INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE CAMPUS FORTALEZA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PGECM
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARIA VANÍSIA MENDONÇA DE LIMA

CATEGORIAS INTUITIVAS NO ENSINO DO CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO DE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA: O CASO DAS INTEGRAIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS – IDPs

FORTALEZA-CE
2017

MARIA VANÍSIA MENDONÇA DE LIMA

CATEGORIAS INTUITIVAS NO ENSINO DO CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO DE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA: O CASO DAS INTEGRAIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS – IDPs

Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática apresentada à Banca Examinadora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

FORTALEZA-CE

2017

MARIA VANÍSIA MENDONÇA DE LIMA

CATEGORIAS INTUITIVAS NO ENSINO DO CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO DE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA: O CASO DAS INTEGRAIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS – IDPs

Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática apresentada à Banca Examinadora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

Aprovada em: 28/06/2017

BANCA EXAMINADORA

Fc Regis V Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Presidente)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof(a). Dr(a). Natália Maria Cordeiro Barroso (1º Membro externo)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Rodrigo Lacerda Carvalho

Prof. Dr. Rodrigo Lacerda Carvalho (2º membro externo)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Prof(a). Dr(a). Ana Cláudia Mendonça Pinheiro (1º membro interno)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Marta Alves da Silva

Prof(a). Dr(a). Marta Alves da Silva (2º membro interno)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732c Lima, Maria Vanísia Mendonça de.
CATEGORIAS INTUITIVAS NO ENSINO DO CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO DE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA : O CASO DAS INTEGRAIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS - IDPs / Maria Vanísia Mendonça de Lima. - 2017.
156 f. : il.

Dissertação (Mestrado) Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

1. IDPs. 2. Visualização. 3. Situações Didáticas. 4. Engenharia Didática.. I. Titulo.
CDD 510.07

Aos meus pais pelo incentivo e apoio em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, pela saúde e pela proteção durante todo o percurso dessa trajetória e por ser a força sempre presente que me possibilitou transpor mais uma etapa e concretizar mais um objetivo da minha vida.

Aos meus pais, Valdir e Francisca, pela amizade, dedicação, incentivo e apoio em todos os momentos da minha vida.

Aos meus irmãos e grandes amigos Vanúbio e Venânsia e demais familiares pelo apoio dado nos momentos difíceis e por estarem ao meu lado durante toda a trajetória.

A todos os amigos que me apoiaram e acreditaram que eu poderia alcançar esta conquista. Também, por me incentivarem e compreenderem as minhas ausências em muitos momentos de suas vidas, pelo fato de estar estudando.

Expresso também o meu agradecimento e reconhecimento ao meu orientador Professor Dr. Francisco Regis Vieira Alves, pelo conhecimento que me proporcionou adquirir, pela atenção, contribuição, apoio e sugestões valiosas.

A minha colega de curso e amiga Monique Marinho pela amizade, pelo companheirismo, apoio e pelos inúmeros momentos de descontração e alegria.

A todos os colegas do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela experiência vivenciada e pelos conhecimentos compartilhados nesse período.

Aos alunos que participaram da pesquisa pela colaboração na realização das atividades propostas, permitindo serem orientados e observados.

Aos professores da banca pela contribuição e sugestões que enriqueceram este trabalho.

Ao IFCE-*Campus* Cedro pelo espaço para aplicação da pesquisa e aos professores do PGECM que trouxeram seus conhecimentos e suas vivências como educadores, contribuindo para a minha continua formação profissional. A todos que compõem o IFCE e, enfim, a todas as pessoas amigas que de uma forma ou de outra contribuíram e apoiaram-me para que eu pudesse transpor mais uma etapa de minha vida.

RESUMO

Diversos trabalhos investigativos apontam uma preocupação com o ensino e aprendizagem do conceito de Integrais Definidas (IDs) e vários estudos, de mesma natureza, apresentam um interesse pelas Integrais Generalizadas (IGs), uma vez que determinados entraves oriundos ao ensino e a aprendizagem de IDs podem permanecer quando se aborda a generalização da noção de integral. Porém, no contexto das Integrais Dependentes de Parâmetros (IDPs) pode ser constatada uma considerável escassez de investigações sobre o ensino e aprendizagem desse assunto. Dessa forma, a presente pesquisa elegeu o interesse por esse tipo de integral e objetivou analisar situações didáticas no contexto da noção de IDPs com a identificação das categorias do raciocínio intuitivo. Para tanto, foram concebidas e aplicadas sequências de ensino com o arrimo do *software* GeoGebra para explorar a visualização dos critérios de convergência de algumas integrais. A metodologia de pesquisa utilizada para o desenvolvimento da investigação foi a Engenharia Didática de Artigue. Os pressupostos teóricos do trabalho estão apoiados à Teoria das Categorias Intuitivas de Efrain Fischbein e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Com o intuito de identificar as possíveis barreiras, no tocante à aprendizagem do objeto de estudo, fez-se a análise de obras didáticas reconhecidas de Cálculo para identificar os elementos de transição e elementos de ruptura que podem se manifestar na transição do estudo das IGs para o contexto das IDPs. Também, foram elaboradas e aplicadas sequências didáticas estruturadas e concebidas a partir de uma perspectiva fundamentada na TSD. A coleta de dados se deu a partir de uma ação investigativa em uma turma da disciplina de Cálculo II do Curso de Licenciatura em Matemática do IFCE – Campus Cedro. O registro das categorias de raciocínio intuitivo (intuições afirmativas, intuições conjecturais e intuições antecipatórias) de Efrain Fischbein foi feito mediante a exploração das quatro fases da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização. Diante dos possíveis obstáculos didáticos encontrados durante o desenvolvimento do estudo e, após a análise a posteriori da investigação, foi evidenciado, com esta pesquisa, que a visualização constitui um caminho diferenciado, no sentido da superação de determinadas barreiras recorrentes na aprendizagem do objeto matemático em estudo, pois a mesma torna intuitiva a compreensão do processo de convergência e divergência das Integrais Dependentes de Parâmetros.

Palavras-chave: IDPs. Visualização. Situações Didáticas. Engenharia Didática.

ABSTRACT

Several research projects point to a concern with the teaching and learning of the concept of Definite Integrals (DI) and several studies of the same nature have an interest in Generalized Integrals (GIs), since certain obstacles to teaching and learning IDs can remain when one approaches the generalization of the notion of integral. However, in the context of Parameter Dependent Integrals (PIDs), there is a considerable shortage of research on teaching and learning this subject. Thus, the present study chose the interest for this type of integral and aimed to analyze didactic situations in the context of the notion of PIDs with the identification of the categories of intuitive reasoning. To this end, teaching sequences were designed and applied with the support of the GeoGebra software to explore the visualization of the convergence criteria of some integrals. The research methodology applied to the research was Artigue's Didactic Engineering. The theoretical assumptions of the work are supported by Efrain Fischbein's Theory of Intuitive Categories and Guy Brousseau's Theory of Didactical Situations (TDS). In order to identify possible barriers, in terms of learning the object of study, the analysis of recognized didactic works of Calculus was done to identify the elements of transition and elements of rupture that can manifest in the transition from the study of GIs to the context of PIDs. Also, didactic sequences structured and conceived from a perspective based on TDS were elaborated and applied. The data collection was based on an investigative action in a class of the discipline of Calculus II of the Mathematics Major at the IFCE - Campus Cedro. Efrain Fischbein's categories of intuitive reasoning (affirmative intuitions, intuitive intuitions, and anticipatory intuitions) were recorded through the exploration of the four stages of Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations, namely: action, formulation, validation, and institutionalization. Faced with the possible didactic obstacles encountered during the development of the study, and after the posterior analysis of the research, we noticed, with this research, that visualization constitutes an alternative path, in the sense of overcoming certain recurrent barriers in the learning of this mathematical study, since it makes the understanding of the process of convergence and divergence of Parameter Dependent Integrals known by intuition.

Keywords: PIDs. Visualization. Didactic Situations. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CUV	Cálculo em Uma Variável
CVV	Cálculo em Várias Variáveis
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
IDPs	Integrais Dependentes de Parâmetros
IGs	Integrais Generalizadas
TINC	Transição Interna do Cálculo
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na presente investigação, assumimos uma preocupação distinguida com o ensino e com a aprendizagem da noção de Integrais Dependentes de Parâmetros (IDPs). Assim, tendo em vista a constatação de um ensino de Matemática no meio acadêmico, constituído de vários exemplos de assuntos ou tópicos condicionados por entraves, obstáculos e concepções tradicionais, que tendem a tornar imutável um ensino que evidencia um trato eminentemente analítico-formal, em detrimento de um ensino, cuja tônica não negligencie o conceitual, o heurístico e o intuitivo, propomos uma investigação que busca registrar a manifestação de determinadas categorias intuitivas, ao decurso da ação solucionadora de problemas, com o auxílio da tecnologia, haja vista sua reconhecida natureza multifacetada e de difícil identificação ou ocorrência, por parte do aprendiz.

Por outro lado, tendo em vista seu enquadramento na corrente de investigação denominada de Didática da Matemática (DM), da vertente francesa, buscamos apoiar nossas concepções, escolhas e trajetórias de incursão na metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática (ED). A adequabilidade conceitual, nesse caso, se evidencia pelo fato de que, em suas origens, tal modalidade investigativa proporcionou e ainda proporciona um olhar diferenciado e o real acúmulo sistemático de conhecimentos científicos intimamente vinculados ao binômio ensino-aprendizagem.

Assim, os elementos coligidos na fase das análises preliminares, primeira etapa de uma ED, devem fundamentar um olhar crítico e pormenorizado para o ensino atual do assunto relacionado com as IDPs, não desconsiderando um contexto da transição de estudos acadêmicos, envolvendo o contato dos estudantes com a noção de integrais definidas, no modelo de integração segundo Riemann. Logo em seguida, eles mantêm contato com a noção generalizadora do objeto anterior, chamada de Integral Imprópria ou Integral Generalizada (IG). E, por fim, num decurso temporal que pode exigir, em consonância com as exigências curriculares, de três a quatro semestres, o contato final com a noção de Integrais Dependentes de Parâmetros – IDPs.

Dessa forma, não podemos assumir uma posição de negligência relativa a uma profusão de alterações, modificações e exigências inusitadas que se apresentam aos estudantes, no contato progressivo com os objetos mencionados no parágrafo anterior. Desse modo, nosso olhar investigativo na primeira parte do estudo se mostrou afetado pela perspectiva de Alves (2011), ao apontar o termo Transição Interna do Cálculo (TINC), ao notar que um conjunto de fenômenos, originados do binômio ensino-aprendizagem, precisam ser melhor compreendidos, no referido tempo de contato com teorias matemáticas generalizantes e estruturantes.

Por tal via argumentativa, enveredaremos numa direção que prevê um primeiro momento de demarcação/delimitação de nosso objeto de investigação que, nesse caso, foi direcionado à noção de IDPs. Assim, tendo em vista a eleição de uma problemática declarada, relevante e justificada, indicamos nossa questão norteadora de investigação, que tem a seguinte indagação: É possível conceber e descrever sequências de ensino atinentes a Integrais Dependentes de Parâmetros e amparadas na visualização que promovam aos estudantes de Cálculo II mobilizar um conhecimento intuitivo na aprendizagem de IDPs?

A justificativa de nosso trabalho encontra-se no fato de constatarmos, em diversos estudos investigativos, a preocupação com o ensino e a aprendizagem do conceito de integrais generalizadas, já que determinados entraves oriundos do ensino e da aprendizagem de integrais definidas podem persistir quando se aborda a generalização da noção do modelo. Ademais os livros de análise enfatizam apenas o caráter analítico e o uso de regras formais ao abordar o objeto integral generalizada.

Por tratar-se de um percurso de estudos compulsórios na academia que tendem a proporcionar exigências dos estudantes e, também, dos professores, no primeiro contato com as integrais definidas, culminando com o estudo das integrais múltiplas, com aparo na perspectiva da TINC, prevemos a manifestação de obstáculos e entraves, sobretudo de *elementos de ruptura* e, em consonância com a preocupação metodológica assumida, a desconsideração dos *elementos de transição* concernentes ao caso das IDPs.

Outro elemento balizador de nossas escolhas, refere-se ao bem conhecido e criticado aspecto algorítmico do ensino acadêmico. Nesse sentido, as críticas atinentes aos objetos elementares do Cálculo, como limite, derivada e integral se mostram exaustivamente discutidos, embora as mudanças se configurem ainda, décadas depois, por alterações pontuais e esforço particular de agentes investigativos.

Dessa forma, depreendemos que a tônica do ensino algorítmico tende a perpetuar hábitos indesejáveis e sem profundidade, no que concerne ao aprendizado esperado da noção das IDPs. Isso posto, com a intenção de adotar uma perspectiva de análise distinguida, tivemos como objetivo geral para essa pesquisa analisar situações didáticas no contexto da noção de IDPs com a identificação das categorias do raciocínio intuitivo (intuições afirmativas, intuições conjecturais e intuições antecipatórias).

Para alcançarmos o objetivo geral de nossa investigação, elegemos os seguintes objetivos específicos:

✓ Conceber situações didáticas para trabalhar com critérios de convergência de IDPs, utilizando os recursos computacionais gráficos e algébricos do *software* GeoGebra;

✓ Descrever situações didáticas envolvendo a noção de Integrais Dependentes de Parâmetros;

✓ Analisar livros didáticos de Cálculo que tratem das Integrais Generalizadas para identificar os *elementos de transição* e *elementos de ruptura* que podem se manifestar no contexto de aprendizagem desse objeto matemático;

✓ Compreender o processo de convergência/divergência das IDPs por meio da visualização e identificação das categorias do raciocínio intuitivo.

