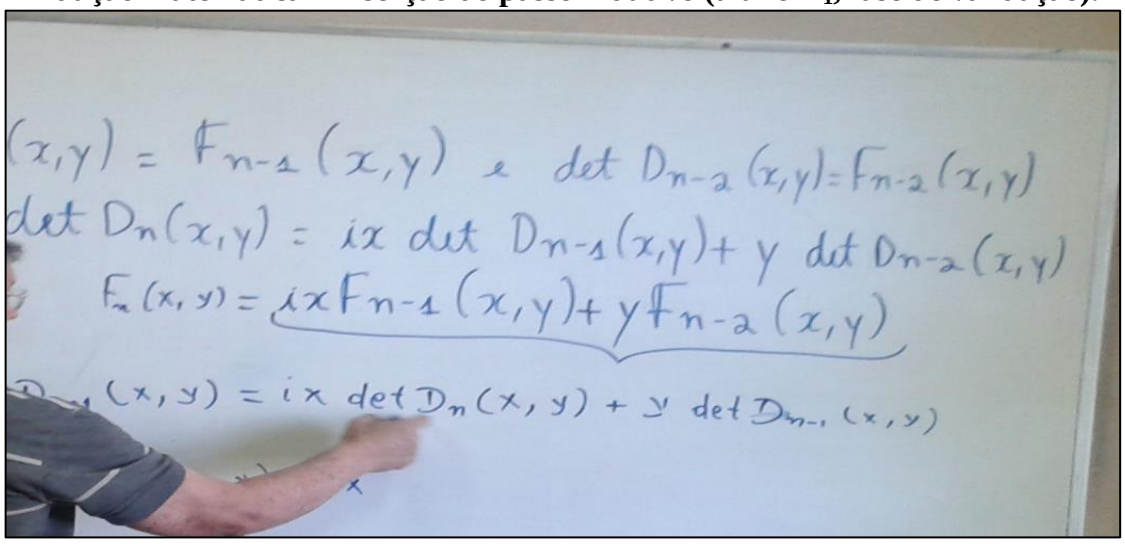
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 26 – Demonstração de $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0$, por indução matemática (aluno A_1, fase de validação).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27 – Demonstração de $D_0(x,y)=0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y)$, $n \geq 0$, por indução matemática – inserção do passo indutivo (aluno A_1, fase de validação).



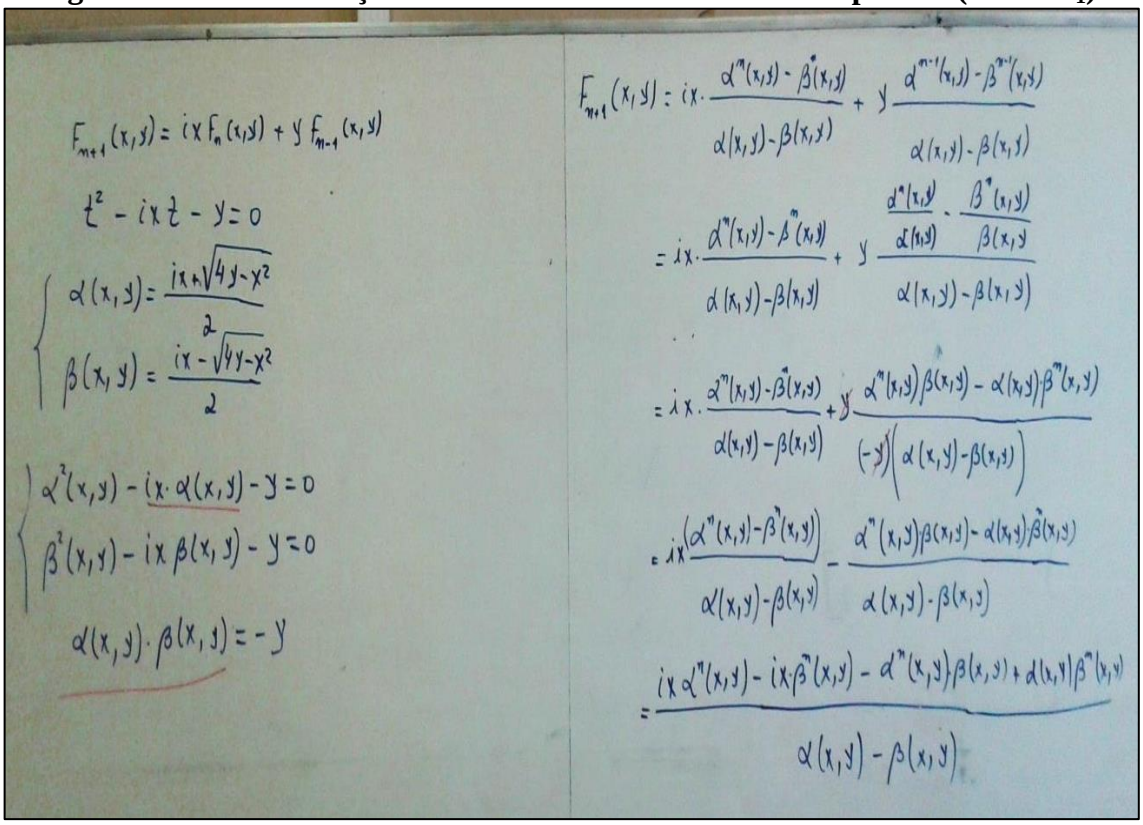
Fonte: Dados da pesquisa.

À vista disso, ao se analisar a situação-problema (3), pode-se verificar que as discussões feitas nas situações anteriores, permitiram que os alunos passassem a possuir argumentos para compreender que a Fórmula de Binet, conhecida por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, admite uma fórmula análoga para a classe dos PBCF.

Assim, na fase da ação, os alunos propuseram a expressão $f_n(x,y) = \dfrac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$, como sendo uma fórmula variante de Binet para os PBCF, a partir de então, formulou-se a hipótese de escrever a definição $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$, em função da fórmula variante proposta, considerando as raízes $\alpha(x,y) = \dfrac{ix + \sqrt{4y - x^2}}{2}$ e $\beta(x,y) = \dfrac{ix - \sqrt{4y - x^2}}{2}$ da equação característica $t^2 - ixt - y = 0$, para possíveis simplificações na fase de validação.

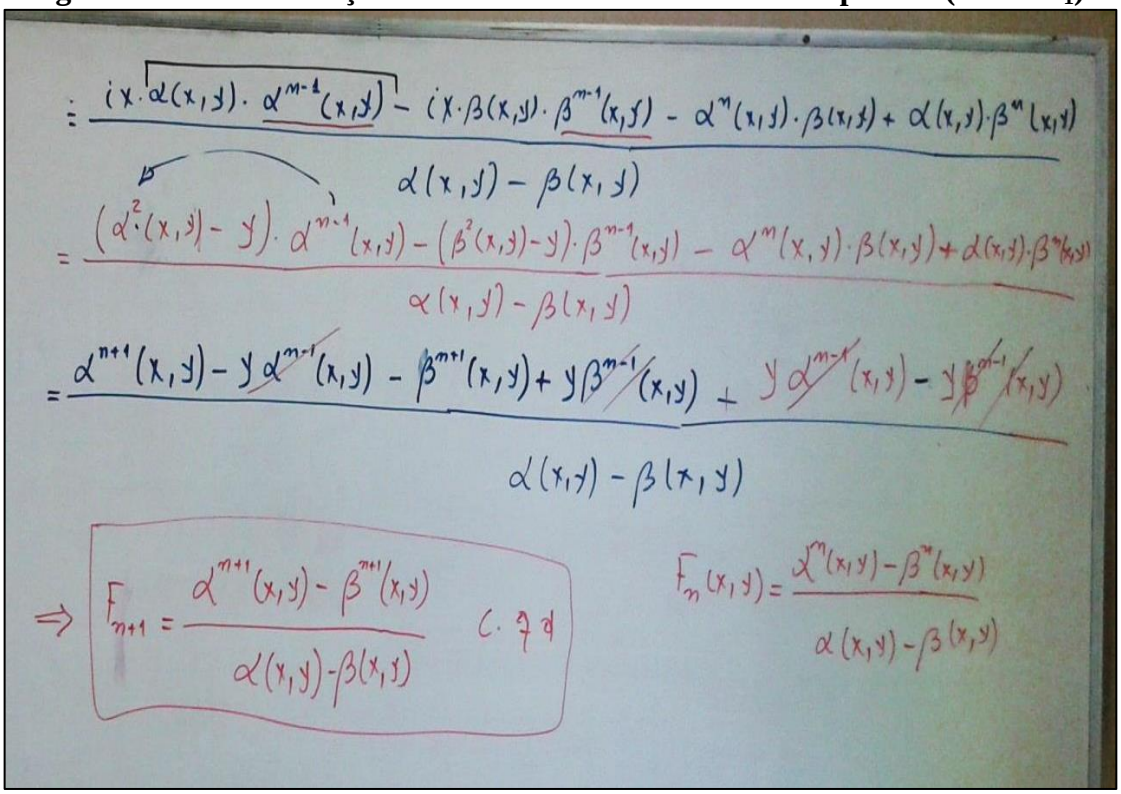
No ultimo momento, a fim de validar a fórmula variante de Binet, partindo da formulação elaborada e desenvolvendo-a, os alunos validaram sua veracidade, trabalhando com o índice $n+1$, consequentemente, obtiveram $f_{n+1}(x,y) = \dfrac{\alpha^{n+1}(x,y) - \beta^{n+1}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ para $n \geq 0$. Além do mais, todos os alunos participaram dessa situação, no entanto, é válido apresentar aqui a demonstração do aluno A_1 por se apresentar mais elaborada. Veja:

Figura 28 – Demonstração da Fórmula Variante de Binet – parte 1 (aluno A_1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 29 – Demonstração da Fórmula Variante de Binet – parte 2 (aluno A_1).



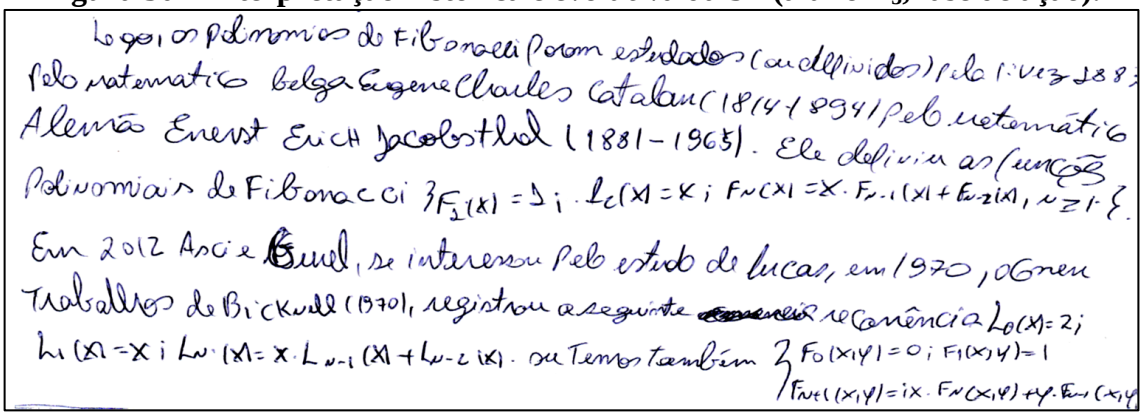
Fonte: Dados da pesquisa.