Assim, tendo em vista a eleição dos objetivos anteriores e, desde que prevemos uma incursão investigativa *in loco* a fim de obter maiores conhecimentos didático-metodológicos sobre o objeto IDP, indicaremos as seguintes hipóteses de investigação:

(i) Os elementos intuitivos mobilizados no contexto da convergência de IGs proporcionam uma readaptação e se manifestam no contexto da aprendizagem das IDPs;

(ii) A exploração do componente computacional permite a mobilização de um conhecimento que extrapola o caráter formal e analítico, recorrentemente tornado hegemônico no ensino acadêmico.

(iii) A visualização proporciona a manifestação de categorias intuitivas no processo resolutivo de situações problema em torno das IDPs.

Quanto a estrutura lógica de nossa investigação, esse trabalho está organizado em sete capítulos.

No primeiro capítulo, expomos o cenário de nossa investigação apresentando a questão norteadora da pesquisa, bem como a justificativa da temática do trabalho, os objetivos geral e específicos do estudo e as indicações das hipóteses elegidas para a referida inquirição.

No segundo capítulo, fazemos uma revisão bibliográfica apresentando algumas considerações sobre as pesquisas referentes ao ensino e a aprendizagem de integral definida, integral generalizada e integral dependente de parâmetros.

No terceiro capítulo, apresentamos o referencial metodológico e teórico nos quais apoiamo-nos para delinear a nossa investigação. Nessa parte, discorremos sobre: a Engenharia Didática, que é a metodologia de pesquisa do estudo; a Teoria das Situações Didáticas e a Teorias das Categorias Intuitivas de Efrain Fischbein. Também explicamos, nessa seção, como ocorre o caráter de complementaridade entre a metodologia de pesquisa e o aporte teórico da inquirição.

No quarto capítulo, discorremos sobre as análises preliminares da pesquisa, trazendo uma abordagem sobre o desenvolvimento histórico do cálculo integral, fazendo uma análise dos livros de Cálculo que abordam o objeto matemático estudado e apresentando os critérios de convergência para as integrais generalizas.

No quinto capítulo, trazemos as análises *a priori* da investigação, apresentando as situações didáticas que foram trabalhadas na pesquisa e descrevendo a etapa da experimentação da inquirição em foco.

No sexto capítulo, expomos as concepções e análises *a posteriori* das sequências de ensino trabalhadas na investigação e a discussão da validação do nosso estudo, apresentando os elementos para uma validação externa da sessão didática, bem como elementos de uma validação interna, com ambas previstas pela sistematização sustentada pela ED.

Por fim, no sétimo capítulo, fazemos as considerações finais de nosso trabalho, apontando as principais evidências encontradas após o desenvolvimento do estudo executado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo, apresentamos alguns trabalhos que tratam do ensino e aprendizagem da noção de Integral Definida (ID), bem como investigações referentes a Integrais Generalizadas (IGs) e Integrais Dependentes de Parâmetros (IDPs). Perspectivamos com o levantamento bibliográfico, compreender como acontece o ensino e aprendizagem desses objetos matemáticos e identificar obstáculos didáticos que podem ser encontrados nesse cenário de investigação.

Ressaltamos que a escolha dos estudos apresentados esteve pautada no critério de tratar de investigações cuja demarcação do campo de estudo estivesse centralizado no ensino e aprendizagem da noção de IDs, IGs e IDPs.

Dessa forma, em todas as seções desse capítulo, buscamos um cenário de investigação pormenorizado do objeto matemático nominado de Integral, com um olhar fortemente influenciado por uma preocupação marcante com o ensino e aprendizagem desse conteúdo.

2.1 Integral Definida

Foi realizado um levantamento bibliográfico atinente ao ensino e aprendizagem da integral definida, uma vez que o referido conceito representa um caso particular da definição da noção de integral segundo Riemann. Podemos constatar, em nossa revisão bibliográfica, que existe uma grande profusão de trabalhos relacionados a esse objeto matemático. (ESCARLATE, 2008; RIBEIRO, 2010; CARGNIN, 2013; BERMÚDEZ, 2011 e TOMÉ, 2011).

No rol das pesquisas nacionais, Escarlate (2008) trata do ensino e aprendizagem do conceito de integral definida em sua dissertação, que tem como título “Uma investigação sobre a aprendizagem de integral”. Sua pesquisa foi realizada com alunos da turma de graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro e buscava identificar os conflitos pertinentes à aprendizagem do conceito de integral definida, questionando se poderia considerar a noção de área como uma raiz cognitiva para o conceito de Integral Definida (Escarlate, 2008). Ademais, segundo o ponto de vista desse autor:

> Ao ouvir a frase “a integral e a área sob a curva”, o aluno pode recorrer à ideia de área com a qual ele teve contato em seus estudos anteriores. O aluno passa a associar imediatamente o conceito de integral com o conceito de área insuficientemente generalizado que ele conhece. Com isso, a relação com integral adquire um aspecto muito restrito. A integral, como indicam os resultados que mostraremos mais

> adiante, passa a se caracterizar na imagem de conceito dos alunos apenas como uma ferramenta a mais para calculo de área de figuras planas. (ESCARLATE, 2008, p. 33).

O autor assinala que uma grande parte dos alunos adquire uma concepção imprecisa da definição de integral definida e, que o conceito desse objeto matemático é obscuro aos estudantes. Ademais, essa ideia restrita de integral definida relacionada diretamente com a área provoca/motiva a manifestação de erros, até mesmo em situações muito simples. Isso, aliado à falta de contato com uma variedade ampla e diversificada suficiente de exemplos e situações-problema, provoca, de algum modo, um empobrecimento das imagens de conceitos formados pelos alunos.

Ribeiro (2010), em sua dissertação de mestrado intitulada "O ensino do conceito de integral em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da resolução de problemas", constata nas evidências de sua investigação que a História da Matemática é um recurso importante, já que permite aos alunos adquirir conhecimentos e evoluir ao conhecerem os obstáculos perpassados durante todo o percurso de evolução do conceito de integral. Ressalta também que a resolução de problemas é uma metodologia de trabalho eficiente para ser executada em sala, pelo fato de direcionar a atenção dos alunos sobre as ideias estudadas e sobre atribuir sentido aos conceitos trabalhados nas aulas (Ribeiro, 2010).

Outro trabalho nacional utilizado em nossa revisão bibliográfica, trata-se da tese de Cargnin (2013), intitulada de "Ensino e aprendizagem da Integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas". A autora, ao preocupar-se com o ensino e aprendizagem de Integral de Riemann, apoia-se à Teoria das Situações Didáticas e à Teoria de Registro de Representações Semióticas para elaborar as atividades que foram desenvolvidas em sua investigação, utilizando como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

Cargnin (2013), ressalta que os estudantes de Cálculo precisam explorar e investigar os conteúdos de forma autônoma para aprenderem os conceitos estudados. A autora aponta que a discussão em grupo e a exploração computacional trazem contribuições relevantes à aprendizagem do cálculo integral e pontua, também, que a produção de mapas conceituais é uma forma de o professor identificar algumas barreiras na aprendizagem do aluno e visualizar pontos que podem ser robustecidos para ampliar a compreensão do conceito de Integrais Definidas.

Bermúdez (2011), em sua tese de doutorado "Comprensión del concepto de Integral Definida em el marco de la teoría "APOE"", investigou sobre a compreensão do conceito da integral definida apresentada por estudantes de Licenciatura em Matemática. Os alunos integrantes da pesquisa estavam cursando o terceiro ano do curso citado, na Universidade de Quindio - Armênia na Colômbia.

Bermúdez (2011) ressalta a importância da Integral Definida no currículo acadêmico, ao pontuar que "o conceito de integral definida é um dos conceitos fundamentais em Análise, se inclui no currículo de diversas carreiras e, de modo concreto, aparece nos planos de estudo da graduação em Matemática na Colômbia" (2011, p. 20, tradução nossa). O autor também assinala que os alunos manifestam dificuldades e sérios entraves na aprendizagem do conceito de Integral Definida ao apresentar a seguinte observação:

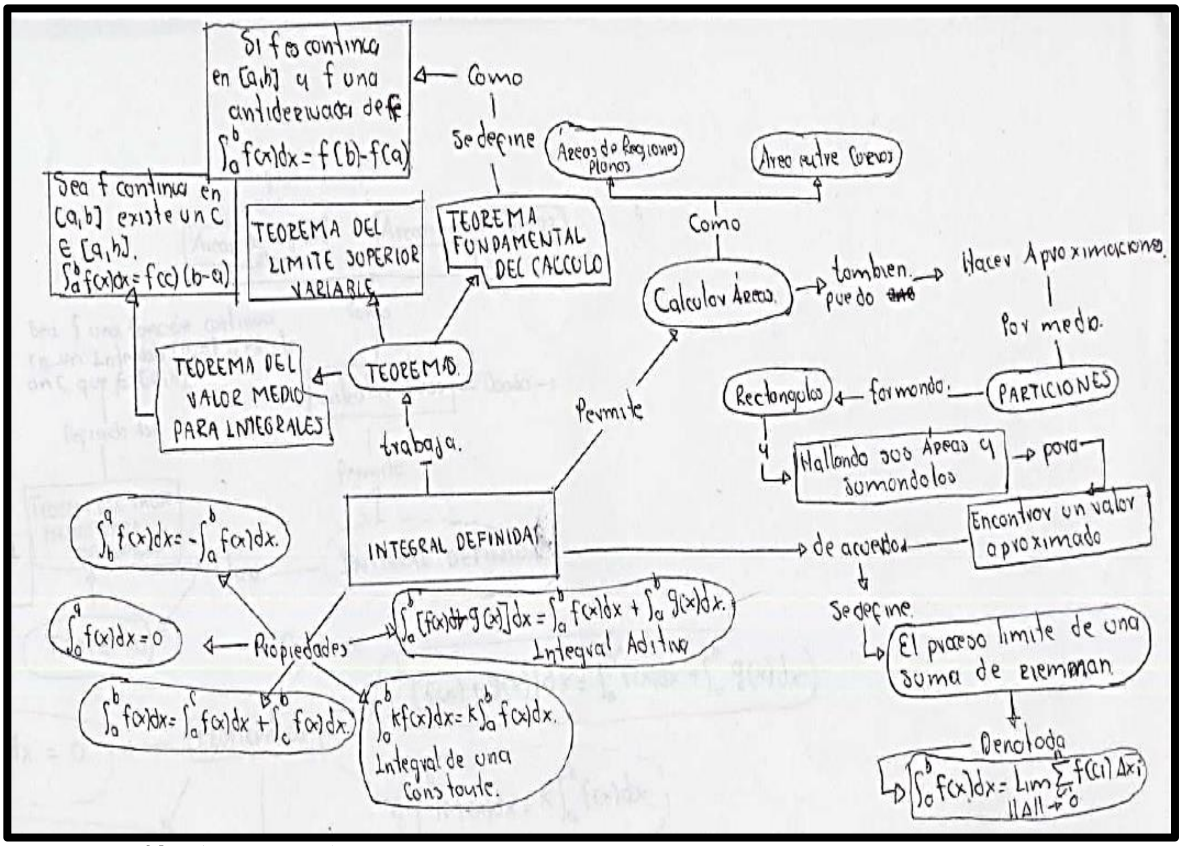
> O conceito de integral definida, de acordo com nossa experiência e os resultados obtidos em diversas investigações, apresenta dificuldades para os estudantes que se manifestam mediante uma utilização mecânica, algorítmica e memorística de sua definição. Não conseguem êxito em estabelecer uma conexão entre o pensamento numérico, algébrico e analítico. Manifestam problemas para interpretar gráficos abaixo de curvas, quando passa de ser positivo para negativo ou manifesta descontinuidades. Em outros casos, pensam a integral somente associada ao conceito de área, todavia, dissociada de outros contextos. Demonstram ainda dificuldades para aplicar as propriedades da integral definida. (BERMÚDEZ, 2011, p. 20, tradução nossa).

No trecho anterior, o autor acentua as limitações das habilidades manifestas pelos alunos, tendo em vista o entendimento do *link* conceitual analítico e gráfico. Bermúdez (2011) ainda assinala, em sua tese, outros problemas que são manifestados por estudantes durante a aprendizagem da Integral Definida. O autor aponta os seguintes obstáculos que não podem ser desconsiderados:

> (i) geralmente os estudantes identificam integral com primitiva. A integral, para eles, não envolve nenhum processo de convergência, nem tampouco um aspecto geométrico. É, portanto, um processo eminentemente algébrico. São capazes de aplicar a integral, ignorando por completo as respectivas somas de Riemann [...]; (ii) os estudantes geralmente identificam as integrais definidas com a regra de Barrow, inclusive quando não pode aplicar-se [...]; (iii) falta de conexão e *link* conceitual entre a noção de integral definida e o conceito de área, pois, não conseguem estabelecer relação entre uma representação gráfica e uma representação analítica [...]; (iv) o predomínio/predileção do modo de resolução algébrico sobre o gráfico [...]. (BERMÚDEZ, 2011, p. 20 – 21, tradução nossa).

Bermúdez (2011) estudou de modo detalhado a construção de mapas conceituais, como os que são apresentados na Figuras 1, bem como sua aplicação correspondente na resolução de tarefas propostas aos sujeitos participantes da amostra. Assinalamos que os fluxogramas e figuras expressos pelos estudantes proporcionam uma maneira de acompanhar/descrever e compreender o processo de construção, evolução, elaboração e reelaboração das ligações conceituais, intuitivas e lógico-formais dos conceitos envolvidos, direta e, até mesmo, indiretamente vinculados ao entendimento da noção de integração, segundo Riemann.

Figura 1 – Mapas conceituais relativos ao uso das integrais definidas e propriedades na resolução de determinadas tarefas discutidas por Bermúdez (2011)



Fonte: Bermúdez (2011, p.199)

Bermúdez (2011) pontua que os estudantes associam a noção de integral definida com um algoritmo para o cálculo, desconsiderando as condições para sua aplicação. Eles afirmam, também, que a Integral Definida permite, apenas, a aproximação do valor de área e que continuidade implica em derivabilidade, extraindo tal propriedade errônea para o contexto de integrabilidade. Alguns dos indícios perquiridos e registrados por Bermúdez (2011) podem proporcionar uma perspectiva promissora, no sentido evolutivo do processo investigativo.

Tomé (2011), em sua tese intitulada “Integral Definida, cálculo mental y nuevas tecnologías”, desenvolveu um estudo experimental, no contexto de cursos de bacharelado e assinala uma relativa à seguinte conclusão: “os alunos compreendem e aprendem melhor a integral definida na medida em que se constrói uma sequência adequada de ensino” (TOMÉ, 2011, p. 650, tradução nossa).

Em sua investigação, Tomé (2011, p. 652, tradução nossa) registrou que “os alunos aplicam pseudopropriedades ao cálculo mental de primitivas elementares”. Em relação a tal fato, o autor pontua que são recorrentes os erros dos alunos nas manipulações e que os mesmos manifestam muitas dificuldades no estudo de integrais, sendo o cálculo de primitivas elementares considerado difícil pela maioria dos alunos.

Além dos trabalhos apresentados nessa seção, registramos uma enorme profusão de trabalhos relativos à noção de integral definida, mas que não foram discutidos aqui, tais como: HSIA, 2006; MILANOVIC, TAKACI & MILAJIC, 2011; SEVIMLI & DELICE, 2011, 2012; VANINSKY, 2014, dentre outros.

O estudo das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do conceito de Integral Definida, foi muito importante para o percurso da nossa pesquisa, pois nos possibilitou conhecer alguns obstáculos didáticos referentes ao conceito de integrais definidas que possivelmente podem persistir quando tratarmos de generalizar o conceito estudado nessa inquirição. Assim, identificar algumas barreiras referentes ao ensino e aprendizagem das integrais definidas permitirá refletir e antecipar possíveis comportamentos que os sujeitos participantes da pesquisa poderão manifestar no momento do desenvolvimentos das sequências de ensino que serão aplicadas na fase de experimentação de nosso trabalho.

Dessa forma, tendo realizado uma apreciação de aspectos mais proeminentes e intimamente relacionados com nosso objeto de interesse, no contexto do porvir, abordaremos um quadro do ensino atual do modelo generalizado de integral definida.

2.2 Integrais Impróprias ou Generalizadas

A noção de Integral Imprópria ou Generalizada constitui noção unificadora e generalizadora relativa ao processo de integração. A referida noção científica permite pensarmos a determinação de áreas sobre curvas, não apenas para funções contínuas no espaço bidimensional.

Como vimos na seção anterior, no contexto do ensino, registramos enorme profusão de trabalhos atinentes ao objeto matemático Integral Definida (ESCARLATE, 2008; RIBEIRO, 2010; CARGNIN, 2013; BERMÚDEZ, 2011; TOMÉ, 2011; HSIA, 2006; MILANOVIC, TAKACI& MILAJIC, 2011; SEVIMLI & DELICE, 2011, 2012; VANINSKY, 2014), não obstante, no que concerne à produção de investigações que se detêm ao ensino/aprendizagem de Integrais Generalizadas ou Integrais Impróprias, deparamos com uma produção representativa apenas em outros países (GONZÁLEZ-MARTÍN, 2005; GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO, 2004). Por outro lado, registramos ainda outros escritos científicos que discutem o papel da visualização e do uso de alguns *softwares* específicos no ensino de integrais (ALVES 2014a, 2014b).

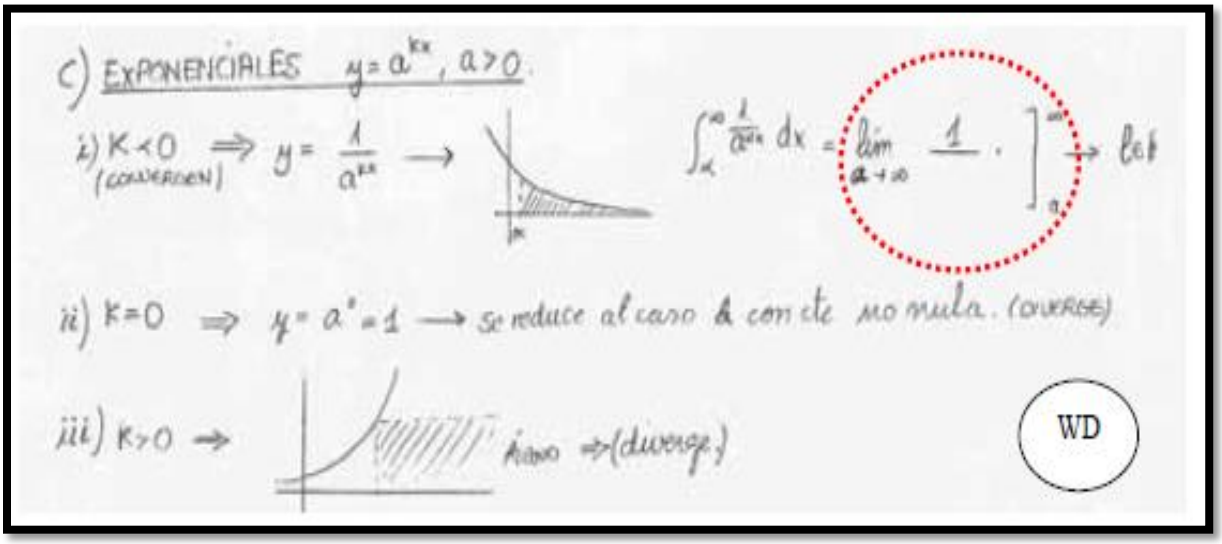
Cabe observar que, apesar de fornecer determinados elementos que podem/tendem a se manifestar em outro contexto de aprendizagem, os estudos apresentados na seção anterior, dizem respeito ao conceito de Integral Definida. Agora, buscamos discutir o relato de trabalhos relacionados com Integrais Generalizadas ou Impróprias.

Para tanto, encontramos o estudo desenvolvido por González-Martín (2005) que tem como título "La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje". Nesse trabalho, o referido autor aponta que o ensino de integral imprópria ou generalizada está apoiado em técnicas que consistem em propor exercícios algorítmicos e situações-problema rotineiras aos estudantes, sendo que as questões propostas têm como objetivo estudar a convergência de determinadas integrais, fazer comparações com outras integrais ou em calcular o valor numérico desse objeto matemático.

González-Martín (2005) analisou as respostas de um grupo de alunos de Matemática, no primeiro ano de universidade. O questionário aplicado por esse autor versava sobre situações-problema envolvendo a noção de integral imprópria e tinha como objetivo identificar as dificuldades e erros apresentados pelos estudantes, no que concerne ao conceito de integral imprópria ou generalizada.

Na Figura 2, o autor apresenta uma produção de um aluno ao estudar o comportamento de convergência/divergência de uma integral imprópria.

Figura 2 - Produção relacionada com a noção de integral imprópria



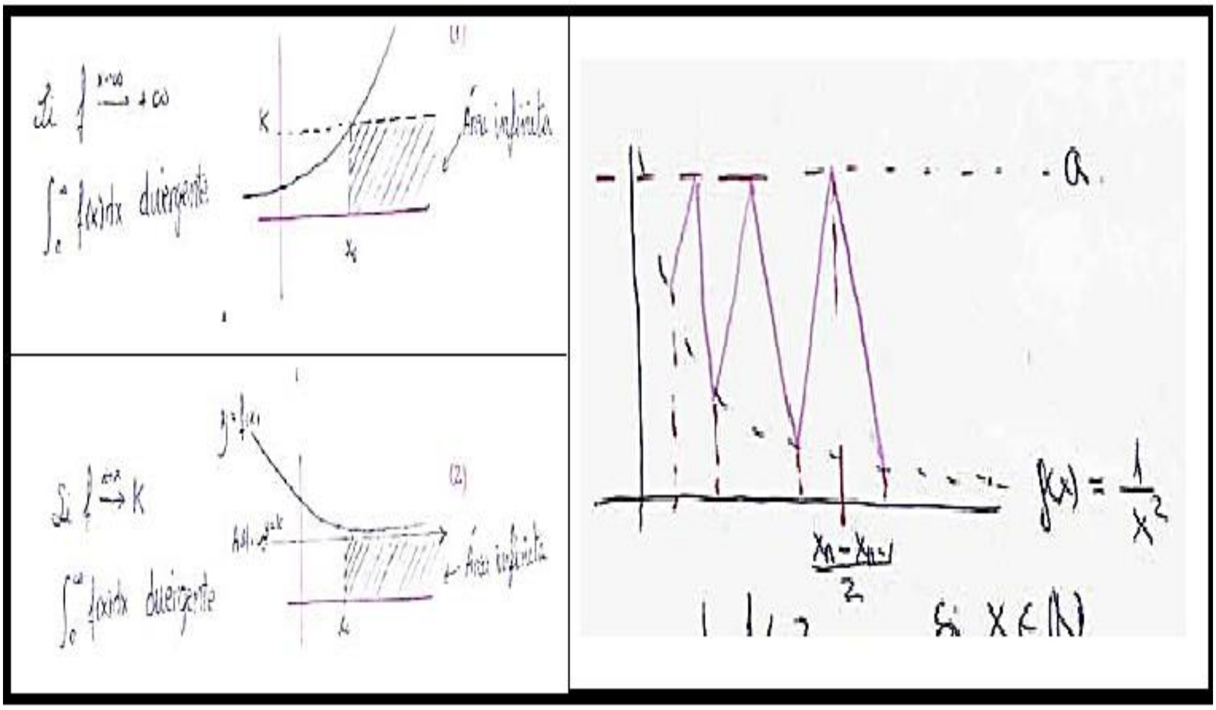
Fonte: González-Martín (2005, p. 284)

González-Martín (2005) declara empregar, como metodologia de pesquisa, uma Engenharia Didática, sobre o conceito de integral imprópria. Ademais, os dados discutidos por esse autor envolvem análises sobre a aprendizagem, conquanto que, não produziram implicações e análises do seu ensino.

No cenário indicados por esses autores e investigadores, a visualização funciona de modo impulsionador de produção de conjecturas diante das relações estabelecidas com o objeto teórico que chamamos de integral imprópria ou generalizada. Na figura 3, observamos a produção de um aluno participante da investigação de González-Martín & Camacho (2004), ao estudar o objeto matemático nominado de integral imprópria.

No que concerne ao cenário de produções que exibimos na Figura 3, González-Martín & Camacho (2004, p. 483, tradução nossa) observam que "em nossa classe de observação, podemos claramente mencionar que os estudantes aceitam, gradualmente os registros gráficos, com a intenção de formular conjecturas no momento de critérios de divergência".

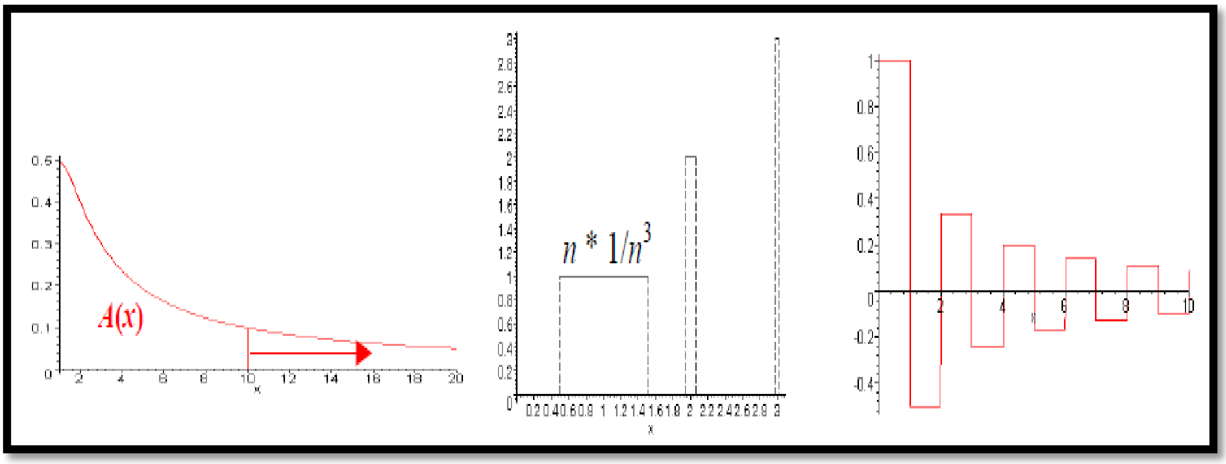
Figura 3 - Produção dos alunos no contexto de ensino das integrais impróprias



Fonte: (GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO 2004, p. 483, adaptação nossa)

Na Figura 4, avistamos o empenho dos autores no sentido de descrever/estruturar situações didáticas que envolvem menor recurso aos registros eminentemente algébricos que, de acordo com nossa apreciação dos trabalhos, constituem a tônica geral.

Figura 4 - Registros gráficos com o escopo de transmitir ideias relacionadas com a noção de integrais impróprias



Fonte: (GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO 2004, p. 481 – 482, adaptação nossa)

Vemos ainda na Figura 4, ao lado direito, a determinação da área correspondente por meio de aproximações de figuras poligonais. Elementos que enfatizam um entendimento dinâmico e não estático do processo de integração.

Alves (2014a) em seu trabalho intitulado "Visualização de Integrais Impróprias em um parâmetro com o auxílio do GeoGebra", discute uma classe particular de integrais generalizadas de funções do tipo $f(x,t)$ que tem como característica a dependência de um parâmetro "t", destacando a passagem de derivação sob o sinal da integral e enfatizando a visualização de propriedades pelo uso do *Software* GeoGebra.

Nesse trabalho, o referido autor apresenta do ponto de vista gráfico - geométrico, as relações de dependência conceitual e do comportamento em relação à convergência ou divergência de integrais do tipo $\int_0^{+\infty} f(x,t)dx$. Um exemplo é a integral: $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+x^2)^2} dx$, onde o autor descreve para que pontos de $t \in \mathbb{R}$ teremos a convergência de $F(t)$.