Na situação-problema (4), ao interpretar a Figura 14, em busca de uma perspectiva histórica e evolutiva da sequência concebida por Leonardo Pisano em 1202, por meio da comparação entre as duas colunas, na Figura 30, o aluno A_3 relatou que houve um levantamento bibliográfico do MF e sua respectiva extensão com os PBCF. Continuando na fase de formulação, pode-se verificar que o aluno A_2 (Figura 31) identificou a existência de um hiato histórico nas pesquisas sobre as representações generalizadas da SF.

Além do mais, na fase de validação, o aluno A_5 compreendeu uma perspectiva histórica e evolutiva do MF, a partir da inserção das variáveis x, y e da unidade imaginária *i*, além de considerar os PBCF com uma extensão da SF na sua forma complexa. Isso pode ser observado a seguir na fala de A_5.

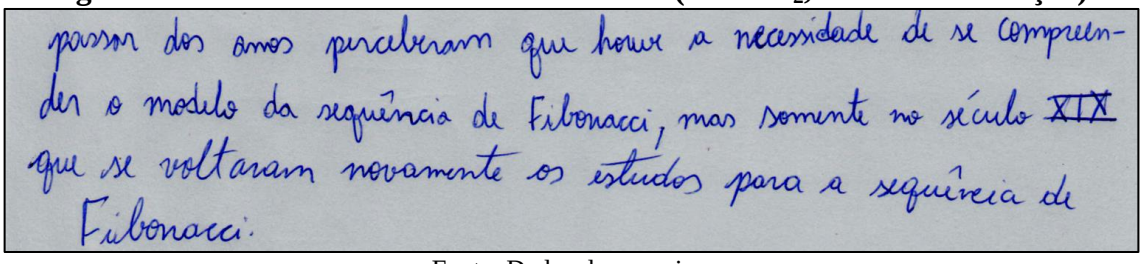
> *Aluno A_5: [...] a fórmula da primeira é muito básica, elementar. Na segunda ele aperfeiçoou o que já existia, acrescentou as variáveis, agora dá pra trabalhar com polinômios a partir dessas fórmulas. Na última linha, ele já trabalhava com polinômios só que aí no Fibonacci, ele vai trabalhar nos complexos. Sempre tendo uma extensão [...].*

Figura 30 – Interpretação histórica e evolutiva da SF (aluno A_3, fase de ação).



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 31 – Hiato histórico nos estudos da SF (aluno A_2, fase de formulação).



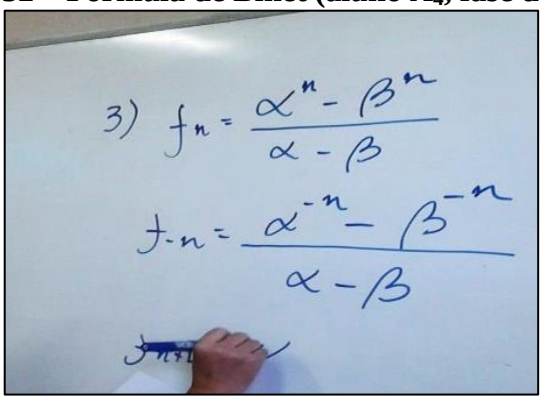
Fonte: Dados da pesquisa.

A situação-problema (5) foi uma proposta para se argumentar e deduzir qualquer propriedade da SF, relacionando-a com a sequência dos PBCF. Desse modo, baseados na

tabela da Figura 14, os alunos decidiram investigar algumas propriedades, dentre as quais se destaca $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x,y) = \dfrac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$.

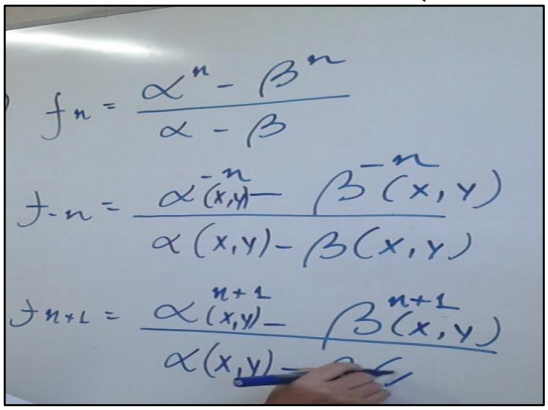
Nesse sentido, como partida de ação, seguida da formulação e considerando o fato de já ter discutido na situação-problema (3) que, a fórmula de Binet $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ possui a seguinte fórmula variante: $f_n(x,y) = \dfrac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ $\forall\ n \geq 0$, os alunos formularam a hipótese de se escrever as propriedades $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x,y) = \dfrac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$ em função da Fórmula de Binet e da sua fórmula variante respectivamente. A demonstração feita pelos alunos, para índices negativos dessa propriedade caracteriza a fase de validação dessa situação. A seguir, pode-se observar as descrições de alguns aspectos das fases de ação, formulação e validação nas Figuras 32, 33, 34 e 35.

Figura 32 – Fórmula de Binet (aluno A_4, fase de ação).



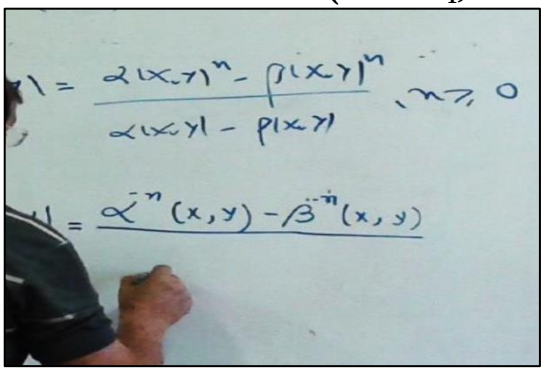
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33 – Fórmula de Binet e sua variante (aluno A_4, fase de ação).



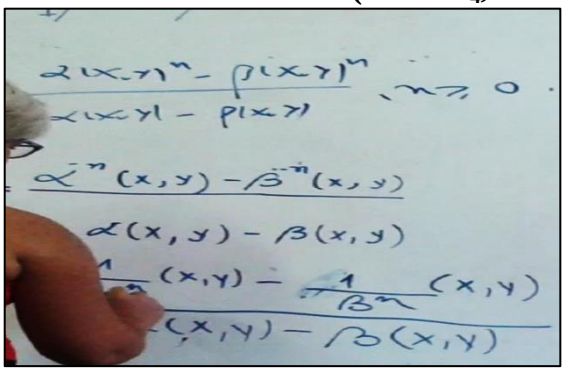
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 34 – Fórmula variante de Binet (aluno A_1, fase de formulação).



Fonte: Dados da pesquisa.

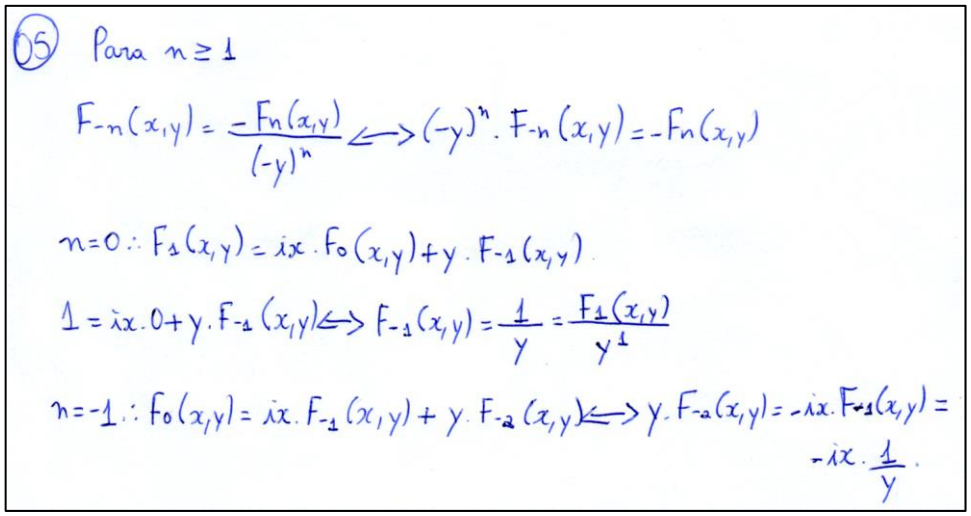
Figura 35 – Fórmula variante de Binet (aluno A_4, fase de validação).



Fonte: Dados da pesquisa.

Além do mais, a partir da validação de $f_{-n}(x,y)=\frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$, o aluno A_5 verificou sua descrição para casos particulares, como pode ser visto na Figura 36. Veja:

Figura 36 – Verificação de $f_{-n}(x,y)=\frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$ para casos particulares (aluno A_5).



Fonte: Dados da pesquisa

Tabela 7 – TSD: Categorização dos momentos de resolução das situações-problema.

Situação-problema (1)	
Ação	Estabelecimento de uma relação entre a SF e SPBCF.
Formulação	Construção da relação recorrente: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y),\ \forall n \geq 1.$
Validação	Determinação dos termos da SPBCF.
Institucionalização	Generalização dos PBCF como modelo de complexificação da SF.
Situação-problema (2)	
Ação	Identificação da matriz $D_n(x,y)_{nxn}$ como tridiagonal e complexa.
Formulação	Reconhecimento dos determinantes das matrizes $D_n(x,y)_{nxn}$, com $n \geq 1,$ como representação dos termos da SPBCF.
Validação	Demonstração por indução matemática da relação: $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y)$ com $n \geq 0.$
Institucionalização	Generalização do teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y)$ com $n \geq 0$ para a classe dos PBCF.
Situação-problema (3)	
Ação	Escrita da Fórmula de Binet com a inserção das variáveis, tal que: $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}.$
Formulação	Escrita da relação $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$ em função da Fórmula de Binet, tal que se tenha: $f_{n+1}(x,y) = \frac{\alpha^{n+1}(x,y) - \beta^{n+1}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}.$
Validação	Demonstração por indução matemática da relação: $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}.$
Institucionalização	Formalização e Generalização da Fórmula Variante de Binet $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para a classe dos PBCF.
Situação-problema (4)	
Ação	Comparação algébrica entre as propriedades da SF e SPBCF.
Formulação	Identificação de hiatos históricos nas pesquisas sobre a SF.
Validação	Compreensão de um processo histórico e evolutivo do MF.
Institucionalização	Formalização do modelo complexificado de Fibonacci com a generalização dos PBCF.
Situação-problema (5)	
Ação	Seleção de duas propriedades: uma da SF e a outra da SPBCF.
Formulação	Verificação da validade de: $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n.$
Validação	Demonstração por indução matemática de: $f_{-n}(x,y) = \frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}.$
Institucionalização	Formalização de que as sequências de Fibonacci e dos PBCF admitem extensão para índices inteiros.

Fonte: Elaboração da autora.

Nos parágrafos anteriores, foi feita uma categorização dos momentos de resolução das situações-problema. Isso é esquematizado na Tabela 7. Assim, vale comentar que apesar da ED admitir dois tipos de validação: interna e externa. Todavia, a validação desta pesquisa é feita internamente, com foco nas situações didáticas. Ou seja, além desta pesquisa ter envolvido um número pequeno de participantes (alunos), são analisados apenas as produções e o desempenho dos estudantes que foram observados nesta pesquisa, não havendo comparação com produções externas a esta aplicação.