Alves (2014a), discute a integral de Euler que de acordo com o autor "permite uma sofisticada definição para o símbolo de fatorial" (ALVES, 2014a, p.10). Neste contexto lembra que: $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. O autor ressalta ainda que nos compêndios especializados de Análise Real, os autores enfatizam apenas o caráter analítico e o uso de regras formais ao abordar o objeto integrais generalizadas e pontua que o *software* GeoGebra permite uma exploração dinâmica do objeto matemático, abrindo possibilidades de inspeção e verificação de propriedades gráfico-visuais do conteúdo Integrais Generalizadas.

No outro artigo intitulado "Transição interna do Cálculo: o caso das integrais impróprias em um parâmetro", Alves (2014b) também discute o comportamento de convergência ou divergência de determinadas integrais impróprias dependentes do parâmetro t, do mesmo tipo das integrais do artigo anterior, também indicadas por $f(x,t)$.

Nessa investigação, o autor trabalha amparado na regra de Leibniz, explorando a visualização do comportamento de convergência/divergência de integrais impróprias por meio do uso, em caráter de complementaridade, dos *softwares* GeoGebra e o CAS *Maple*. O autor ainda patenteia que a utilização desses *softwares* pode inspirar abordagens diferenciadas para certos conteúdos tradicionais do Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de suavizar as abordagens técnicas algorítmicas.

Alves (2014b) também apresenta o Teorema de Leibniz que consubstancia o trato formal da classe de integrais de funções em um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, como por exemplo, a integral: $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{sen(x)}{x}\right)^2 . e^{-tx} dx$ para $t > 0$.

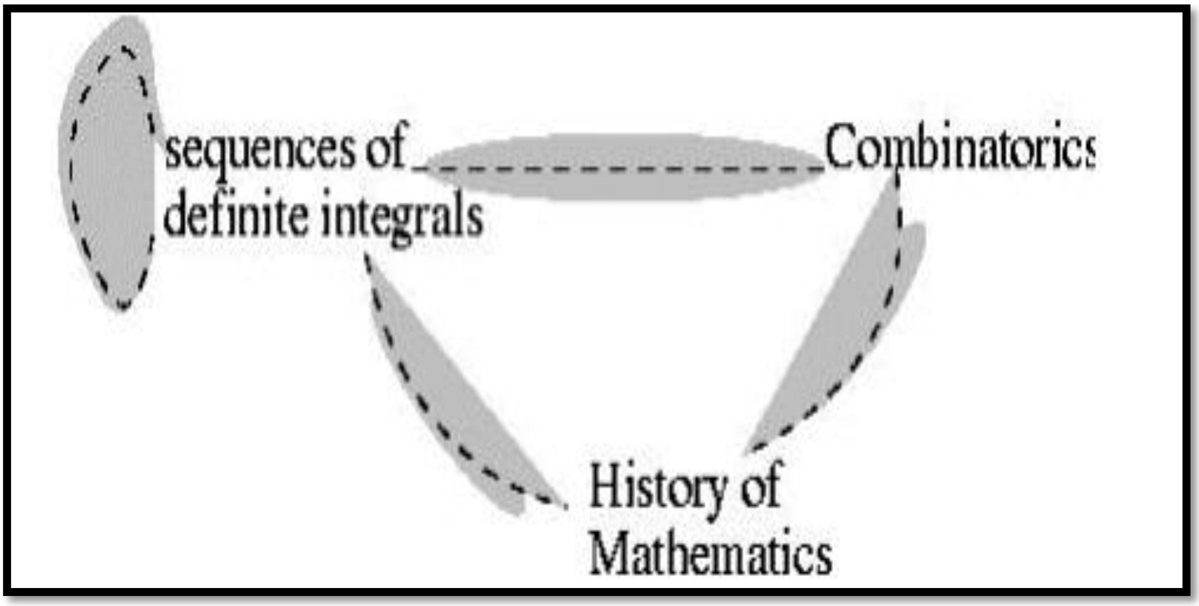
Nesse sentido, uma preocupação metodológica consistiria em que, no âmbito do processo matemático epistemológico evolutivo, desde o estudo das integrais definidas, passando pelas IGs e, por fim, pelo estudo das integrais dependentes de parâmetros, de forma que os desenhos e descrições dos estudantes se manifestariam e, em maior ou menor substância, poderiam transparecer certa sintonia com o respectivo modelo evolutivo. Assim, sem perder uma preocupação eminentemente metodológica, no próximo segmento, abordaremos perspectivas eminentemente relacionadas ao ensino das IDPs.

2.3 Integral Dependente de Parâmetros - IDP

Registramos poucos trabalhos que abordam algumas questões relacionadas com a noção de Integrais Dependentes de Parâmetros. Nesta seção, assinalaremos e pormenorizaremos alguns elementos presentes em alguns artigos produzidos no Exterior (DANA-PICARD, 2005a; 2005b; 2010; DANA-PICARD; ZEITOUN, 2011). Registramos sua relevância, na medida em que acentuam uma perspectiva unificadora, que envolve o conhecimento matemático que mobilizamos no estudo de integrais dependentes de parâmetros e sua convergência.

Na Figura 5, Dana-Picard (2005a) acentua a perspectiva de que o processo cognitivo ocorre quando a aprendizagem em Matemática não se restringe à composição de tópicos. Esse autor cunha o termo *cognitive neighborhood* (vizinhança cognitiva), relativo a determinado tópico matemático, como algo incluso num determinado espaço, que o mesmo nomeia de conhecimento matemático (*mathematical knowledge*). Os tópicos dispostos em uma determinada vizinhança são relacionados por conexões.

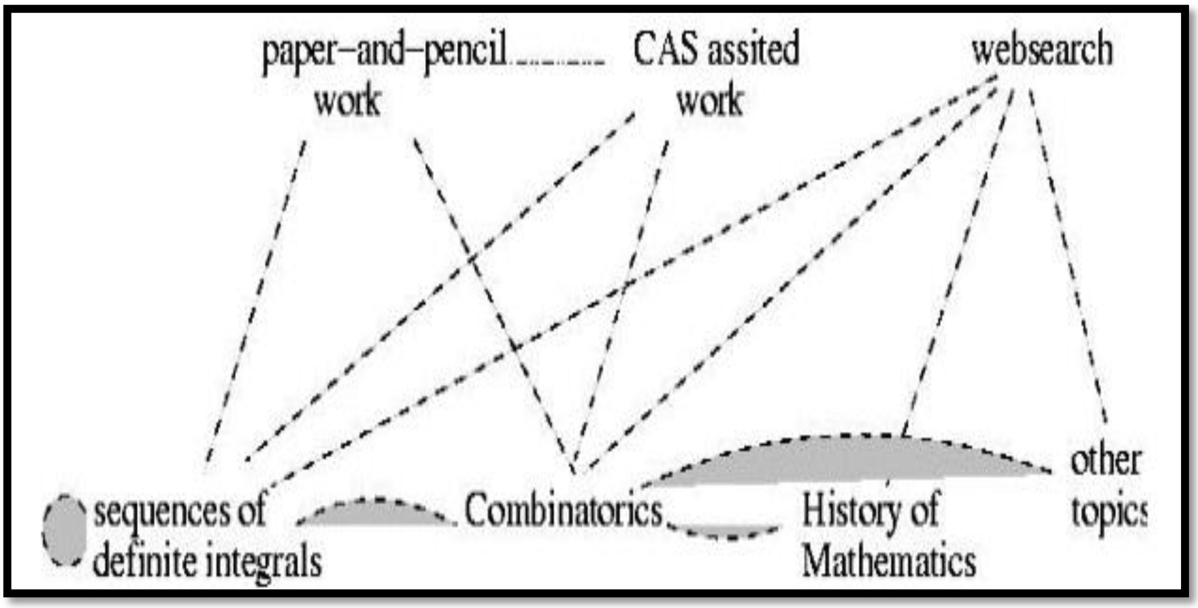
Figura 5 - Relações conceituais e possibilidades da exploração didática das integrais definidas



Fonte: Dana-Picard (2005a, p. 7)

Por outro lado, na Figura 6, divisamos um ideograma que explica o significado do termo *extended cognitive neighborhood* (vizinhança cognitiva estendida).

Figura 6 - Diagrama que representa uma vizinhança cognitiva estendida (*extended cognitive neigborhood*)



Fonte: Dana-Picard (2005a, p. 8)

Em relação à ideia envolvida no esquema proposto, Dana-Picard (2005a, p. 8, tradução nossa) esclarece que “não representa apenas conexões entre os noções e tópicos matemáticos, porém, envolve ainda instrumentos e os modos de seu uso”. O nível inferior indica o conhecimento matemático. Enquanto que, o nível superior, indica técnicas e instrumentos que potencializam o significado do mesmo para o sujeito que desenvolve uma ação investigativa.

Vejamos algumas atividades propostas por Dana-Picard, no contexto do ensino de Integrais Dependentes de Parâmetros. O autor desenvolve um estudo envolvendo IDPs, onde a ideia, na abordagem de determinados casos, consiste na obtenção de uma fórmula de recorrência que, conduzirá, por meio da análise de alguns casos particulares, a uma forma fechada da integral pretendida.

Dessas atividades apresentadas com IDPs, destacamos que as três primeiras foram aplicadas, nesta investigação, nas sequências de ensino propostas aos sujeitos participantes da pesquisa. Para cada integral faremos o desenvolvimento analítico para obter a forma fatorial correspondente da mesma.

Atividade 1: Dana-Picard (2005b, p. 2) expõe a integral $I_n = \int_0^1 x(lnx)^n dx$, onde $n \in \mathbb{N}$, com p e q inteiros positivos.

Para a resolução dessa atividade, o referido autor considera que $\lim_{x\to 0^+} x^p(lnx)^q = 0$ e usa a técnica de integração por partes para solucionar a integral. Nessa perspectiva, apresentamos a seguir o desenvolvimento analítico para a situação proposta.

Solução: Sejam $u(x) = (lnx)^n \therefore du = n(lnx)^{n-1}.\frac{1}{x}dx$ e $dv = xdx \therefore v = \frac{x^2}{2}$. Assim, utilizando a técnica de integração por partes, onde temos que $\int udv = u.v - \int vdu$, substituindo u, v e du na fórmula apresentada, encontramos a seguinte igualdade:

$$I_n = \int_0^1 x(lnx)^n dx = \left((lnx)^n.\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \frac{n}{2}\int_0^1 x(lnx)^{n-1}dx.$$

Veja que:

$$\left((lnx)^n.\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = (ln1)^n.\frac{1^2}{2} - \lim_{x\to 0^+}(lnx)^n.\frac{x^2}{2}.$$

Como $(ln1)^n.\frac{1^2}{2} = 0$, uma vez que $ln1 = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} x^p(lnx)^q = 0$, deduzimos que:

$$I_n = \int_0^1 x(lnx)^n dx = -\frac{n}{2}\underbrace{\int_0^1 x\,(lnx)^{n-1}\,dx}_{I_{n-1}} \therefore \int_0^1 x(lnx)^n dx = -\frac{n}{2}I_{n-1}.$$

Expandindo alguns termos, encontramos o seguinte:

$I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1} = \left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right) I_{n-2} \dots . I_0 \Rightarrow I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^n} I_0.$

Por meio de um cálculo simples, encontramos I_0, que será dado por:

$I_0 = \int_0^1 x(lnx)^0 dx = \int_0^1 xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}.$

Portanto:

$I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^n} \frac{1}{2} = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$

Após verificar a igualdade, Dana-Picard (2005b) infere a proposição seguinte.

Proposição 2.3.1: Dado o número natural $n \in \mathbb{N}$, vale que:

$I_n = \int_0^1 x(lnx)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$. (DANA-PICARD, 2005b, p. 2)

Atividade 2: Dana-Picard (2005b, p. 3), define a integral $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (lnx)^q dx$, para p e q não negativos.

Solução: Novamente, utilizando a técnica de integração por partes, vamos estabelecer que:

$u(x) = (lnx)^q \therefore du = q(lnx)^{q-1} \frac{1}{x} dx$ e $dv = x^p dx \therefore v = \frac{x^{p+1}}{p+1}.$

Assim:

$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (lnx)^q dx = \left((lnx)^q . \frac{x^{p+1}}{p+1}\right)_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} . q(lnx)^{q-1} . \frac{1}{x} dx.$

Temos que:

$\left((lnx)^q . \frac{x^{p+1}}{p+1}\right)_0^1 = \underbrace{(lnx)^q . \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1}_{0} - lim_{x \to 0^+} (lnx)^q . \frac{x^{p+1}}{p+1}.$

Novamente pelo fato de $lim_{x \to 0^+} x^p (lnx)^q = 0 \therefore lim_{x \to 0^+} (lnx)^q . \frac{x^{p+1}}{p+1} = 0$, temos a seguinte igualdade:

$\int_0^1 x^p (lnx)^q dx = -\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} . q(lnx)^{q-1} . \frac{1}{x} dx = -\frac{q}{p+1} \underbrace{\int_0^1 x^p . (lnx)^{q-1} dx}_{I_{p,q-1}} = -\frac{q}{p+1} . I_{p,q-1}.$

Ainda expandindo alguns termos no produto, obtemos: $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} . \left[-\left(\frac{q-1}{p+1}\right)\right] . \left[-\left(\frac{q-2}{p+1}\right) I_{p,q-3}\right] \dots . I_0 = \frac{(-1)^q . q!}{(p+1)^q} . I_{p,0}.$

Mas, ao efetuar o cálculo de $I_{p,0}$, obtemos que:

$I_{p,0} = \int_0^1 x^p (lnx)^0 dx = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

Logo chegamos a seguinte igualdade:

$I_{p,q} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^q} . I_{p,0} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^q} . \frac{1}{p+1}$ e por fim $I_{p,q} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Dessa forma, Dana-Picard (2005b), institui a proposição seguinte.