Assim, na validação interna desta pesquisa, é feita uma comparação entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori* com base nos dados coletados durante a realização didática. Em outras palavras, a validação interna desta pesquisa é uma consequência da análise *a posteriori* dos dados coletados, buscando comparar o que se foi analisado *a priori* com os resultados obtidos na experimentação. Além do mais, a fase de institucionalização da TSD tem muita relevância na validação interna desta pesquisa, pois é nesta etapa, em que se evidencia o êxito obtido no processo do entendimento da construção dos conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Todavia, vale comentar que durante a resolução das situações-problema, surgiram alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos típicos de um processo de aprendizagem. Nesse contexto, foi observado que alguns alunos manifestaram dificuldade de lidar com a demonstração matemática. Isso é evidenciado no seguinte argumento de um aluno: “não sei usar indução matemática”. Além disso, outro aluno afirma: “pra mim só fica claro que pode usar indução matemática se tiver no enunciado demonstre por indução”. Esses obstáculos foram superados no momento da troca de informação entre os alunos e com a intervenção do professor. Dessa forma, na Tabela 07, foram apresentados os resultados que satisfazem a predição feita na análise *a priori*.

Nessa perspectiva, na Tabela 07, pode-se observar a institucionalização das relações e dos conceitos abordados nas situações didáticas. Dessa forma, na primeira situação-problema, os alunos identificaram a relação entre os termos da SF e da SPBCF, e conseguiram determinar os termos da SPBCF. Isso permitiu generalizar os PBCF como modelo de complexificação da SF. Na segunda situação-problema, foi verificado o comportamento tridiagonal da matriz proposta por Asci & Gurel (2012). E, avaliando o determinante dessa matriz, por um processo indutivo, conseguiu-se generalizar um teorema, o qual descreve que o determinante dessas matrizes tridiagonais geram os termos da sequência dos PBCF.

Continuando a institucionalização, na situação-problema (3), os estudantes compreenderam que, assim como a SF, os PBCF também satisfazem a uma fórmula fechada. Com isso, foi possível formalizar e generalizar uma fórmula variante de Binet para a classe dos PBCF. Na situação-problema (4), ocorreu a formalização do modelo complexificado de Fibonacci com a generalização das propriedades inerentes aos PBCF, além disso, é visto que isso acontece com a inserção de variáveis e da unidade imaginária *i*. Logo, torna-se perceptível o processo histórico-evolutivo da SF. Finalmente, a institucionalização da quinta situação-problema foi marcada pela discussão do MF, através de suas representações com índices inteiros para a SF e para os PBCF.

Por fim, a discussão dos dados coletados nesta pesquisa permitiu compreender que os objetivos desta pesquisa foram alcançados, assim, acontece uma validação interna desta pesquisa. Essa validação inicia-se com a análise, feita nas análises prévias da ED, do campo epistêmico-matemático inerente ao modelo complexo de Fibonacci. O que permitiu alcançar os dois primeiros objetivos específicos desta pesquisa. E, em seguida, a validação se efetiva na situação didática, evidenciando-se com a institucionalização da TSD. O que permitiu alcançar os dois últimos objetivos específicos.

É relevante notar que os dois objetivos específicos iniciais foram relacionados aos dois últimos objetivos específicos, através da transposição didática (objetivo geral) realizada, inicialmente, na fase de concepção e análise *a priori* da ED. Além do mais, pode-se compreender que foi oportunizado aos professores de Matemática em formação inicial, através de uma abordagem com o viés didático da TSD, o desenvolvimento de um raciocínio inferencial e de uma concepção epistemológica do ensino de HM. Isso valida a hipótese didática levantada. Além disso, a seguir, tem-se alguns depoimentos de alunos.

> *Aluno A_6: [...] agora a gente vê que HM não é só seminário sobre a vida dos matemáticos. Mas, também é a criação de propriedades e teoremas que devem ser demonstrados matematicamente. Novas fórmulas fazem a Matemática evoluir. Isso faz parte da História da Matemática [...].*

> *Aluno A_7: [...] o modelo de Fibonacci tá mais do que evoluído. Dos números para os polinômios. Dos naturais para os complexos. Mas, essa evolução não é vista em toda aula de HM. Até porque os livros não contam a atual história da Matemática. Se preocupam mais com os matemáticos, que nem existem mais, do que com os teoremas novos que estão surgindo.*

Com isso, ficou entendido que a HM têm uma relação intrínseca com a epistemologia das relações matemáticas, dentre as quais podem ser destacadas as recorrências Fibonaccianas

complexas, que podem ser exploradas no contexto do ensino de HM. De fato, alguns alunos manifestaram a compreensão dessa concepção. Vale recordar que esta pesquisa foi desenvolvida a partir da transposição didática do modelo complexificado de Fibonacci. O que articulou elementos didáticos, cognitivos e epistemológicos, os quais são pressupostos da ED construída nesta pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou uma abordagem epistemológica que enfatiza o desenvolvimento algébrico das relações recorrentes inerentes à sequência generalizada de Fibonacci. Nessa perspectiva, esta pesquisa foi iniciada no campo epistêmico-matemático que abrange as formas complexas das relações Fibonaccianas, a partir da inserção de unidades imaginárias e de variáveis. Esse processo foi denominado de complexificação do MF e indica uma evolução histórica, com ênfase no desenvolvimento epistemológico-matemático, da SF.

O estudo do modelo complexificado de Fibonacci é realizado através da análise de artigos específicos da literatura da Matemática Pura. Logo, não é comum discutir os conceitos e as propriedades complexas oriundas da SF, presentes nesses artigos, num curso de Licenciatura em Matemática. Nesse repertório matemático, foi selecionada a classe dos PBCF como um conteúdo a ser transposto para o contexto didático-cognitivo. Com isso, esta pesquisa foi aplicada na disciplina de HM, tendo em vista que o curso de Licenciatura em Matemática oferece, em sua matriz curricular, a disciplina de HM, a qual permite discutir a evolução dos conceitos e das relações matemáticas. Além do mais, os livros clássicos de HM fazem referência ao modelo recursivo unidimensional de Fibonacci.

Todavia, há uma resistência enorme por parte de alunos e professores quanto ao estudo de relações matemáticas e sua demonstração nas aulas de HM. Essa resistência é consequência da concepção de que a HM abrange apenas a biografia dos matemáticos e a descrição do período histórico em que as definições foram estabelecidas e as relações matemáticas foram desenvolvidas. Isso é uma concepção equivocada que se reflete na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, em que a disciplina de HM não exige pré-requisitos para cursá-la. Assim, cabe a seguinte reflexão: como se questionar a validade de propriedades e teoremas ou propor extensões generalizadas dessas relações se os alunos podem ter um conhecimento prévio matemático escasso?

Além do mais, essa concepção descrita anteriormente evidencia o desconhecimento histórico da Matemática atual e, assim, negligencia o atual processo evolutivo epistemológico-matemático de novas relações matemáticas. Isso pode ser observado nos livros usados como referências nas aulas de HM, tais livros não apresentam discussões de propriedades matemáticas recentes e atuais. Vale comentar que a construção do repertório de relações matemáticas superou determinados obstáculos epistemológicos. Isso significa que os

conceitos e as relações matemáticas conhecidas atualmente foram criados a partir do questionamento de sua validade. Assim, nesta pesquisa, pode-se observar isso quando se analisa o processo de surgimento dos Quaternions. Nesse sentido, pode-se compreender que os Quaternions surgiram como uma extensão dos números complexos para quatro dimensões. E, essa extensão surgiu quando foi questionada a generalização dos números complexos bidimensionais para três dimensões, através dos tripletos.

À vista disso, por apresentar pressupostos didáticos, cognitivos e epistemológicos, a ED, em complementaridade com a TSD, foi assumida como aporte teórico que norteou o percurso metodológico desta pesquisa (ver Apêndice C). Isso contribuiu, de modo geral, no que diz respeito à Matemática, para a compreensão do MF em suas diferentes representações complexas, as quais foram categorizadas em dois grupos: uma abordagem polinomial e, outro, numa perspectiva de crescimento dimensional (ver Apêndice D). Dessa forma, vale destacar que o crescimento dimensional Fibonacciano é uma consequência da inserção de unidades imaginárias, assim, são destacadas as relações recorrentes bi, tri e *n*-dimensionais. E, posteriormente, a SF foi explorada nas Álgebras (ver Apêndice E) quaterniônica e octoniônica, buscando uma generalização dos números Gaussianos de Fibonacci em quatro e oito dimensões respectivamente. O que permitiu atingir os dois primeiros objetivos específicos desta pesquisa.

Todavia, no contexto da microengenharia didática e considerando os efeitos da transposição didática, é relevante observar que o MF foi estudado em situações de ensino através dos PBCF discutidos por meio da proposição de situações-problema, as quais oportunizaram a compreensão do processo histórico-evolutivo da SF numa abordagem polinomial, a partir da inserção de variáveis e da componente imaginária *i*. Isso evidencia que os dois últimos objetivos específicos inerentes ao contexto didático-cognitivo desta pesquisa foram alcançados.

Finalmente, esta pesquisa oportunizou aos alunos, professores em formação inicial, a ampliação de seu repertório de conhecimentos relativo às relações matemáticas oriundas da sequência generalizada de Fibonacci. Além disso, possibilitou o desenvolvimento de uma concepção epistemológico-matemática do ensino de HM. Dessa forma, esse processo foi desenvolvido através da transposição didática fundamentada em uma teoria de ensino específica para a DM, que no caso desta pesquisa, destacou-se a TSD. Ao fim desta pesquisa, espera-se que esta dissertação sirva de paradigma para outras pesquisas que buscam explorar,

com o viés didático da TSD, outros modelos matemáticos não triviais, isto é, não estudados num curso de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. ISSN 1981-1322.

ALVES, F.R.V. ENGENHARIA DIDÁTICA (ANÁLISES PRELIMINARES E ANÁLISE *A PRIORI*): O CASO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista.** v, n. 2, p. 1-22, 2016a.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016b.

ALVES, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educ.,** Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150, 2016c. ISSN2177-7691.

ALVES, F. R. V. Sobre a evolução matemática, histórico-epistemológica do modelo de Fibonacci: sobre a abordagem matricial. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 91 – 111, 2017a.

ALVES, F.R.V. Fórmula de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci - sgf. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1 – 16, 2017b.

ALVES, F. R. V. The Quaterniontonic and Octoniontonic Fibonacci Cassini's Identity: An Historical Investigation with the Maple's Help. **INTERNATIONAL ELECTRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION**, v. 13, n. 3, p. 125-138, 2018a. e-ISSN: 1306-3030. Disponível em: < https://doi.org/10.12973/iejme/2703 >

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 47 – 83, 2018b.

ALVES, F. R. V; BORGES NETO, H. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM,** n. 59, p. 135 – 140, 2011. [online] <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. THE BIVARIATE (COMPLEX) FIBONACCI AND LUCAS POLYNOMIALS: AN HISTORICAL INVESTIGATION WITH THE MAPLE´S HELP. **Acta Didactica Napocensia**, v. 9, n. 4, p. 71-95, 2016.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 112-136, 2017.

ALVES, F. R. V.; OLIVEIRA, R. R. Sobre o modelo de Fibonacci na variável complexa: identidades generalizadas. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA,** v. 11, p. 116-135, 2017.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. (org.). GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática:** Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995, p. 33-59.

ASCI, M.; GUREL, E. On bivariate complex Fibonacci and Lucas Polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 18, n. 1, p. 1–25, 2012.

ASCI, M.; GUREL, E. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,** v. 19, n. 1, p. 25–36, 2013.

ASTOLFI, J. P.; DEVELAY, M. **A didática das ciências.** 16ª ed. Campinas: Papirus, 2012.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.** Tradução: Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BATISTA, E.; SANTOS, M. V dos. **Rotações, Quatérnions e Álgebras de Clifford.** VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. UNICAMP: 2012, 54p. Disponível em: <http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Escritos_Didaticos_arquivos/bienal_2012.pdf>

BERZSENYI, G. Gaussian Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly,** 15. p. 233–236, 1977.

BICKNELL, M. A primer for the Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly,** v. 8, n. 4, p. 407–421, 1970.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Ed Edgard Blücher, 2006.

BROTHER, U. A. Exploring Fibonacci Numbers**. The Fibonacci Quarterly,** v. 1, n. 1, p. 57 – 64, 1963.

BROTHER, U. **A. Introduction fo Fibonacci Discovery**. California: Santa Clara University, 1965.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. **Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques**. Louvain-la-Neuve, p. 101-117, 1976.

BROUSSEAU, G. **Conteúdos e Métodos de Ensino.** In: SILVA, Benedito Antônio da. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas. Tradução** de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p, 2008.

CARNEIRO, V. C. G.. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike,** Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005.

CATALANI, M. Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials. p. 1–11, 2004. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math/0211366> Acessado em: 03/08/2018.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. 3. ed. Argentina: Aique, 1998.

CONWAY, J. H. & SMITH, D. A. **On quaternions and Octonions:** their geometry, arithmetic and symmetry. London: A. K. Peters, 2003.

DORÉ, A. Diplomacia e relações comerciais entre o Oriente e o Ocidente: duas experiências do século XIII. **Tempo.** Rio de Janeiro, n. 10, p. 137-158, 2000.

DRAY, T.; MANOGUE, C. A. **The Geometry of the Octonions.** London: World Scientific, 2015.

ESTRADA, M. F. et al. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas – SP: Editora Unicamp, 2004.

FLAUT, C.; SHPAKIVSKYI. V. Real matrix representations for the complex quaternions, **Adv. Appl. Clifford Algebras,** 23(3), 657-671, 2013.

GOULD, H. W. A history of the Fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 3, p. 250-257, 1981.

HALICI, S. On Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras,** 22(2), 321-327, 2012.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 23, 105-112, 2013.

HALICI, S. On Dual Fibonacci Octonions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 25(4), p. 905-914, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00006-015-0550-0>

HAMILTON, W. R.; Researches respecting quaternions: first series. **Transactions of the Royal Irish Academy**, v. 21, parte 1, p. 199–296, 1848.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly,** 19, p. 82 – 86, 1981.

HOGGATT, V. E.; BICKNELL, M. Generalized Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quarterly,** v. 11, n. 3, p. 271–274, 1973a.

HOGGATT, V. E.; BICKNELL, M. Roots of Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quarterly,** v. 11, n. 5, p. 457–465, 1973b.

HOGGATT, V. E.; LONG, C. T.. Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials. **The Fibonacci Quarterly,** v. 12, n. 2, p. 113–121, 1974.

HONSBERGER, R. **Mathematical gems III. Washington: Mathematical Association of America.** The Dolciani Matematical Exposition, v. 9, 1985.

HORADAM. A. F. Complex Fibonacci Numbers Quaternions. **The Americal Mathematical Monthly**, v. 70, n. 3, p. 289– 291, 1963. Disponível em: < https://doi.org/10.2307/2313129 >

HORADAM, A. F. Quaternion Recurrence relations. **Ulam Quarterly,** 2(2), p. 23–33, 1993.

IAKIN, A. L. Generalized quaternions with quaternion components. **The Fibonacci Quarterly,** v. 15, n. 4, p. 350-352, 1977.

IAKIN, A. L. Extended Binet forms for generalized quaternions of higher order. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 5, p. 410-413, 1981.

IPEK, A.; ÇIMEN, C.B. On (p, q)-Fibonacci Octonions. **Mathematica Aeterna,** v.6, n. 6, p. 923-932, 2016.

JEFFERY, T; PEREIRA, R. Divisibility Properties of the Fibonacci, Lucas, and Related Sequences. **International Scholarly Research Notices,** v. 14, n. 1, p. 1–5, 2014.

JORDAN, J. H. Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 3, n. 4, p. 315–318, 1965.

KARATAŞ, A.; HALICI. S. Horadam Octonions. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1611.10143v1>

KEÇILIOGLU, O.; AKKUS, I. The Fibonacci Octonions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 25(1), p.151–158, 2014.

KING, C. Leonardo Fibonacci. **The Fibonacci Quarterly.** v. 1, n. 4, December, p. 15–19, 1963.

KING, C. H. Conjugate generalized Fibonacci sequences. **The Fibonacci Quarterly**, v. 6, n. 1, p. 46-50, 1968.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications.** New York: Wileyand Sons publications, 2001.

KOSHY. T. **Elementary Number Theory and Applications.** second edition, Boston: Elselvier, 2007.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, 10(1), p. 97 – 112, 1997.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear.** Coleção Matemática Universitária, 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016, 357p.

MARTINJAK, I.; URBIHA, I. A new class of Cassini´s determinant. In: **Proceedings of Coloquium Matematicum,** Polônia, p. 1–10, 2016.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 2, 2305, p. 1 – 11, 2009.

NINAHUANCA, J. L. H. **Modulação em Amplitude Ortocomplexa usando a Álgebra de Quaternions.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Campinas, SP: UNICAMP, 2015, 64p.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V. A Fórmula de Binet e representações matriciais para os Quaternions Complexos de Fibonacci. **REVISTA THEMA**, v. 15, n. 3, p. 860-875, 2018.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA**, v. 11ic, p. 91-106, 2017.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PENDEZA, C. A. **Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo De Moivre**. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas. São José do Rio Preto: UNESP, 2006, 118p. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/94308>

PETHE, S.; HORADAM A. F. (1986) Generalized Fibonacci Gaussian Numbers. **Bull. Aust. Math. Soc.**, 33, p. 37–48, 1986.

PLAZA, A.; FALCÓN, S. Combinatorial proofs of Honsberger-type identities. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** v. 39, n. 6, p. 785-792, 2008.

POMMER, W. M.. A **Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.** São Paulo, 2013. Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf .Acessado em: 03/03/2017.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus: UESC, 2013, 93p. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf

REITER. Fibonacci Numbers: Reduction Formulas and Short Periods. In: **The Fibonacci Quarterly,** v. 31, n. 4, November, p. 315–325, 1993.

SANGWINE, S. J.; ELL, T. A.; BIHAN, N. L. Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 21, 607-636, 2011.

SANTOS, A. A. **Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza: IFCE, 2017, 162p. Disponível em: http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/wp-content/uploads/2016/04/Disserta%C3%A7%C3%A3o-finalizada-com-a-catalogr%C3%A1fica-final.pdf

SANTOS, D. J. dos. **A Álgebra dos complexos/Quatérnios/Octônios e a construção de Cayley-Dickson.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão. Catalão: UFG, 2016, 101p. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6596>

SAVIN, D. Some properties of Fibonacci numbers, Fibonacci Octonions and generalized Fibonacci-Lucas Octonions. **Advanced in Difference Equation,** p.298–312, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s13662-015-0627-z>

SCOTT, A. M. Continuous Extensions of Fibonacci Identities. **The Fibonacci Quarterly,** v. 6, n. 4, October, p. 245–250, 1968.

SILVA, C. V.; ALMOULOUD, S. A. Uma articulação entre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 20, n. 1, p.111-129, 2018.

SINGER, J.M.; NOBRE, J.S.; ROCHA, F.M.M. **Análise de dados longitudinais.** Versão parcial preliminar. São Paulo: USP. Departamento de Estatística. Junho, 2017, 288 p.

TASCI, D.; YALCIN, F. Complex Fibonacci p-numbers. In: **Communications in Mathematics and Applications,** v. 4, n. 3, p. 213–218, 2013.

TASKOPRÜ, K.; ALTINTAS, Î. HOMFLY polynomials of torus links as generalized Fibonacci polynomials. **The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 22, n. 4, p. 1-17, 2015.

WADDILL, M. E; SACKS, L. Another Generalized Fibonacci Sequence. **The Fibonacci Quartely,** v. 5, n. 3, October, p. 209–222, 1967.

WEB, W. A.; PARBERRY, E. A. Divisibility properties of Fibonacci polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, v. 7, n. 5, p. 457-463, 1969.

WITFORD, A. K. Binet´s formula generalized. **The Fibonacci Quarterly,** v. 15, n. 1, February, p. 21–22, 1977.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM.
Campus Fortaleza.

QUESTIONÁRIO: SITUAÇÕES-PROBLEMA
POLINÔMIOS BIVARIADOS E COMPLEXOS DE FIBONACCI

Local de aplicação: IFCE – Campus Fortaleza.
Disciplina de aplicação: História da Matemática.
Pesquisadora: Mestranda Rannyelly Rodrigues de Oliveira.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Situação-problema (1): No artigo científico de Asci & Gurel (2012), encontramos a Tabela 1, a qual apresenta os primeiros termos da sequência dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF). De acordo essa tabela, verifique se existe alguma relação da mesma com a sequência (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...), caso compreenda que sim, explicá-la detalhadamente, em seguida, determine alguns termos da sequência dos PBCF.

Situação-problema (2): Na Figura 1, tem-se uma matriz proposta por Asci & Gurel (2012). Explique, com suas palavras, a função e as propriedades dessa matriz, inclusive, seu comportamento para as ordens 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, etc. Além disso, avalie se é possível verificar a relação $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0$.

Situação-problema (3): A Fórmula de Binet conhecida por $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ foi formulada por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786 – 1856). Existe uma fórmula análoga para a classe dos PBCF? Caso exista, deduzir a mesma. Se necessário, considere a equação $t^2 - ixt - y = 0$.

Situação-problema (4): Baseando-se na Tabela 2, ao comparar a coluna da esquerda com a coluna da direita, é possível interpretar e significar uma perspectiva histórica-evolutiva da sequência concebida por Leonardo Pisano em 1202?

Situação-problema (5): Argumente e deduza qualquer propriedade da sequência de Fibonacci e que possa ser relacionada com o modelo matemático dos PBCF. Justifique essa relação e, se necessário, considere a equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Tabela 1 – Termos das sequências bivariadas polinomiais de Fibonacci e Lucas.

n	$F_n(x,y)$		n	$L_n(x,y)$
0	0		0	2
1	1		1	ix
2	ix		2	$-x^2+2y$
3	$-x^2+y$		3	$-x^3i+3xyi$
4	$-x^3i+2xyi$	and	4	$x^4-4x^2y+2y^2$
5	$x^4-3x^2y+y^2$		5	$x^5i-5x^3yi+5xy^2i$
6	$x^5i-4x^3yi+3y^2xi$		6	$-x^6+6x^4y-9x^2y^2+2y^3$
7	$-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3$		7	$-x^7i+7x^5yi-14x^3y^2+7xy^3i$
⋮	⋮		⋮	⋮

Fonte: Asci & Gurel (2012).