Proposição 2.3.2: Para qualquer par (p, q) de numeros naturais temos que:

$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (lnx)^q dx = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$. (DANA-PICARD, 2005b, p. 4).

Atividade 3: Dana-Picard & Zeitoun (2011, p. 516) definem a seguinte integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e estudam o comportamento de convergência/divergência de I_n.

Solução: Inicialmente os autore avaliam que para $n = 0$ a integral é divergente. Esse fato é fácil de verificar, pois: $I_0 = \int_0^{+\infty} dx = x|_0^{+\infty} = +\infty$.

Posteriormente, vejamos que para o caso $n = 1$, temos que:

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx$.

Para tanto consideramos $x = senht \therefore dx = cosht$.

Veja que:

$1 + senh^2 t = cosh^2 t \therefore cosht = \sqrt{1 + senh^2 t}$.

Substituindo esses resultados em I_1, obtemos:

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx$ ou ainda $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{cosht}{senht+cosht} dt$.

Podemos ainda, considerar que: $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$. Assim:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}} dt$$

Então:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t+e^{-t}}{2e^t} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (1 + e^{-2t}) dt = \frac{1}{2}(t - \frac{e^{-2t}}{2})\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4e^{2t}}\Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

Concluímos que para $n = 1$, a integral também é divergente. Analisando o caso geral quando $n \geq 2$ e de forma análoga ao caso anterior, consideramos a substituição:

$x = senht \therefore dx = cosht.$

Verificamos também que $x \to 0$ quando $t \to 0$ e que $x \to +\infty$ quando $t \to +\infty$. Da igualdade $cosht = \sqrt{1 + senh^2 t}$, verificamos que:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t+e^{-t}}{(e^t)^n} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{t(1-n)} + e^{-t(1+n)}\right)dt.$$

Obtemos portanto que:

$$I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n} e^{t(1-n)} - \frac{1}{1+n} e^{-t(1+n)}\right)_0^{+\infty} = \frac{n}{n^2-1}, \forall n \geq 2.$$

Atividade 4: Dana-Picard (2005b, p.4) define a integral $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$ com n um natural qualquer.

Solução: Conforme o autor, vamos estudar inicialmente o caso $n = 0$. Assim:

$$I_0 = \int_1^e x(lnx)^0 dx = \int_1^e x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e = \frac{e^2-1}{2}.$$

Para o caso geral, vamos utilizar integração por partes e encontrar uma relação de recorrência para I_n.

Para $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$, sejam

$u(x) = (lnx)^n$ $du = n.(ln\,x)^{n-1}.\frac{1}{x}dx$ e $dv = xdx \therefore v = \frac{x^2}{2}.$

Segue então que:

$$I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx = \underbrace{(lnx)^n.\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e}_{I} - \underbrace{\int_1^e \frac{x^2}{2} n.(\ln x)^{n-1}.\frac{1}{x}dx}_{II}.$$

Resolvendo a parte (I) temos:

$$(lnx)^n.\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e = (ln\,e)^n \frac{e^2}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}.$$

Na parte (II) obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{n}{2}\int_1^e (ln\,x)^{n-1} x dx = \frac{n}{2}.I_{n-1}.$$

Logo:

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}.I_{n-1}.$$

Decompondo I_{n-1} segue que:

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}.\left(\frac{e^2}{2} - \frac{n-1}{2}.I_{n-2}\right) = \frac{e^2}{2}.\left(1 - \frac{n}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{4}.I_{n-2}.$$

Expandindo o temo I_{n-2}, obtemos o seguinte:

$$I_n = \frac{e^2}{2}.\left(1-\frac{n}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{4}.\left[\frac{e^2}{2}-\frac{n-2}{2}I_{n-3}\right]$$

$$I_n = \frac{e^2}{2}.\left(1-\frac{n}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{4}.\frac{e^2}{2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{8}.I_{n-3}$$

$$I_n = \frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}\right]-\frac{n(n-1)(n-2)}{8}I_{n-3}$$

$$I_n\frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}\right]++(-1)^n.\frac{n!}{2^n}I_0.$$

Como: $I_0 = \int_1^e x(lnx)^0dx = \int_1^e xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}.$

Substituindo I_0 em I_n, temos:

$$I_n = \frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}\right]+(-1)^n.\frac{n!}{2^n}\left(\frac{e^2-1}{2}\right).$$

Segue ainda que:

$$I_n = \frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}\right]+(-1)^n.\frac{n!}{2^n}\frac{e^2}{2}+(-1)^{n+1}.\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Dessa forma:

$$I_n = \frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}+(-1)^n\frac{n!}{2^n}\right]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Veja que:

$$A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

E, avaliando outros termos, observamos que:

$$A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!};\ A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1),\text{ etc.}$$

Portanto:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Assim: $I_n = \frac{e^2}{2}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}+(-1)^n\frac{n!}{2^n}\right]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}.$

Concluímos, portanto que:

$$I_n = \frac{e^2}{2}\left[\sum_0^n(-1)^k\frac{A_{n,k}}{2^k}\right]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Após todo o desenvolvimento analítico de I_n, Dana-Picard (2005b, p. 5), institui a seguinte proposição:

Proposição 2.3.3: $\int_1^e x(lnx)^ndx = \frac{1}{2}e^2\left[\sum_0^n(-1)^k\frac{A_{n,k}}{2^k}\right]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}.$

Atividade 5: Resolver a integral $\mathrm{I_n} = \int_0^{\mathrm{a}} x^{\mathrm{n}}\sqrt{\mathrm{a}^2-x^2}\mathrm{d}x$ onde, $n \geq 0$.

Solução: Veja que para o caso $n = 0$, tem-se que: $I_0 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Fazendo a substituição $x = asen\theta \Rightarrow dx = acos\theta d\theta$ onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $x \geq 0$. Mas se:

$x = asen\theta \ \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \ \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}$.

Verificamos que:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (asen\theta)^2} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{a^2(cos^2\theta)}$$

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então: $\sqrt{(\cos^2\theta)} = \cos\theta$, do resultado anterior obtemos que: $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$. Portanto $I_0 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Consideramos a integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ e posteriormente retomamos ao intervalo de integração, após o seu desenvolvimento analítico. Assim:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos\theta acos\theta d\theta = a^2 \int cos^2\theta d\theta.$$

Como $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$, substituindo na integral, temos que:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int cos^2\theta d\theta = a^2 \int \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{2}\int(1 + cos2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}(\theta + \frac{1}{2}sen2\theta).$$

Mas veja que:

$$\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{1}{2}(2sen\theta cos\theta) = \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$$

Para retomar a variável x, fazemos a substituição em I_0, de $\theta = arcsen\frac{x}{a}$ e $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$.

Assim, obtemos que:

$$I_0 = \frac{a^2}{2}\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) = \frac{a^2}{2}arcsen(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a$$

$$I_0 = \frac{a^2}{2}arcsen(1) = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Para o caso $n = 1$, temos que: $I_1 = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Como $\sqrt{a^2 - x^2} = acos\theta$ e fazendo $x = asen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}$, então: $I_1 = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx$. Novamente a integral será resolvida sem o intervalo de integração, mas este posteriormente será retomado. Assim:

$$I_1 = \int(asen\theta\ a\cos\theta\ acos\theta\ )d\theta = a^3 \int(sen\theta \cos^2\theta\ )d\theta.$$

Para a integral $\int(sen\theta \cos^2\theta\ )d\theta$, seja:

$u = cos\theta \Rightarrow du = -sen\theta d\theta \Rightarrow sen\theta d\theta = -du$. Assim:

$$\int(sen\theta \cos^2\theta\ )d\theta = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{cos^3\theta}{3}.$$

Portanto: $I_1 = \frac{a^3\, cos^3\theta}{3}$.

Temos que:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \Rightarrow I_1 = \frac{a^3\, cos^3\theta}{3} = \frac{a^3(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})^3}{3} = \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Deve-se agora, buscar uma fórmula indutiva para a sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Na integral $I_n = \int_0^a x^n\sqrt{a^2-x^2}dx$, utilizamos a técnica de integração por partes, assim consideramos:

$u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}$ e $dv = \sqrt{a^2-x^2}dx \Rightarrow v = \int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

O procedimento de resolução da integral $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ é semelhante ao que foi exposto no caso $n = 0$. Assim, seja:

$x = asen\theta \Rightarrow dx = acos\theta d\theta$ onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $x \geq 0$.

Temos que:

$x = asen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{a}.$

Logo:

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(\text{asen}\theta)^2} = \sqrt{a^2(1-\text{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2(\cos^2\theta)}.$

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então: $\sqrt{(\cos^2\theta)} = \cos\theta$.

Veja que: $\sqrt{a^2-x^2} = \text{a}\cos\theta$. Logo:

$v = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \text{acos}\theta acos\theta d\theta = a^2 \int cos^2\theta d\theta.$

Como $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$, substituindo na integral, obtemos:

$v = a^2 \int \frac{1+cos2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\int(1+cos2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}(\theta + \frac{1}{2}sen2\theta).$

Mas veja que:

$\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{1}{2}(2sen\theta cos\theta) = \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$

Retornando a variável x, fazemos a substituição em v, de $\theta = arcsen\frac{x}{a}$ e $\frac{1}{2}sen2\theta = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$, obtemos:

$v = \frac{a^2}{2}\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen(\frac{x}{a}).$

Agora, aplicando a técnica de integrais por partes, onde $\int udv = uv - \int vdu$, temos:

$$I_n = x^n\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Bigg|_0^a - \int_0^a \left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx.$$

Veja que:

$$x^n\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Bigg|_0^a = a^n.\frac{a^2}{2}arcsen(1) = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2}.$$

Verificamos que:

$$\int_0^a \left(\frac{1}{2}x\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}+\frac{\mathrm{a}^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx = \frac{n}{2}\int_0^a \left(x^n\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}\right)\mathrm{dx} + \int_0^a \left(\frac{\mathrm{a}^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right).nx^{n-1}\right)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{2}x\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}+\frac{\mathrm{a}^2}{2}.arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right).nx^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{2}I_n + \frac{1}{2}a^2 n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx$$

Portanto:

$$I_n = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}I_n - \frac{1}{2}a^2 n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx.$$

Agora, seja: $K_n = \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx$.

Assim:

$$I_n = \frac{1}{2}a^{n+2}.\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}I_n - \frac{1}{2}a^2 nK_n \therefore \left(1+\frac{n}{2}\right)I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{1}{2}a^2 nK_n.$$

Passamos a resolução da integral $\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx$. Assim, considerando uma segunda integração por partes, temos:

$u_1 = x^{n-1} \Rightarrow du_1 = (n-1).x^{n-2}dx$ e $dv_1 = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx \Rightarrow v_1 = \int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx$.

Resolvendo a integral $\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx$, consideramos:

$$w = \frac{x}{a} \Rightarrow dw = \frac{1}{a}dx \Rightarrow dx = adw.$$

Assim:

$$\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx = \int (arcsenw)adw = a\int arcsenwdw = a\left(warcsen(w)+\sqrt{1-w^2}\right).$$

Fazendo a substituição de w no último membro da igualdade anterior, obtemos:

$$\int arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx = xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}.$$

Segue a seguinte igualdade:

$$\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = x^{n-1}.\left(xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a - \int_0^a \left(xarcsen\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}\right)(n-1).x^{n-2}dx$$

Logo:

$$\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n\frac{\pi}{2} - \left[(n-1)\int_0^a x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)dx + (n-1)\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\right]$$

Segue que:

$$\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx + (n-1)\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\ .$$

Então:

$$(1+n-1)\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n.\frac{\pi}{2} - (n-1)\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx.$$

Veja também que:

$$n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = a^n.\frac{\pi}{2} - (n-1)\underbrace{\int_0^a \left(x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx}_{I_{n-2}}.$$

$$n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx$$

$$n\int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \frac{1}{n}\left(a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)I_{n-2}\right)$$

Assim:

$$K_n = \int_0^a \left(x^{n-1}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \frac{1}{n}\left(a^n\frac{\pi}{2} - (n-1)I_{n-2}\right).$$

Já vimos anteriormente que:

$$(1+\tfrac{n}{2})I_n = \tfrac{\pi}{4}a^{n+2} - \tfrac{1}{2}a^2nK_n.$$

Substituindo K_n, encontrado anteriormente em $(1+\frac{n}{2})I_n = \frac{\pi}{4}a^{n+2} - \frac{1}{2}a^2nK_n$, verificamos que:

$$(1+\tfrac{n}{2})I_n = \tfrac{\pi}{4}a^{n+2} - \tfrac{1}{2}a^2n\tfrac{1}{n}\left(a^n\tfrac{\pi}{2} - (n-1)I_{n-2}\right)$$

$$(1+\tfrac{n}{2})I_n = \tfrac{\pi}{4}a^{n+2} - \tfrac{\pi}{4}a^{n+2} + \tfrac{a^2(n-1)}{2}I_{n-2},$$

logo: $I_n = \frac{a^2(n-1)}{n+2}I_{n-2}$.

Atividade 6: Outra atividade proposta por Dana-Picard & Zeitoun (2011, p. 517) consta no cálculo da integral dependente de parâmetro dada por: $I_n = \int_{-a}^{a} x^n\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ onde a é um número real positivo e n é um número inteiro não negativo. O objetivo do autor é encontrar uma forma fechada para o termo geral da sequência I_n.

Solução: Inicialmente, vamos estudar o valor de I_0. Assim, como $I_0 = \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$, considerando a seguinte substituição: $x = ay, dx = ady$, onde para $x = -a \Rightarrow y = -1$ e para $x = a \Rightarrow y = 1$, temos a seguinte integral:

$$I_0 = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a+ay}{a-ay}}\,ady = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a(1+y)}{a(1-y)}}\,ady.$$

Mas a última identidade pode ser reescrita como: $a\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}\,dy$. Agora seja:

$$y = cos\theta \therefore dy = -sen\theta d\theta.$$

Veja que:

$y = -1 \Rightarrow \theta = -\pi$ e para $y = 1 \Rightarrow \theta = 0$.