Figura 1 – Matriz tridiagonal.

$$D_n(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ix & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

Fonte: Asci & Gurel (2012).

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM.
Campus Fortaleza.

Tabela 2 – Quadro comparativo da SF com o modelo matemático dos PBCF.

Descrição histórica	Propriedades dos polinomios bivariados de Fibonacci
$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ Fórmula fornecida por Jacques-Philipe-Marie Binet (1786 – 1856).	$F_n(x,y) = \frac{\left(\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ Fórmula variante de Binnet
$g(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}$ Abraham De Moivre (1667–1754) empregou a noção de função geradora ao modelo de Fibonacci.	$g(t) = \frac{t}{1 - tx \cdot t - y \cdot t^2}$ Função geradora do modelo PBF
$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial estudada em 1960. por Charles King (GOULD, 1981)	$Q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial introduzida por Asci & Gurel (2013).
$f_{-n} = (-1)^{n-1} f_n$ Processo de extensão da SF ao campo dos índices inteiros discutida por Brousseau (1963)	$F_{-n}(x,y) = \frac{-F_n(x,y)}{(\quad y)^n}$ Processo de extensão da SPF ao campo dos índices inteiros
$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ Identidade formulada por Domênico Cassini (1625 – 1712)	$F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y) - F_n(x,y)^2 = (-1)^n y^{n-1}$ Fórmula variante de Cassini fornecida por Asci & Gurel (2013).
$f_m \mid f_n \Leftrightarrow m \mid n$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$F_m(x,y) \mid F_n(x,y) \Leftrightarrow m \mid n$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$mdc(\Gamma_n(x,y), \Gamma_{n+1}(x,y)) = 1$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$mdc(\Gamma_n(x,y), \Gamma_{n+1}(x,y)) = 1$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$\begin{cases} H_0(x,y) = a_0, H_1(x,y) = a_1, \\ H_{n+1}(x,y) = x \cdot H_n(x,y) + y \cdot H_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Polinômios bivariados introduzidos por Catalani em 2004	$\begin{cases} F_0(x,y) = 0, F_1(x,y) = 1, \\ F_{n+1}(x,y) = tx \cdot F_n(x,y) + y \cdot F_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Forma complexa dos PBF introduzidos por Asci & Gurel (2012; 2013)

Fonte: Alves & Catarino (2017).

_____

Aluno (participante)

Data: ____/____/_____.

Fortaleza – Ceará.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

"Engenharia Didática sobre o processo de complexificação do modelo de Fibonacci: relações recorrentes bi, tri e n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais"
Rannyelly Rodrigues de Oliveira

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa: "Engenharia Didática sobre o processo de complexificação do modelo de Fibonacci: relações recorrentes bi, tri e n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais". Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com a pesquisadora.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com a pesquisadora. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Justifica-se esta pesquisa no fato de que os livros de História de Matemática apresentam discussões superficiais sobre os conceitos matemáticos e as relações oriundas da sequência de Fibonacci. Nesse sentido, têm-se como objetivos: desenvolver um estudo sobre o processo de complexificação da Sequência de Fibonacci, a fim de investigar seus teoremas, suas propriedades e identidades, buscando explorar sua forma complexa e n-dimensional em situações de ensino. E, apresentar o desenvolvimento histórico e evolutivo desse modelo matemático.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a:

- Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas com duração de noventa (90) minutos, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) no campus Fortaleza.
- A previsão para o início das aulas é: 11/06/2018.
- As aulas serão registradas através de fotos e gravações de áudios das produções dos participantes.
- Serão aplicados questionários, com situações-problema que serão propostas em uma lista de exercícios, com tempo de noventa (90) minutos para as respostas.
- Os dados coletados serão utilizados somente para pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou em encontros científicos e na dissertação, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

Rubrica da pesquisadora:_____ Rubrica do participante:_____

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se você se sentir constrangido com registro de fotos e áudios de suas produções durante a aplicação da pesquisa. Assim, como providências e cautelas adotadas para minimizar possíveis desconfortos ou riscos, o participante terá a liberdade de deixar de participar do estudo sem qualquer prejuízo.

Benefícios:

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas que possibilitam aos alunos da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através do estudo de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes ao modelo complexo de Fibonacci, assim, contribuindo com a formação inicial docente do participante. Além disso, os dados coletados serão utilizados somente para pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou em encontros científicos e na dissertação, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes.

Acompanhamento e assistência:

O participante tem a garantia ao acesso, em qualquer etapa do estudo para esclarecimentos de eventuais dúvidas na instituição em que você estuda. Para maiores informações nosso contato é (85) 99940-1392 e o e-mail: nanny-rockstar@hotmail.com.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Não existirão despesas para o participante em qualquer fase do estudo e também o mesmo não receberá nenhuma remuneração para participar da pesquisa. Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Rannyelly Rodrigues de Oliveira pelo celular (85)99940-1392 e o e-mail: nanny-rockstar@hotmail.com. Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE, das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs as 17:00hs, localizado na Rua Jorge Dumar, nº 1703, Jardim América, no IFCE Reitoria, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 3401-2332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Rubrica da pesquisadora:_____ Rubrica do participante:_____

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

Observações:

Ao assinar esse termo, o participante concorda voluntariamente em participar desta pesquisa e permite o registro de fotos e áudios de suas produções durante a aplicação da pesquisa, desde que possa retirar seu consentimento a qualquer momento sem penalidade ou prejuízos de qualquer natureza.

Apenas pessoas maiores de idade e legalmente capazes poderão participar desta pesquisa.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

_____

Contato telefônico (opcional):

_____

e-mail (opcional):

_____

_____
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/_____/_____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Rannvelly Rodrigues de Oliveira
Pesquisadora

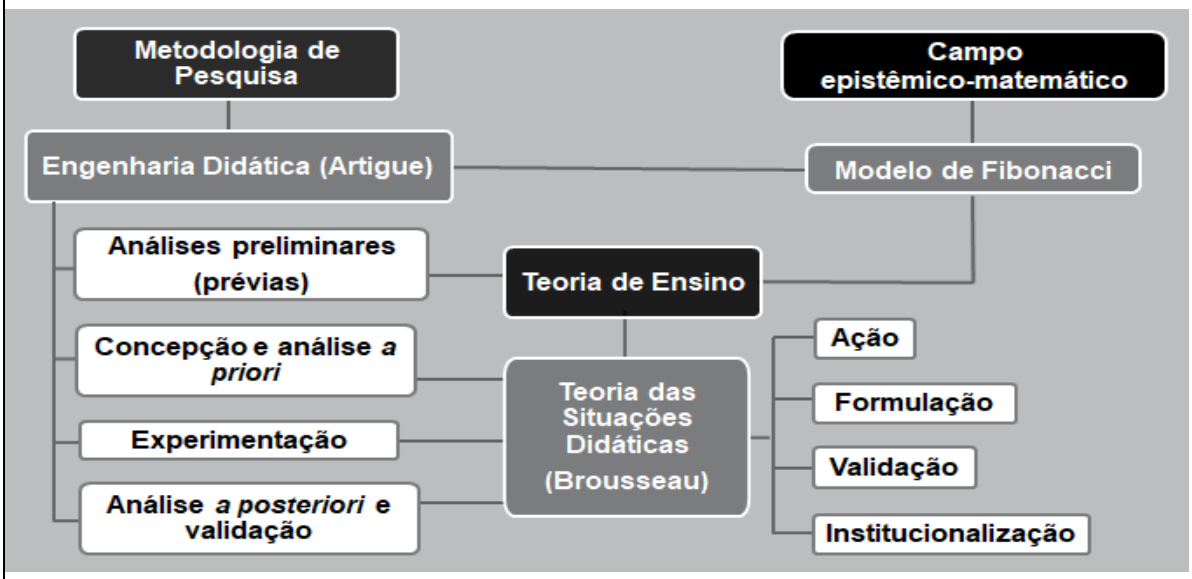
_____
Assinatura da pesquisadora

Data: ____/_____/_____.
Fortaleza – Ceará.

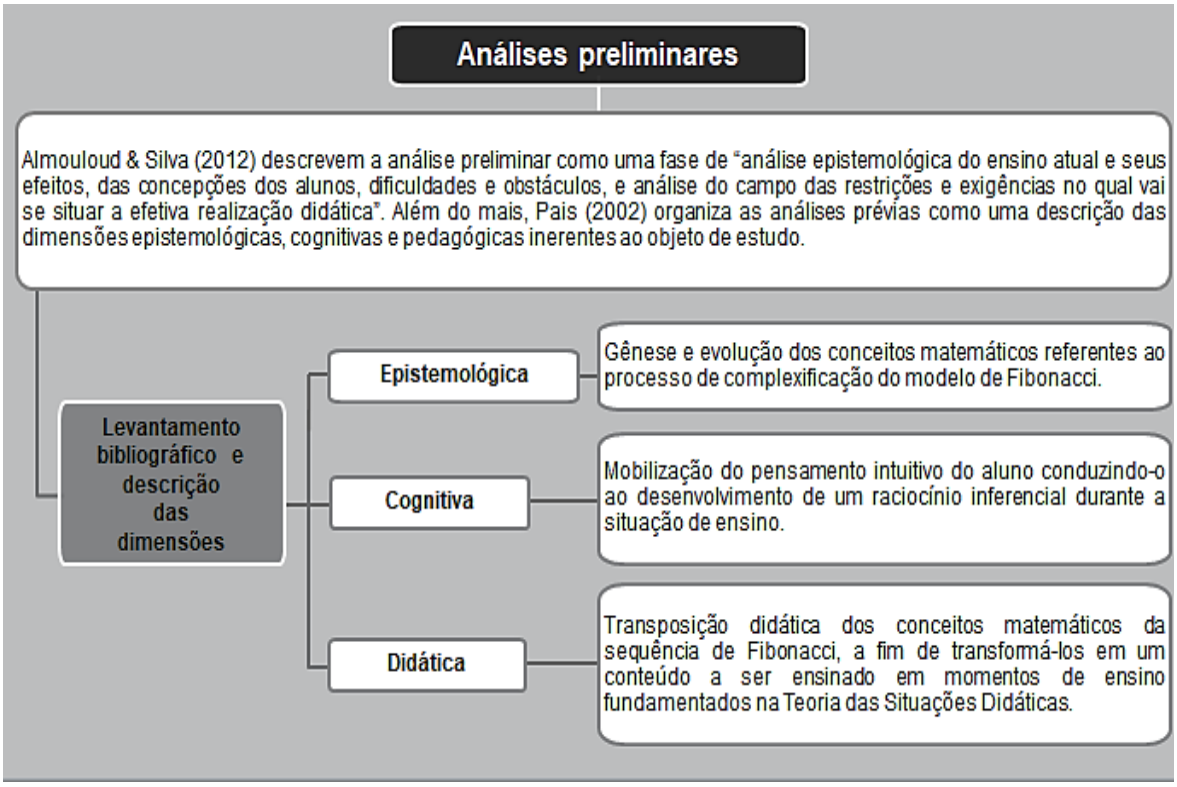
Rubrica da pesquisadora:_____ Rubrica do participante:_____