Portanto, fazendo as substituições apropriadas obtemos:

$I_0 = a\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}\,dy = \ a\int_{-\pi}^{0}\sqrt{\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}}\,(-sen\theta)d\theta = a\int_{-\pi}^{0}\sqrt{\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}.\frac{1+cos\theta}{1+cos\theta}}\,(-sen\theta)d\theta.$

Assim:

$$I_0 = a\int_{-\pi}^{o}\sqrt{\frac{(1+cos\theta)^2}{1-cos^2\theta}}.(-sen\theta)d\theta = a\int_{-\pi}^{0}\sqrt{\frac{(1+cos\theta)^2}{sen^2\theta}}.(-sen\theta)d\theta$$

Dessa forma podemos ainda escrever I_0 como: $I_0 = a\int_{-\pi}^{0}\frac{\sqrt{(1+cos\theta)^2}}{|sen\theta|}(-sen\theta)d\theta.$

Para $-\pi \leq \theta \leq 0$, temos que $|sen\theta| = -sen\theta$, portanto:

$I_0 = a\int_{-\pi}^{0}\sqrt{(1+cos\theta)^2}d\theta = a\pi.$

Para o cálculo de I_n temos:

$I_n - aI_{n-1} = \int_{-a}^{a}x^n\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx - a\int_{-a}^{a}x^{n-1}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int_{-a}^{a}x^{n-1}(x-a)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

Veja que para $x \in (-a, a)$, $x - a < 0$, então:

$I_n - aI_{n-1} = -\int_{-a}^{a}x^{n-1}(a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

Dessa forma, ainda podemos escrever:

$I_n - aI_{n-1} = -\int_{-a}^{a}x^{n-1}\sqrt{\frac{(a+x).(a-x)^2}{a-x}}dx = -\int_{-a}^{a}x^{n-1}.\sqrt{a^2-x^2}dx.$

Seja $B_n = \int_{-a}^{a}x^{n-1}.\sqrt{a^2-x^2}dx.$

Assim: $I_n - aI_{n-1} = -B_n.$

Agora seja: $x = ay \ \Rightarrow dx = ady.$

Segue que para $x = -a \Rightarrow y = -1$ e para $x = a \Rightarrow y = 1.$

Como os autores definem que $B_n = \int_{-a}^{a}x^{n-1}.\sqrt{a^2-x^2}dx$, então fazendo as substituições em B_n temos:

$B_n = \int_{-1}^{1}(ay)^{n-1}\sqrt{a^2-(ay)^2}ady = a^{n+1}\int_{-1}^{1}y^{n-1}\sqrt{1-y^2}dy.$

Seja $y = sen\theta$, então: $dy = cos\theta d\theta.$

Os autores avaliam que para $y = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ e para $y = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, resultando, após as substituições correspondentes a seguinte igualdade: $B_n = a^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}\sqrt{1-sen^2\theta}.cos\theta d\theta = a^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}\sqrt{cos^2\theta}.cos\theta d\theta.$

Dessa forma:

$B_n = a^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}|cos\theta|.cos\theta d\theta.$

Como em $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $cos\theta$ é positivo, escrevemos $|cos\theta| = cos\theta$. Logo:

$B_n = a^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(sen\theta)^{n-1}.cos^2\theta d\theta.$

Dana-Picard & Zeitoun (2011) estabelecem a seguinte igualdade:

$S_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^n d\theta.$

Assim temos que:

$S_{n-1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^{n-1} d\theta$ e $S_{n+1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^{n+1} d\theta.$

Voltando a B_n temos:

$B_n = a^{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^{n-1}. cos^2\theta d\theta = a^{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^{n-1}. (1 - sen^2\theta) d\theta.$

Ainda podemos escrever:

$B_n = a^{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(sen\theta)^{n-1} - (sen\theta)^{n+1}] d\theta.$

Logo:

$B_n = a^{n+1}[S_{n-1} - S_{n+1}].$

Mas anteriormente foi definido que:

$B_n = I_n - aI_{n-1}.$

Assim, temos a seguinte igualdade:

$I_n - aI_{n-1} = -a^{n+1}[S_{n-1} - S_{n+1}] = a^{n+1}[S_{n+1} - S_{n-1}].$

Os referidos autores continuam estudando uma equação para a integral I_n, onde $n \geq 1$. Assim, tomando qualquer i de tal modo que $0 \leq i \leq n - 1$, assim pela igualdade:

$I_n - aI_{n-1} = a^{n+1}[S_{n+1} - S_{n-1}],$

Dana-Picard & Zeitoun (2011) estabelecem que:

$I_{n-i} - aI_{n-i-1} = a^{n-i+1}[S_{n-i+1} - S_{n-i-1}].$

Multiplicando os membros da equação por a^i, temos:

$a^i I_{n-i} - a^{i+1} I_{n-i-1} = a^{n+1}[S_{n-i+1} - S_{n-i-1}].$

Dessa forma, verificamos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} I_{n-i-1} = a^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} [S_{n-i+1} - S_{n-i-1}].$

Notamos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} [S_{n-i+1} - S_{n-i-1}] = (S_{n+1} - S_{n-1}) + (S_n - S_{n-2}) + (S_{n-1} - S_{n-3}) + \cdots + (S_3 - S_1) + (S_2 - S_0).$

Percebemos que alguns termos são cancelados pela soma. Assim, podemos facilmente verificar que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} I_{n-i-1} = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - S_1 - S_0].$

Ou ainda temos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} - \sum_{i=1}^{n} a^i I_{n-i} = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - S_1 - S_0].$

Agora, escrevendo os temos das somatórias $\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i}$ e $\sum_{i=1}^{n} a^i I_{n-i}$ constatamos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} = I_n + aI_{n-1} + a^2 I_{n-2} + a^3 I_{n-3} + \cdots + a^{n-1} I$ (I)

$\sum_{i=1}^{n} a^i I_{n-i} = aI_{n-1} + a^2 I_{n-2} + a^3 I_{n-3} + \cdots + a^{n-1} I + a^n I_0$ (II)

Fazendo (I) – (II) verificamos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} - \sum_{i=1}^{n} a^i I_{n-i} = I_n + a^n I_0$.

Como já averiguamos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a^i I_{n-i} - \sum_{i=1}^{n} a^i I_{n-i} = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - S_1 - S_0]$.

Portanto chegamos à conclusão que:

$I_n - a^n I_0 = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - S_1 - S_0]$.

Mas os autores recordam que $S_0 = \pi$, assim temos a igualdade:

$S_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sen\theta)^n d\theta$, então $S_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2} = \pi$.

Também $S_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen\theta d\theta = -cos\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}$, então: $S_1 = 0$. Já vimos também que $I_0 = a\pi$, fazendo as respectivas substituições em: $I_n - a^n I_0 = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - S_1 - S_0]$

Obteremos que:

$I_n - a^n a\pi = a^{n+1}[S_{n+1} + S_n - 0 - \pi] = a^{n+1}(S_{n+1} + S_n) - a^{n+1}\pi = a^{n+1}(S_{n+1} + S_n)$.

Os autores concluem, portanto que se deve manter a seguinte relação:

$I_n = a^{n+1}(S_{n+1} + S_n)$.

As situações anteriores revelaram os cálculos enfadonhos, longos e intrincados requeridos pelos exemplos de IDPs, recorrentemente abordados nos artigos científicos de Dana-Picard e, que, de modo *standard*, deparamos argumento cifrados e concisos, que, em sua quase totalidade, escondem práticas detentoras de certo grau de ineditismo, posto que discutimos elementos de artigos científicos e que não são suficientemente explorados por autores de compêndios de Cálculo.

2.4 Transição Interna do Cálculo – TINC

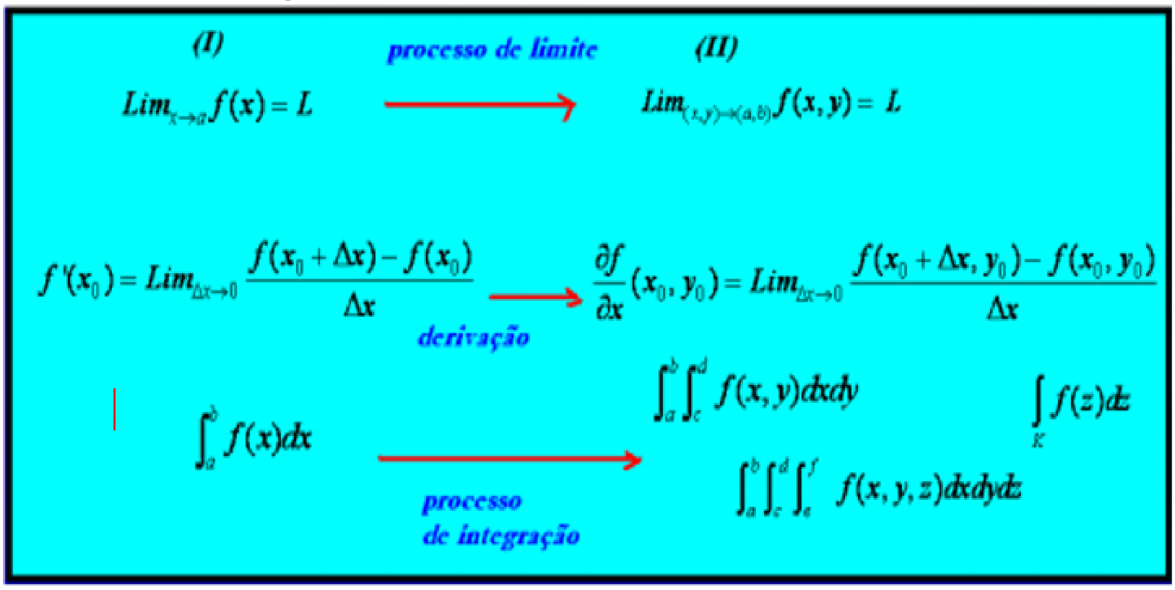
Conforme Alves (2011), os estudantes dos cursos de graduação em Licenciatura e bacharelado em Matemática, no Brasil, habitualmente, mantêm o contato inicial com o Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real (CUV) durante o espaço de tempo de um ano e, posteriormente passam a estudar o Cálculo a Várias Variáveis (CVV) por um período de seis meses, para o curso da Licenciatura em Matemática e um ano para o curso de bacharelado. Para o referido autor, a evolução da aprendizagem dos conceitos de limite, derivada e integral pelos alunos, durante esse intervalo de tempo de estudos acadêmicos nem sempre é imediato e natural.

O Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real (CUV) está fundamentado na Análise Real, já os fundamentos do Cálculo a Várias Variáveis (CVV) são norteados pela análise no R^n. Alves (2011, p. 123) fala sobre os entraves que tendem a se manifestar quando os estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática vivenciam a transição do CUV para o CVV.

Alguns problemas nessa transição são inerentes às mudanças relativas a conceitos, formas de representação, dimensões, significados etc., oriundos do aumento da quantidade de variáveis. Ademais, ao se estabelecer uma comparação entre os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real com Cálculo a Várias Variáveis, percebemos diferenças entre ambos, no que se refere a fórmulas, argumentações concernentes a demonstrações, provas e a definições formais de cada teoria.

Desse modo, com arrimo nas considerações do âmbito da Transição Interna do Cálculo (TINC), poderemos antever determinados entraves e obstáculos, no sentido de optar e descrever nossa trajetória, num campo epistêmico particular de interesse. Na Figura 7, podemos visualizar algumas simbologias concernentes aos principais processos matemáticos do cálculo diferencial e integral, atinentes aos objetos matemáticos denominados de limite, derivada e integral. Diante das indicações, restringir-nos-emos aos fenômenos vinculados ao binômio ensino-aprendizagem, no que concerne ao processo de integração.

Figura 7 - Quadro de transição interna do Cálculo



Fonte: (ALVES, 2011, p. 62)

Também na Figura 7, segundo as concepções da TINC, podemos observar uma série de mudanças e alterações que não podem ser negligenciadas, do ponto de vista metodológico, sob pena de que todo o conhecimento pedagógico e científico acumulado, na vertente da Didática da Matemática, evidencie um caráter restritivo e de um impacto inexpressivo do corpus teórico produzido durante mais de duas décadas.

Os elementos apresentados na Figura 7 são atinentes às noções que se preservam quando se aumenta a dimensão do espaço ao qual pertencem os objetos matemáticos em destaque. Assim, a grosso modo, poderemos ter perspectivas de elementos invariantes no processo de mudanças, bem como, elementos que tendem a sofrer alterações drásticas. Assim, podemos esperar que as ligações e relações estabelecidas pelos estudantes, bem como as mediações particulares e específicas para cada objeto não tendem a se tornar imutáveis, pelo contrário, tendem a se modificar, em consonância com as características fundamentais para cada objeto matemático.

Porém, determinadas concepções perdem o sentido e se tornam inadequadas no processo de transição do CUV para o CVV. Alves (2011) aponta que existem *elementos de transição* e *elementos de ruptura* no contexto da passagem do CUV para o CVV. Esse autor, a partir de análises de livros didáticos, sintetiza em uma tabela, a qual está exposta a seguir, os *elementos de ruptura* e os *elementos de transição* atinente relativos ao processo de transição interna do CUV para o CVV.

Tabela 1- Elementos presentes na Transição Interna do CUV para o CVV

Noções e conceitos	CUV	CVV	Comentários
Modelo ou formulação por ε e δ	Sim	Sim	(Elemento de transição). Presente tanto no CUV como no CVV, todavia, as *regras operatórias* condicionadas por sua definição formal e as expressões algébricas tratadas são completamente distintas.
Limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$e $\lim_{x\to a^-} f(x)$	Sim	Não	(Elemento de ruptura). As simbologias e o significado geométrico no CUV perdem o sentido no CVV.
Limites iterados $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x)]$ e $\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x)\right]$	Não	Sim	(Elemento de transição). A aplicação de regras operatórias envolvidas com este conceito proporciona o tratamento de funções em uma variável real, semelhante ao caso do CUV.

Descontinuidade removível	Sim	Não	(Elemento de ruptura). Não há um conceito semelhante, que indica a generalização desta ideia, correspondente no CVV.
Derivabilidade	Sim	Não	(Elemento de ruptura). Esta noção formal possui sentido apenas no contexto do CUV.
Diferenciabilidade	Sim	Sim	(Elemento de transição). Noção mais geral e admite sentido e descrição formal, tanto no CUV e no CVV.
Derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	Não	Sim	(Elemento de ruptura). Apesar de ser um conceito restrito ao CVV, o mesmo conceito poderia ser explorado, de modo intuitivo, no CUV.
Derivadas de ordem superior $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y)$e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y)$	Sim	Sim	(Elemento de ruptura). Por outro lado, possuem significados completamente distintos em cada teoria de base. Os livros consultados apresentam uma diversidade de enunciados.
Comutatividade das derivadas	Não	Sim	(Elemento de ruptura). Podem ser descritas, em certos casos como *limites iterados*.
Uso de metáforas na explicação/significação dos conceitos	Sim	Não	(Elemento de transição). Nos livros observamos a exploração de metáforas apenas no contexto do CUV. O uso deste recurso pedagógico no CVV pode ser intensificado com arrimo na tecnologia.

Fonte: Alves (2011, p. 396 - 397)

Os *elementos de ruptura* promovem um entrave na aprendizagem do aluno, pois dificultam e retardam a evolução e o contato das relações entre o estudante e o conhecimento matemático. Já os *elementos de transição* auxiliam e impulsionam a evolução das relações instituídas pelos sujeitos com o saber científico.

Alves (2011) evidencia que alguns elementos devem ser considerados quando se aborda a transição interno do CUV para o CVV, tais como:

> (i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas nas demonstrações dos teoremas são mais complexas, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas; (iii) a natureza geométrica dos objetos envolvidos; (iv) a mudança da significação conceitual interpretada em um novo *lócus matemático* e (v) o surgimento de regras operatórias particulares do

> CUV e do CVV; (vi) regras operatórias válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV; (viii) definições formais que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal; (ix) generalização de noções e definições formais; (x) surgimento de conceitos no CVV que não possuem significados correspondentes no CUV. (ALVES, 2011, p. 61),

Por Alves (2011), quando analisamos os livros didáticos que tratam do CUV e comparamos com os compêndios especializados do CVV, identificamos facilmente as extensas demonstrações de teoremas, bem como o aumento de complexidade da abordagem de um conteúdo para o outro.

O referido autor, em sua tese, apresenta alguns exemplos no contexto da transição do CUV para o CVV e pontua que os estudantes estão habituados ao estudo de funções em uma variável real, tais como $y = f(x)$, que sejam deriváveis e diferenciáveis, porém quando lhes são apresentadas funções como $z = f(x, y)$ ou $w = f(x, y, z)$, os mesmos passam a ver que derivabilidade não implica em diferenciabilidade..

Uma segunda ilustração apresentada por Alves (2011) está relacionada a regra de L'Hospital, a qual auxilia os estudantes a se livrarem de indeterminações tais como: $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, 0^\infty$ e ∞^0. Porém ao estudarem o CVV, os mesmos não utilizam mais a emblemática regra e não encontram justificativas de autores dos livros didáticos sobre a função da referida regra no contexto do CVV.

Em nossa pesquisa, trataremos, de modo específico, do processo de integração no contexto da transição interna do cálculo.

A Figura 8 apresenta as variadas alterações simbólicas conceituais atinentes ao processo de integração no contexto do CUV e no CVV.

Figura 8 - Quadro de transição simbólica de integrais

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b f(x,t)dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx \end{cases}, t \in IR \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy, \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \\ \int_a^{\infty}\int_c^{\infty} f(x,y)dxdy \end{cases}$$

Fonte: Produção dos autores

Assim, antes de concluir a presente seção, acentuamos:

(i) a relevância de identificação de *elementos de transição* e *elementos de ruptura* para o estudo das IDPs;

(ii) a relevância do papel da visualização como elemento tácito e intuitivo no sentido de evidenciar as mudanças qualitativas no âmbito da passagem e generalização da noção de integração;

Nas seções seguintes, abordaremos os argumentos que tendem a balizar e sinalizar a relevância e o caráter imprescindível de vigilância didática, visto que, a matéria ora discutida constitui assunto tratado em sala de aula nas universidades.

3 REFERENCIAL METODOLÓGICO E TEÓRICO

Neste capítulo, trataremos de eleger o referencial metodológico e as fundamentações teóricas que afirmamos ter aderência ao problema de investigação. Dessa forma, apresentaremos a metodologia de pesquisa eleita para a inquirição deflagrada, bem como as teorias nas quais estão apoiados os pressupostos teóricos desse trabalho, tendo em vista o ensino das Integrais Dependentes de Parâmetros.

3.1 Metodologia de pesquisa

No nosso trabalho, utilizaremos a Engenharia Didática (ED), uma metodologia de pesquisa que surgiu no início dos anos 1980 no campo da Didática da Matemática francesa. Segundo Artigue (1988) na ED, o trabalho do professor pesquisador é comparado ao ofício de um engenheiro, cuja atividade exige planejamento de um projeto, conhecimento científico de seu campo de atuação e capacidade de enfrentar problemas complicados, submetendo-se sempre ao controle científico. Ademais conforme Almouloud (2007):

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori.* Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOUD, 2007, p. 171).

A Engenharia Didática pode ser aplicada em pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de objetos matemáticos, mas não se restringe apenas a uma metodologia de pesquisa, uma vez que também pode servir como referência para o desenvolvimento de sequências de ensino.

A Engenharia Didática perpassa por quatro fases: Análise preliminar, Análise *a piori*, Experimentação e Análise *a posteriori*. Caso haja necessidade de serem feitos alguns ajustes na pesquisa, essas etapas podem ser retomadas e aperfeiçoadas a qualquer momento do desenvolvimento da investigação, uma fez que elas estão interligadas. Nos parágrafos seguintes faremos a descrição de cada uma dessas fases.

✓ **Análise preliminar:** nessa fase, são definidos os objetivos e a questão norteadora da pesquisa, analisando os problemas mais relevantes pertinentes ao ensino e/ou aprendizagem do objeto matemático em foco. Além disso, são determinadas as hipóteses possíveis para a questão da pesquisa e a justificativa da temática do trabalho. Para tanto, é necessário, nessa etapa, que o pesquisador assuma alguns encargos, tais como: estudar a organização matemática do objeto analisado; fazer uma abordagem referente a gênese histórica do mesmo; analisar a organização didática do conteúdo, por meio da avaliação de diferentes livros didáticos e diferentes instituições de ensino em que o objeto matemático é trabalhado e também fazer a análise do ensino habitual do assunto estudado, avaliando as concepções que os professores e alunos apresentam em relação ao conteúdo. Ademais, é nessa etapa que é feito todo o levantamento bibliográfico para a fundamentação teórica da pesquisa, em fontes como revistas, livros, artigos, dissertações, teses etc.

Na nossa investigação, nessa etapa foi realizada a busca pelo referencial bibliográfico atinente ao objeto matemático de nossa pesquisa. Assim, buscamos teses, dissertações e artigos publicados em revistas que tratassem dos conteúdos: Integrais Definidas, Integrais Generalizadas e Integrais Dependentes de Parâmetros. Após realizar a busca por esse material e fazer a leitura dos mesmos, pudemos delinear a questão norteadora da nossa investigação, também levantamos as nossas hipóteses e traçamos o objetivo geral e os objetivos específicos para a pesquisa.

Com o objetivo de estudar a organização matemática do objeto de nossa investigação, fizemos um estudo histórico do desenvolvimento do conteúdo estudado, fazendo uma abordagem que inicia com os primeiros registros dos esforços para o cálculo integral, mostrando o seu desenvolvimento, até chegar à generalização do modelo matemático.

Também fizemos uma análise dos livros didáticos que abordam o objeto matemático em estudo para identicar os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* que podem se manifestar no percurso do estudo das Integrais Generalizadas até chegar às Integrais Dependentes de Parâmetros.

Ainda nessa fase da ED, no que compete a organização matemática do conteúdo, buscamos evidenciar os conhecimentos matemáticos atinentes ao assunto estudado, apresentando as principais propriedades referentes a Integrais Generalizadas com suas respectivas demonstrações e a exposição do desenvolvimento analítico de algumas IDPs apresentadas por Dana- Picard (2005b, 2011).

- ✓ **Análise *a priori*:** é nessa fase que é feito o planejamento das situações didáticas e a elaboração das situações-problema que serão aplicadas.

Nessa etapa é importante que o pesquisador preveja as possíveis atitudes que os alunos manifestarão e formule estratégias para mediar o comportamento dos discentes. Deve-se aqui definir as variáveis de comando, que segundo Artigue (1988) *apud* Almouloud (2007, p. 175) podem ser de dois tipos: "as variáveis *macrodidáticas* ou *globais* relativas à organização global da engenharia; e as variáveis *microdidáticas* ou *locais*, relativas à organização de uma sessão ou de uma fase." Assim, deve-se definir nessa etapa: as metodologias que serão empregadas para a transposição didática, os recursos didáticos a serem utilizados, o tempo disponível para o desenvolvimento das sequências didáticas, a situação-problema adequada e os conhecimentos que devem ser mobilizados para chegar a solução da mesma.

Nessa etapa, elaboramos as sequências de ensino que foram aplicadas na fase da experimentação. As atividades foram construídas com arrimo do *software* GeoGebra. O objetivo era trabalhar com os sujeitos da pesquisa a visualização de critérios de convergência de Integrais Generalizadas e Integrais Dependentes de Parâmetros. Prognosticamos a execução de cinco atividades com arrimo na exploração do *software* já citado, sendo duas (02) referentes a IGs e três (03) atinentes a IDPs. Cada aplicação teria a duração em média de 2h, uma vez que os sujeitos participantes da pesquisa teriam que explorar os recursos gráficos e geométricos do GeoGebra e também fazer o desenvolvimento analítico das integrais, para compará-lo com os resultados visualizados no *software*. Para elaboração das situações didáticas, levamos em consideração que os alunos teriam que mobilizar os conhecimentos prévios relativos a técnicas de integração e as propriedades do conteúdo já abordadas em sala.

✓ **Experimentação:** é nessa etapa onde é colocado em prática todo o dispositivo planejado no momento anterior. Ou seja, é o estágio da aplicação da sequência didática propriamente dita.

Nessa fase, o professor deve apresentar os objetivos da pesquisa e deixar claras as condições para a realização do trabalho, estabelecendo dessa forma o contrato didático, que de acordo com Brousseau (1986, p. 51) *apud* Almouloud (2007, p. 89) é definido como: "Uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro." O pesquisador deve também, nessa etapa, colher e registrar os dados para qualificar a pesquisa e, para tanto, deve utilizar alguns recursos, tais como vídeos, áudios, manuscritos de alunos etc.

Executamos na experimentação, as sequências didáticas planejadas na análise *a priori*. Como mencionado anteriormente, foram aplicadas cinco situações-problema. No primeiro momento, antes de trabalharmos com as situações didáticas, esclarecemos os objetivos de nossa pesquisa e explicamos como ia se desenvolver a nossa experimentação, evidenciando o papel dos sujeitos da pesquisa e o nosso ofício de pesquisador no decorrer da execução das atividades.

Nessa etapa, tivemos também todo um cuidado com a coleta dos dados para qualificar a pesquisa. Dessa forma, buscamos deixar registrados em vídeos a execução das atividades, colhemos as folhas com os registros do desenvolvimento analítico das situações-problema resolvidas pelos alunos e também registramos, em fotos, os gestos que manifestavam a compreensão dos sujeitos da pesquisa sobre o assunto estudado.

✓ **Análise *a posteriori***: Nessa etapa o pesquisador deve analisar profundamente os dados colhidos na experimentação. Além disso, confrontar os resultados encontrados com o que foi levantado no início da engenharia e decidir por aceitar ou rejeitar as hipóteses definidas na análise *a priori*. Nessa perspectiva, fizemos em nossa investigação, uma análise minuciosa dos dados coligidos na fase da experimentação, com o intuito de identificar as categorias intuitivas que os sujeitos da pesquisa manifestaram no estudo dos critérios de convergência/divergência de IGs e IDPs.