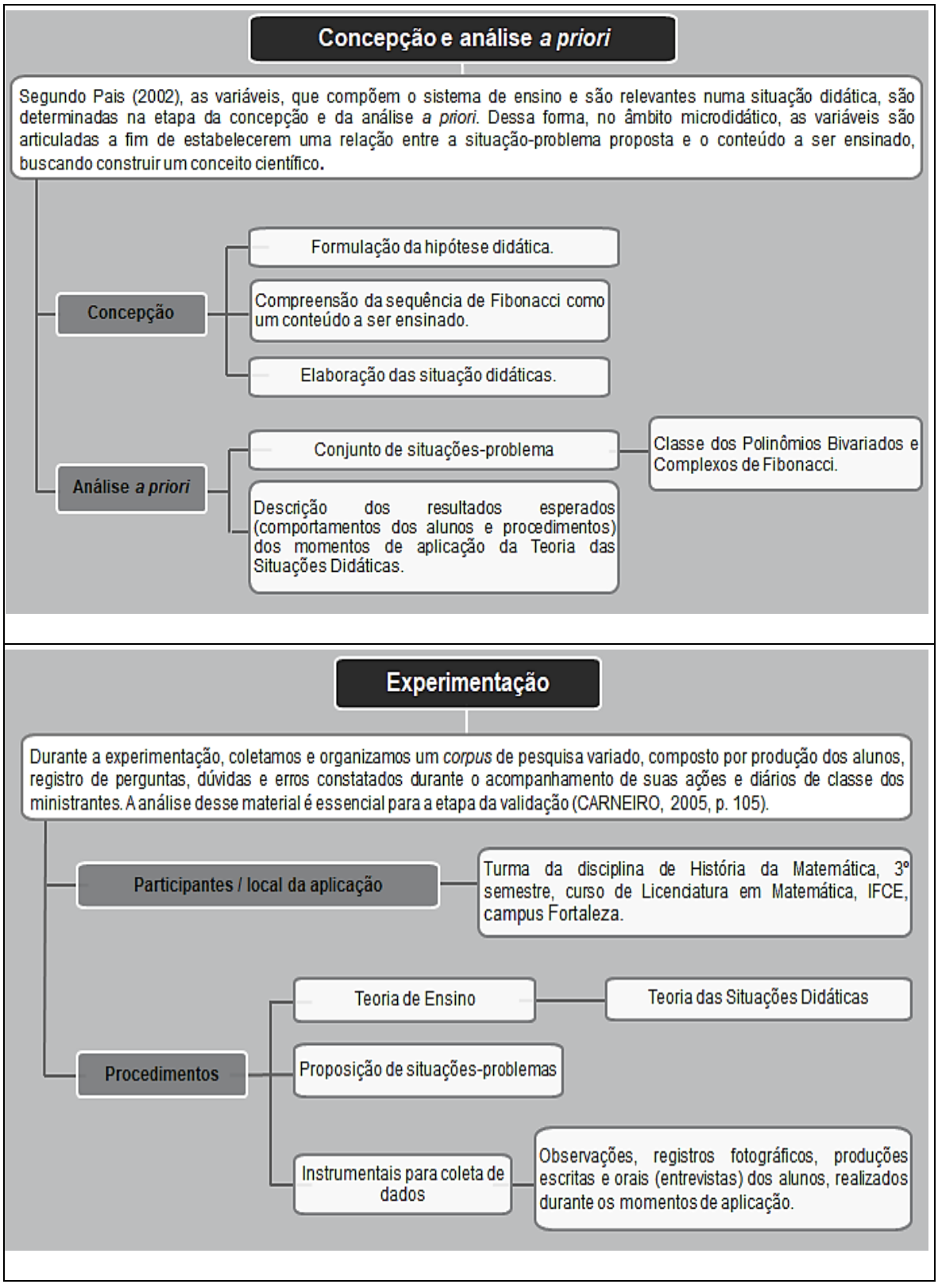
APÊNDICE C – ESTRUTURA DA PESQUISA: ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

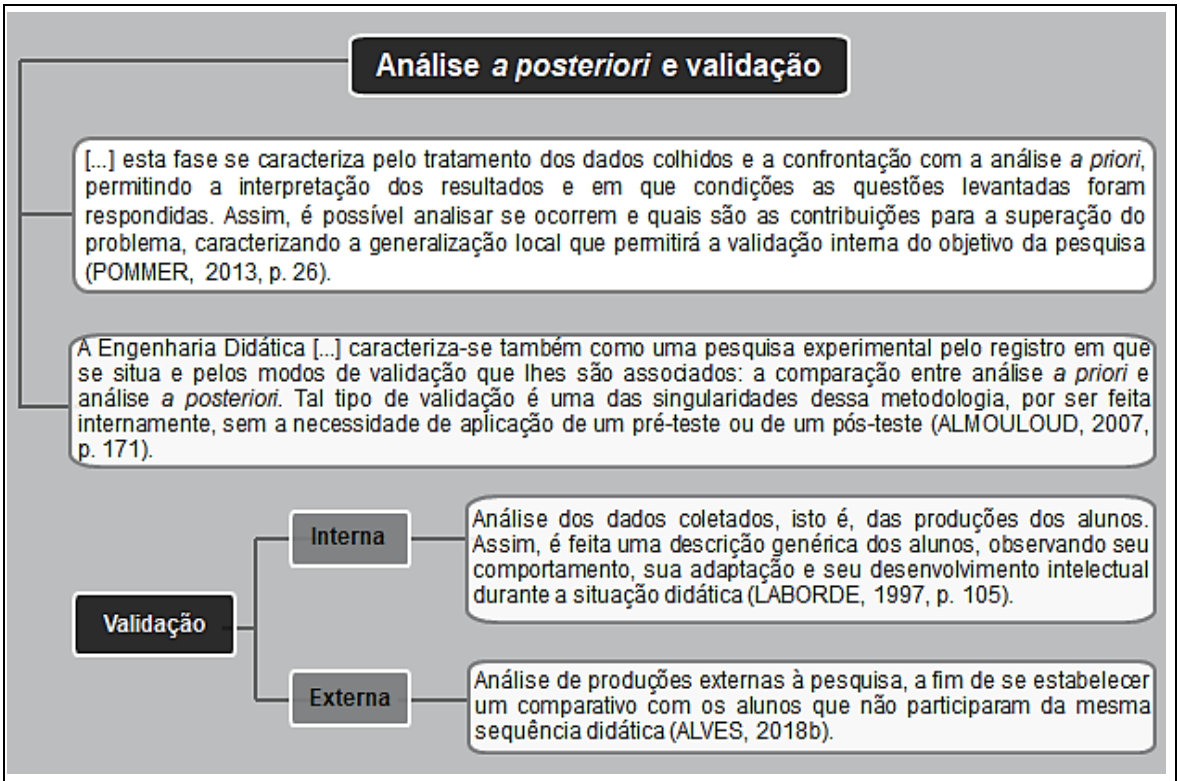
ESTRUTURA DA PESQUISA



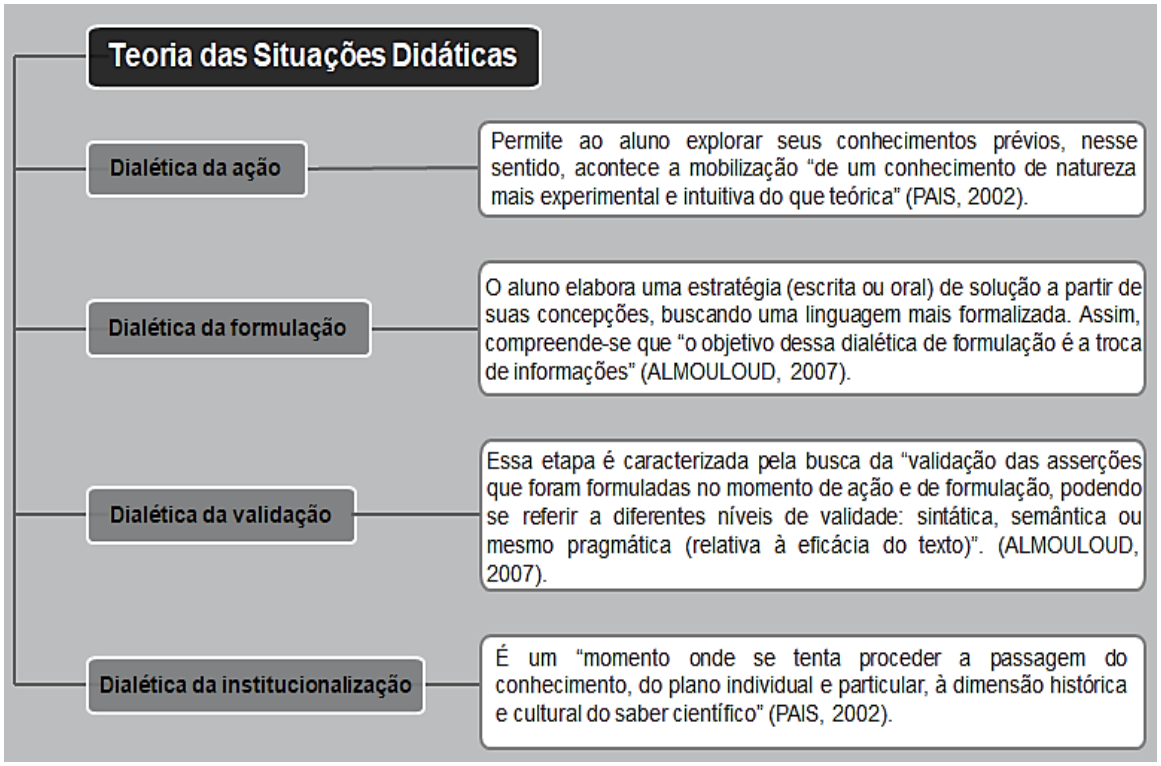
ENGENHARIA DIDÁTICA




Concepção e análise *a priori*
Segundo Pais (2002), as variáveis, que compõem o sistema de ensino e são relevantes numa situação didática, são determinadas na etapa da concepção e da análise *a priori*. Dessa forma, no âmbito microdidático, as variáveis são articuladas a fim de estabelecerem uma relação entre a situação-problema proposta e o conteúdo a ser ensinado, buscando construir um conceito científico.
Concepção
Formulação da hipótese didática.
Compreensão da sequência de Fibonacci como um conteúdo a ser ensinado.
Elaboração das situação didáticas.
Análise *a priori*
Conjunto de situações-problema
Classe dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci.
Descrição dos resultados esperados (comportamentos dos alunos e procedimentos) dos momentos de aplicação da Teoria das Situações Didáticas.
Experimentação
Durante a experimentação, coletamos e organizamos um *corpus* de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (CARNEIRO, 2005, p. 105).
Participantes / local da aplicação
Turma da disciplina de História da Matemática, 3º semestre, curso de Licenciatura em Matemática, IFCE, campus Fortaleza.
Procedimentos
Teoria de Ensino
Teoria das Situações Didáticas
Proposição de situações-problemas
Instrumentais para coleta de dados
Observações, registros fotográficos, produções escritas e orais (entrevistas) dos alunos, realizados durante os momentos de aplicação.



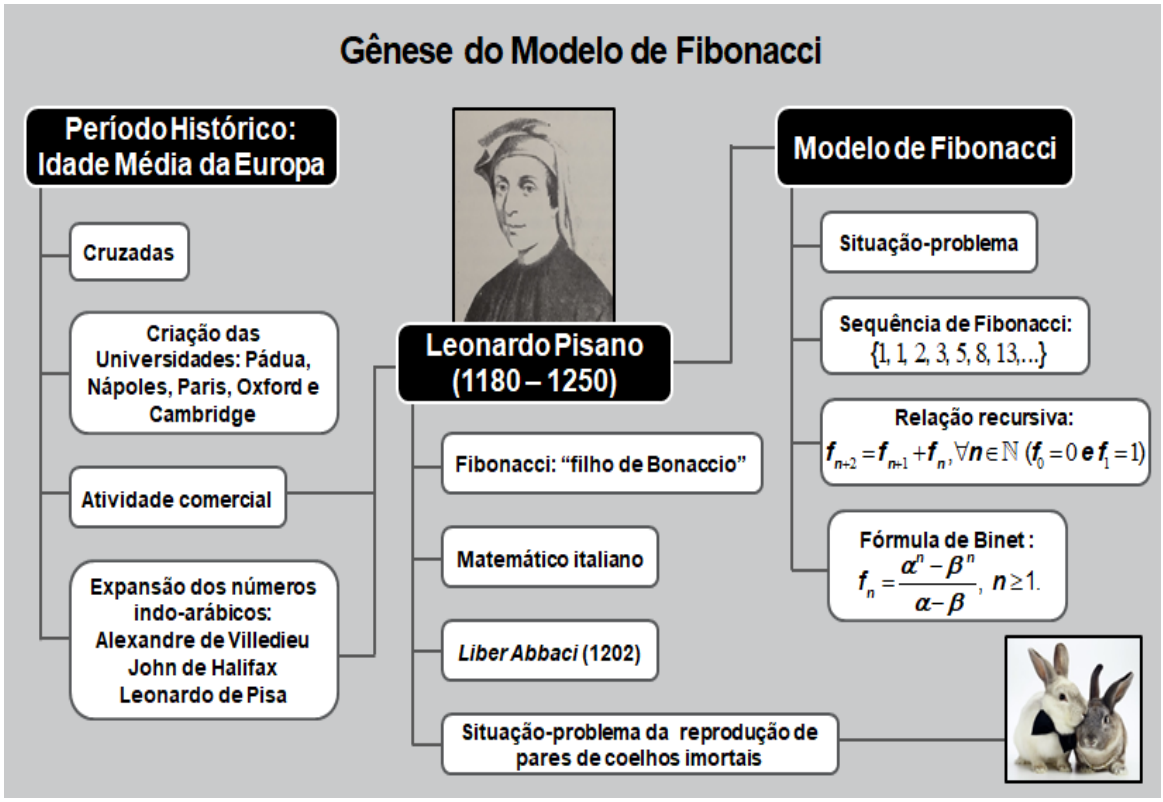
TEORIA DE ENSINO

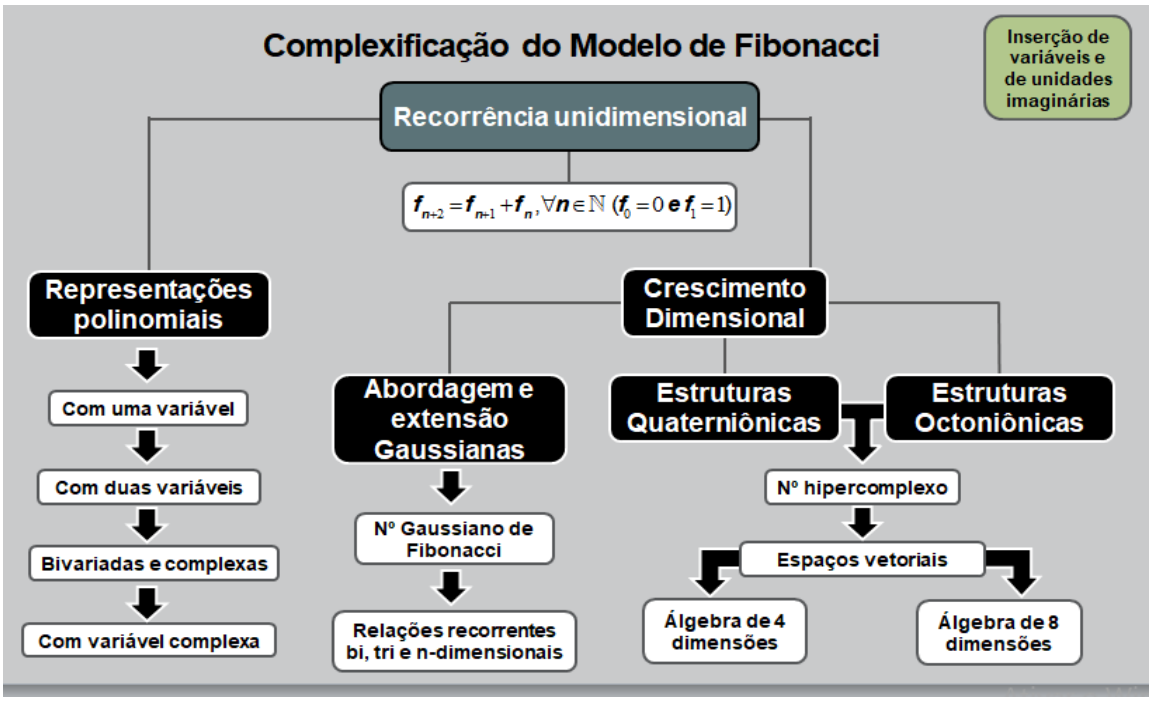


Fonte: Elaboração da autora.

APÊNDICE D – CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: COMPLEXIFICAÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI

CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO





Fonte: Elaboração da autora.

APÊNDICE E – DEFINIÇÕES INERENTES À ÁLGEBRA

	Definição	Fonte
Espaço Vetorial	Um **Espaço Vetorial** E é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores $u, v \in E$ faz corresponder um novo vetor $u+v \in E$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado o produto de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial: Comutatividade: $u+v=v+u$; Associatividade: $(u+v)+w=u+(v+w)$ e $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$; Vetor nulo: Existe um vetor $0 \in E$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v+0=0+v \quad \forall \quad v \in E$; Inverso aditivo: Para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de v, tal que $-v+v=v+(-v)=0$; Distributividade: $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ e $\alpha(u+v)=\alpha u+av$; Multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$.	Lima (2016)
Álgebra Linear	A **Álgebra Linear** é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Além disso, esse estudo abrange matrizes e formas quadráticas.	Lima (2016)
Álgebra	Uma **Álgebra** A será um espaço vetorial que está munido com uma aplicação bilinear $m: A \times A \to A$ chamada "multiplicação" e um elemento diferente de zero $1 \in A$ chamado de "unidade" de tal forma que $m(1,a)=m(a,1)=a$.	Santos (2016)
	Uma **Álgebra** A é finitamente gerada sobre $\mathbb{R}$ quando existe um subconjunto finito $X=\{a_1,\cdots,a_k\} \subset A$ tal que todo elemento de A pode ser obtido através de um número finito de somas, multiplicações de elementos de X e/ou multiplicações por escalares de $\mathbb{R}$, isto é, se $u \in A$, então, $u=\sum \lambda_i a_{i1},\cdots,a_{is}$ onde $a_{ij} \in X$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$.	

Álgebra	Uma Álgebra A é uma **Álgebra com divisão**, se dado $a,b \in A$ com $ab = 0,$ então $a = 0$ ou $b = 0.$ Equivalentemente, A é uma Álgebra de divisão se as operações de multiplicação à esquerda e à direita por qualquer elemento diferente de zero são invertíveis.	Santos (2016)
	Uma **Álgebra de divisão normada** é uma Álgebra com divisão que segue as condições de norma. Ou seja, uma Álgebra com divisão é dita normada se é uma Álgebra A e também é um espaço vetorial normado com $\| ab \| = \| a \| \cdot \| b \|$.	

Fonte: Elaboração da autora.

ANEXO A – MATRIZ CURRICULAR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA (IFCE – CAMPUS FORTALEZA)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

Matriz: 3817 - Licenciatura em Matematica III (2011/2)

Curso: 01402 - Licenciatura em Matemática

Nível	Periodicidade	Regime	Situação	Per. Letivo Inicial	C.H. Disciplinas
Graduação	Periodo	Não Seriado	Matriz em Transição	2011/2	2820

Per.	Componentes Curriculares								Carga Hor.	Co-Requisitos	Pré-requisitos	Equivalentes
	Código	Descrição	Núcleo	Opt	Hab.	Cred.	Cred. Nec.					
1	MAT006	COMUNICACAO E LINGUAGEM	COM	N	57	3	0		60			
1	MAT018	FILOSOFIA DA CIENCIA	COM	N	57	4	0		80			
1	MAT020	FUNDAMENTOS DA MATEMATICA I	COM	N	57	5	0		100			
1	MAT023	GEOMET.ANALIT.PLANA.E NUMER.COMPLEXOS	COM	N	57	4	0		80			
1	MAT025	GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL	COM	N	57	4	0		80			
1	MAT026	HISTORIA DA EDUCACAO NO BRASIL	COM	N	57	3	0		60			
1	MAT029	INGLÊS INSTRUMENTAL	COM	N	57	2	0		40			
2	MAT019	FUNDAMENTOS SOCIOFILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO	COM	N	57	4	0		80			
2	MAT032	LOGICA MATEMATICA	COM	N	57	3	0		60			
2	MAT.058	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	COM	N	57	3	0		60			
2	CLFI.004	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	COM	N	57	4	0		80			
2	01.LMA.05	DESENHO GEOMÉTRICO	COM	N	57	2	0		40			
2	01.LMA.06	FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA II	COM	N	57	4	0		80			
3	01.LMA.08	DIDÁTICA GERAL	COM	N	57	3	0		60			
3	01.LMA.09	FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA III	COM	N	57	3	0		60			
3	01.LMA.10	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	COM	N	57	2	0		40			
3	CLFI.006	METODOLOGIA DA PESQUISA EDUCACIONAL	COM	N	57	2	0		40			

03/08/2018 13:34 Página: 1

José Stálio Rodrigues dos Santos
Coord. Curso de
Licenciatura em Matemática
Campus Fortaleza

Bárbara Luana Sousa Marques
Coordenadoria Pedagógica
SIAPE 3565413

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

3	CLFI.007	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II	COM	N	57	4	0		80			
3	MAT041	PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO	COM	N	57	2	0		40			
3	MAT024	GEOMETRIA ANALITICA ESPACIAL	COM	N	57	4	0		80			
4	MAT011	ESTAGIO I	COM	N	57	5	0		100			
4	MAT001	ÁLGEBRA LINEAR	COM	N	57	4	0		80			
4	CLFI.010	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III	COM	N	57	4	0		80			
4	01.LMA.12	CURRÍCULOS E PROGRAMAS	COM	N	57	3	0		60			
4	01.LMA.13	PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM	COM	N	57	2	0		40			
4	01.LMA.016	INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA	COM	N	57	3	0		60			
4	FIS.002	PRODUCAO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM	COM	S	57	4	0		80			
5	CLFI.039	ESTÁGIO SUPERVISIONADO II	COM	N	57	5	0		100			
5	CLFI.014	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV	COM	N	57	4	0		80			
5	MAT042	TEORIA DOS NUMEROS	COM	N	57	4	0		80			
5	MAT010	EQUACOES DIF. E SERIES	COM	N	57	4	0		80			
5	SAN011	GEOMETRIA DESCRITIVA	COM	N	57	4	0		80			
6	MAT013	ESTAGIO SUPERVISIONADO III	COM	N	57	5	0		100			
6	MAT017	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	COM	N	57	4	0		80			
6	TELM.068	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	COM	N	57	4	0		80			
6	MAT035	METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMATICA	COM	N	57	4	0		80			
6	01.LMA.14	MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA	COM	N	57	3	0		60			
6	01.LMA.15	PROJETO SOCIAL	COM	N	57	1	0		20			
6	CLMA.003	EDUCAÇÃO INCLUSIVA	COM	S	57	2	0		40			
7	01.402.12	LIBRAS	COM	S	57	2	0		40			
7	01.402.39	INTRODUÇÃO À ANÁLISE	COM	S	57	4	0		80			

03/08/2018 13:34 Página: 2

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

7	FIS001	ELETRICIDADE E MAGNETISMO I	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS002	ELETRICIDADE E MAGNETISMO II	COM	S	57	4	0	80			
7	FIS003	ELETROMAGNETISMO	COM	S	57	6	0	120			
7	MAT015	ESTATISTICA	COM	S	57	2	0	40			
7	FIS004	FÍSICA CONTEMPORANEA	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS005	FISICA EXPERIMENTAL LIC.	COM	S	57	4	0	80			
7	FIS006	FÍSICA GERAL I	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS007	FÍSICA GERAL II	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS008	FISICA TERMICA	COM	S	57	5	0	100			
7	FIS010	HISTORIA DA FISICA	COM	S	57	4	0	80			
7	MAT031	LOGICA DE PROGRAMACAO	COM	S	57	4	0	80			
7	FIS011	MECANICA CLASSICA	COM	S	57	5	0	100			
7	FIS012	METODOLOGIA DO ENSINO DA FÍSICA	COM	S	57	4	0	80			
7	FIS013	ONDAS E OPTICA	COM	S	57	6	0	120			
7	MAT037	TÓPICOS DE MATEMÁTICA	COM	S	57	2	0	40			
7	MAT038	INTRODUÇÃO A ANÁLISE MATEMÁTICA	COM	S	57	4	0	80			
7	FIS014	PRINCIPIOS DA FISICA MODERNA	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS015	QUÍMICA GERAL	COM	S	57	5	0	100			
7	FIS016	TOPICOS DE FISICA QUANTICA	COM	S	57	6	0	120			
7	FIS017	TOPICOS DE MAT.APLIC. A FISICA	COM	S	57	6	0	120			
7	CLFI.020	ESTÁGIO SUPERVISIONADO IV	COM	N	57	5	0	100			
7	MAT005	CALCULO NUMERICO	COM	N	57	4	0	80			
7	MAT030	INTRODUCAO ÀS VARIÁVEIS COMPLEXAS	COM	N	57	4	0	80			

INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
DIRETORIA DE ENSINO
Matrizes Curriculares

Código	Sigla	Habilitação	Básica	Créd. Obrig.	Carga Horária Estágio	Optativa	Eletiva	At. Comp.	Proj. Final	Min. Créd.
	57	DISCIPLINAS BÁSICAS	Sim		0	40	0	200	80	0

José Stálio Rodrigues dos Santos
Coord. Curso de
Licenciatura em Matemática
Campus Fortaleza

Bárbara Luana Sousa Marques
Coordenadoria Pedagógica
SIAPE 3565413

ANEXO B – PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA (PUD): DISCIPLINA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (IFCE – CAMPUS FORTALEZA)

INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ-IFCE
CAMPUS FORTALEZA
DIRETORIA DE ENSINO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROGRAMA DE UNIDADE DIDÁTICA – PUD

DISCIPLINA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Código:	
Carga Horária Total: 40 h	Teórica: 30 h Prática Como Componente Curricular: 10 h
Número de Créditos:	2
Código pré-requisito:	Cálculo I
Semestre:	8º
Nível:	Graduação

EMENTA

Estudo do conceito, desenvolvimento histórico e representações do número. O desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações ao longo da história. Vida obra e contexto histórico dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. História da Matemática no Brasil.

OBJETIVO

- Levar o aluno a compreender o desenvolvimento da Matemática de acordo com o contexto histórico e social e fazer conexões com as metodologias de ensino e propostas curriculares;
- Conhecer os principais matemáticos e suas principais contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo da história;
- Utilizar o conhecimento da História da Matemática para aprimorar o ensino de forma crítica e contextualizada;
- Entender o desenvolvimento da História da Matemática no Brasil.

PROGRAMA

1. O conceito de número e os sistemas de numeração.
2. O desenvolvimento histórico da álgebra, Geometria e Aritmética nas diferentes épocas e civilizações.
3. Principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática.
4. História da Matemática no Brasil.

METODOLOGIA DE ENSINO

Aulas expositivas, seminários, debates, apresentação de vídeos e pesquisa.

AVALIAÇÃO

Provas, trabalhos, seminários e avaliação contínua.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2004.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

José Stálio Rodrigues dos Santos
Coord. Curso de Licenciatura em Matemática
Campus Fortaleza

Bárbara Luana Sousa Marques
Coordenadoria Pedagógica
SIAPE 3565413

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ-IFCE
CAMPUS FORTALEZA
DIRETORIA DE ENSINO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

- MENDES, I. A. **O uso da História no Ensino da Matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

- MIGUEL, Antônio *et. al*. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.

Coordenador do Curso	Setor Pedagógico
José Stálio Rodrigues dos Santos Coord. Curso de Licenciatura em Matemática Campus Fortaleza	Bárbara Luana Sousa Marques Coordenadoria Pedagógica SIAPE 3565413

Válido somente com assinatura e carimbo do IFCE

ANEXO C – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Engenharia Didática sobre o processo de complexificação do modelo de Fibonacci: relações recorrentes bi, tri e n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais.

Pesquisador: RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 88298518.1.0000.5589
Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.701.969

Apresentação do Projeto:
O projeto está inserido na Área de Estudo de Ciências Exatas e da Terra. A pesquisa "trata-se de um projeto de dissertação de Mestrado Acadêmico a ser desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) no campus Fortaleza. A finalidade desse estudo é investigar as representações complexas oriundas do modelo de Fibonacci em situações de ensino. Para isso, será adotada a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa articulada com a Teoria das Situações Didáticas. A proposta do experimento didático é mobilizar os aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos com a finalidade de oportunizar a compreensão do processo histórico-evolutivo do modelo de Fibonacci a partir da inserção da unidade imaginária "i" e sua discussão em dimensões superiores."

Objetivo da Pesquisa:
O objetivo geral da pesquisa é "desenvolver um estudo sobre o processo de complexificação da Sequência de Fibonacci, a fim de investigar seus teoremas, suas propriedades e identidades, buscando explorar sua forma complexa e n-dimensional em situações de ensino. Os objetivos específicos daí recorrentes são:
1. Apresentar o desenvolvimento histórico e evolutivo da SF inerentes ao seu processo de complexificação, através de situações-problema propostos em sala de aula.

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br

2. Desenvolver identidades uni, bi, tri e n-dimensionais da Sequência de Fibonacci.
3. Explorar representações matriciais e análogas da fórmula de Binnet para a classe dos polinômios bivariados de Fibonacci.
4. Investigar representações polinomiais do modelo de Fibonacci na variável complexa.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

De acordo com a pesquisadora: "Você não deve participar deste estudo se você se sentir constrangido com registro de fotos e áudios de suas produções durante a aplicação da pesquisa. Assim, como providências e cautelas adotadas para minimizar possíveis desconfortos ou riscos, o participante terá a liberdade de deixar de participar do estudo sem qualquer prejuízo".

Os benefícios apresentados pela pesquisadora foram dois:

1. "Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas que possibilitam aos alunos da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através do estudo de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes ao modelo complexo de Fibonacci, assim, contribuindo com a formação inicial docente do participante".
2. "Além disso, os dados coletados serão utilizados somente para pesquisa e os resultados serão mostrados através de revistas especializadas na área de investigação e/ou em encontros científicos e na dissertação, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos participantes".

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto está bem redigido. Algumas considerações:

1. Algumas referências estão incorretas no texto. Sugiro revê-las.

*Há dois Alves (2016):

ALVES, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. Interfaces da Educ., Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150, 2016. ISSN2177-7691.

e

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016.

**Nóbrega-Therrien e Therrien (2004) não são mencionados na seção.

2. Segundo a ABNT, a principal diferença entre anexo e apêndice é que os apêndices são textos criados pelo próprio autor para complementar sua argumentação, enquanto os anexos são

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

Plataforma Brasil

documentos criados por terceiros, e usados pelo autor. Portanto, se os questionários forem de autoria da pesquisadora, sugiro que a seção 'Anexos' seja renomeada para 'Apêndices'.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os seguintes Termos de apresentação obrigatória estão sem o nome da cidade (a informação disponibilizada é "LOCAL, 20 de abril de 2018"): Declaração de compromisso pelo pesquisador de apresentar os resultados obtidos no desenvolvimento da pesquisa; Declaração de garantia de regresso dos benefícios; Orçamento; Cronograma e Declaração de existência de infraestrutura para a realização da pesquisa. Sugiro que "local" seja substituído por "Fortaleza".

Recomendações:

1. Analisar se o trabalho tem apêndices ou anexos;
2. Algumas referências estão incorretas no texto. Sugiro revê-las.
3. Os seguintes documentos estão sem o nome da cidade (a informação disponibilizada é "LOCAL, 20 de abril de 2018"): Declaração de compromisso pelo pesquisador de apresentar os resultados obtidos no desenvolvimento da pesquisa; Declaração de garantia de regresso dos benefícios; Orçamento; Cronograma e Declaração de existência de infraestrutura para a realização da pesquisa. Sugiro que "local" seja substituído por "Fortaleza".

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Aprovado com recomendações.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇOES_BASICAS_DO_PROJETO_1115780.pdf	23/04/2018 21:53:35		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	6_TermodeConsentimentoLivreeEsclarecido.pdf	23/04/2018 21:52:19	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	9_projetodetalhado.pdf	20/04/2018 11:11:55	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	8_termodeinfraestrutura.PDF	20/04/2018 11:11:37	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ

Continuação do Parecer: 2.701.969

Cronograma	5_Previsaodocronogramadeexecucao.pdf	20/04/2018 11:10:14	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Orçamento	4_Orcamento.pdf	20/04/2018 11:10:02	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	3_Declaracaodegarantiaderegressodosbeneficiosdapesquisa.pdf	20/04/2018 11:09:37	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	2_Declaracaodecompromissodeapresentacaodosresultados.pdf	20/04/2018 11:08:48	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito
Folha de Rosto	1_Folhaderosto.PDF	20/04/2018 11:03:54	RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

FORTALEZA, 08 de Junho de 2018

Assinado por:
Joelia Marques de Carvalho
(Coordenador)

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br