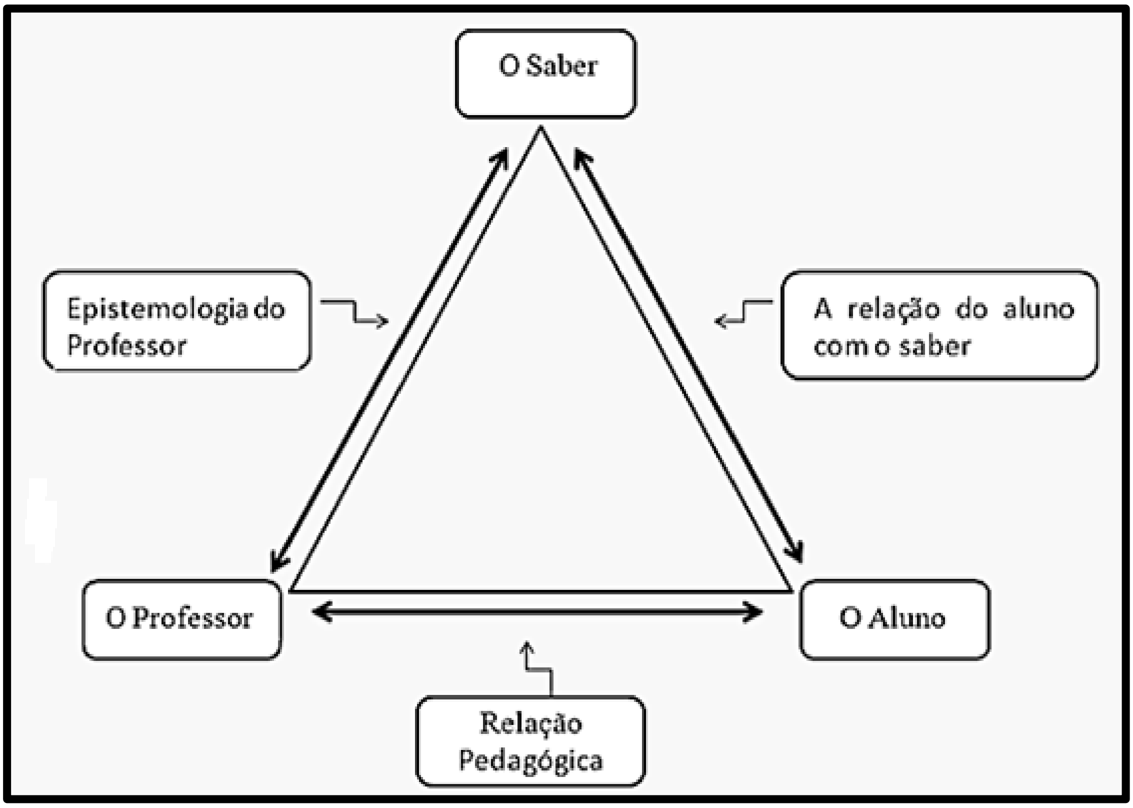
3.2 Teoria das Situações Didáticas – TSD

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi idealizada por Guy Brousseau (1986), pesquisador da Universidade de Bordeaux e um dos principais representantes da Didática da Matemática francesa. Ao desenvolver a TSD, Brousseau objetivou utilizar situações ditas reprodutíveis ou identificáveis para modelar, de uma maneira geral, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, considerando as especificidades dos conteúdos. Para esse pesquisador, as situações reprodutíveis modificariam o comportamento dos aprendizes, pois de acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas tem como objetivo:

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa. (ALMOULOUD, 2007, p. 31-32).

O foco principal da TSD é a situação didática em si, por meio da qual são estabelecidas as interações entre o professor, o saber matemático e o aluno. A relação instituída entre esses três componentes pode ser modelada pelo sistema didático *stricto sensu* ou triângulo didático, apresentado na Figura 9.

Figura 9- Triângulo Didático



Fonte: (ALMOULOUD 2007, p. 32, adaptação dos autores)

A relação entre o saber e o docente é instituída pela “epistemologia do professor”, que comporta vários elementos, tais como: a concepção que o educador tem a respeito do conhecimento a ser ensinado; sua metodologia mediante a passagem de um conteúdo mais simples para um mais complexo, entendendo as habilidades cognitivas dos alunos; o objetivo de abordar determinado assunto contemplado na matriz curricular; o conhecimento que o mesmo tem sobre a origem histórica dos conteúdos abordados, dentre outros componentes do processo de ensino e aprendizagem. A concepção epistemológica na Didática da Matemática de acordo com D’Amore (2007, p.3) *apud* Pommer (2008, p. 8) “é um conjunto de convicções, conhecimentos e saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade e então ensiná-los e aprendê-los.”

De acordo com a TSD, proposta por Brousseau, o discente, ao entrar em contato com o novo saber, terá a postura de um pesquisador, assumindo um papel ativo diante da situação a ele apresentada, interagindo com o meio, refletindo e se desenvolvendo por iniciativa própria. Na relação estabelecida entre o saber e o aluno, devem ser apreciados os conhecimentos prévios dos aprendizes e proporcionados meios para que os mesmos sejam capazes de formular hipóteses, testar conjecturas, provar e construir conceitos acerca do novo saber cientifico. Porém a intenção didática das situações desenvolvidas pelo professor não deve ser percebida pelo discente, que passa a atuar de forma ativa, mesmo desconhecendo o que deverá aprender e o que está sendo repassado.

Na relação pedagógica, o professor, com o papel de mediador, deve criar situações de aprendizagem que proporcionem a aproximação do aluno com o novo saber cientifico e deve também, de acordo com Pommer (2008):

> - Procurar situações onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pelo aluno.
> - Ajudar seus alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, como fazem os matemáticos, de modo a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis. (POMMER, 2008, p. 4).

Mediante o exposto, percebemos que o sistema didático *stricto sensu* apresenta uma proposta diferenciada do modelo padrão de aulas, que na maioria das vezes são expositivas, onde o professor tem o papel de ensinar e o aluno o papel de assimilar de forma passiva as ideias apresentadas pelo regente.

Assim, ainda de acordo com Almouloud (2007), existem três hipóteses que amparam a TSD, a saber: a primeira assegura que o aprendiz é capaz de adquirir novo saber ao adaptar-se a um meio cheio de contradições e dificuldades; a segunda pontua que o *milieu*[1] não proporcionará a aquisição de novos conhecimentos matemáticos se este não estiver munido de intenções didáticas; já a terceira e última hipótese ressalta que o *milieu* e as situações didáticas devem enfatizar os conhecimentos matemáticos a serem aprendidos pelos discentes.

O *milieu*, conforme já foi pontuado, deve apresentar dificuldades e desequilíbrios e conter intenções didáticas que proporcionem a aprendizagem de saberes matemáticos, seja por meio de jogos, de situações-problema ou outras situações de aprendizagem.

Ainda aludindo sobre a TSD, Almouloud (2007) aponta a diferença entre situações didáticas e adidáticas. Este autor, define as situações didáticas, como:

[1] Palavra francesa que significa meio, refere-se ao ambiente munido de intensões didáticas onde acontecerá a aplicação da situação didática. Tal expressão foi empregada por Brousseau para fazer uma relação entre os estudantes, os conhecimentos ou saberes a serem ensinados e as situações de ensino.

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. (ALMOULOUD, 2007, p. 33).

Já em relação a situações adidática, o mesmo autor pontua que:

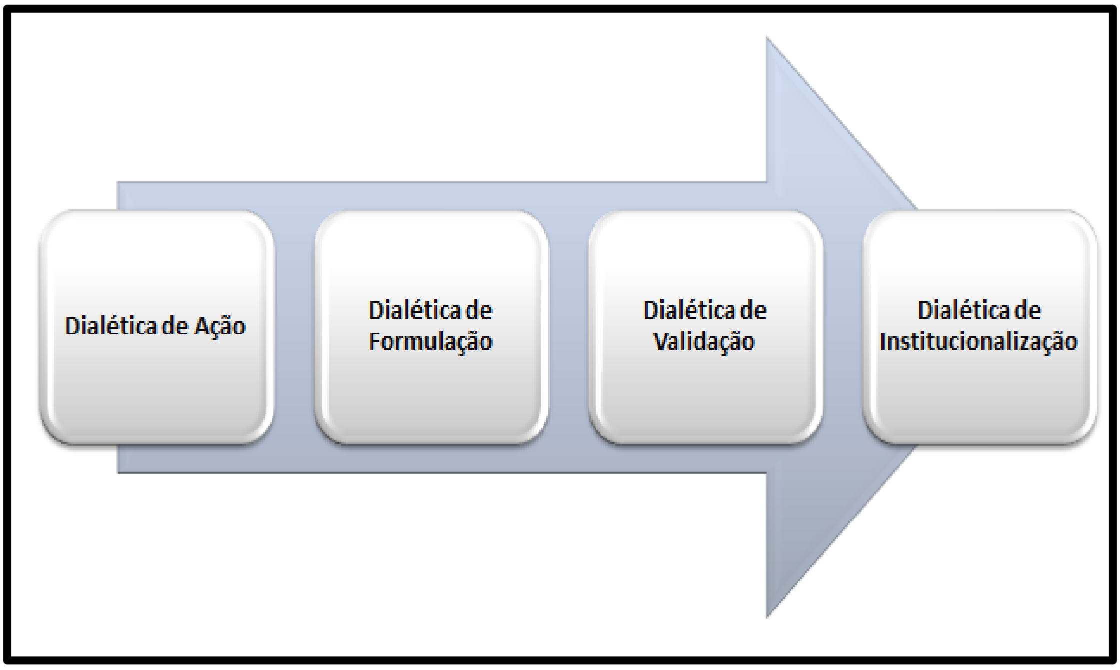
> A *situação adidática*, como parte essencial da *situação didática*, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. (ALMOULOUD, 2007, p. 33).

Trabalharemos, nas sequências de ensino que serão aplicadas em nossa investigação, com situações didáticas, mas ressaltamos que também vivenciaremos situações adidáticas, uma vez que estas comportam uma parte das situações didáticas, conforme ficou esclarecido nas definições apresentadas nas citações anteriores.

Para Brousseau (1986), citado por Almouloud (2007), em uma situação adidática, o problema matemático que será proposto ao estudante deve ser escolhido de forma a possibilitar ao mesmo agir e se desenvolver por iniciativa própria e não por vontade do professor. Dessa forma, o docente passa a atuar como mediador da aprendizagem, criando e proporcionando condições do aluno ter papel ativo na construção de seus conhecimentos.

A Teoria das Situações Didáticas decompõe o processo de aprendizagem em quatro etapas distintas, sendo que nessas fases o aluno apresenta relações diferenciadas com o saber. A modelagem da TSD é apresentada na Figura 10.

Figura 10 - Modelagem das Situações Didáticas



Fonte: Produção nossa, em conformidade com as fases apresentadas por Almouloud (2007)

A situação adidática ocorre na vivência das três dialéticas iniciais (ação, formulação e validação), uma vez que nessas fases o aluno está agindo, refletindo e evoluindo sem a interação do professor. Enquanto que na última dialética (institucionalização), o docente retoma o seu papel e passa a atuar novamente no processo de ensino e aprendizagem, fixando o estatuto do saber e completando a situação didática. Nesse momento, o meio propício a aprendizagem está composto por todos os seus elementos, a saber: o professor, o aluno e o conhecimento a ser adquirido.

Porém, antes de se desenvolverem as dialéticas apresentadas, Pommer (2008) esclarece que ocorre a devolução, atitude por meio da qual o docente delega ao aluno uma parcela da responsabilidade em sua aprendizagem. Para esse autor, esta seria a etapa inicial das situações didáticas, seguida das fases de ação, formulação, validação e institucionalização, que serão descritas nos parágrafos seguintes.

✓ **Dialética da Ação:** nessa fase, o professor propõe um problema ao aluno com o objetivo de ensinar algum conteúdo. O aprendiz, que tem parte da responsabilidade por sua aprendizagem, dará início à resolução da situação proposta, colhendo os dados que o problema apresenta, refletindo, fazendo ajustes, buscando meios para chegar a solução e julgando seus resultados. Nesse momento pode contar com o auxilio de *milieu*, por meio de retroações, mas não com a intervenção do professor.

✓ **Dialética de formulação:** nessa etapa, de acordo com Almouloud (2007), o aluno troca mensagens escritas ou orais com um ou mais colegas. Os emissores e receptores podem utilizar a linguagem natural ou matemática. É a ocasião em que os estudantes apresentarão, de forma oral ou escrita, as respostas que encontraram para o problema, mencionando as ferramentas que utilizaram para encontrá-la.

✓ **Dialética da validação:** conforme Almouloud (2007), nessa fase o aluno mostrará a exatidão do modelo por ele criado, por meio de uma validação semântica ou sintática. Sua afirmação, que estará em linguagem matemática adequada, será submetida ao julgamento dos demais discentes que podem exigir explicações mais claras ou discordar do emissor, rejeitando com justificativas sua resposta.

✓ **Dialética da institucionalização:** é o momento em que o professor retoma a parte da responsabilidade que havia delegado aos discentes e, conforme Almouloud (2007, p. 40), "fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber". Nessa etapa, o docente manifesta claramente o seu papel, analisando os modelos encontrados pelos alunos, definindo o objeto de estudo e oficializando o conhecimento matemático que será incorporado, de acordo com o autor já mencionado, aos esquemas mentais dos alunos, passando a fazer parte do patrimônio da turma.

Nas atividades experimentais que serão aplicadas com o publico alvo de nossa investigação aplicaremos a TSD e dessa forma, todas as dialéticas apresentadas e definidas anteriormente serão vivenciadas pelos sujeitos de nossa pesquisa.

3.3 Categorias Intuitivas no ensino da noção de IDPs

Em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática, é notória a manifestação, por parte dos estudantes, de dificuldades na compreensão e assimilação de conteúdos matemáticos, uma vez que no quadro de ensino, predominantemente o professor privilegia modelos formalistas e distantes da realidade do aluno, desconsiderando a dimensão subjetiva do conteúdo.

Mediante as dificuldades de aprendizagem e os entraves à compreensão de conteúdos matemáticos por parte do estudante, Alves e Borges Neto (2011) afirmam que a exploração do terreno intuitivo constitui-se em uma das maneiras de conduzir o aluno a perceber a "beleza do saber matemático", sendo uma condição necessária para o professor identificar e compreender essa "beleza e estética" da Matemática para enriquecer a visão do estudante. Esses autores ainda advertem que a abordagem e adaptação metodológica do docente se processam quando este reconhece a manifestação do raciocínio intuitivo.

Fischbein (1987), em seu trabalho "Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach", define o termo "intuição intelectual" como formas de conhecimento imediato e aponta as características dos processos de raciocínio intuitivo. Entre as características apresentadas por esse autor, selecionamos as principais e descrevemos nos parágrafos seguintes.

- ✓ **Cognições auto evidentes** – são manifestadas quando o indivíduo aceita a intuição sem requerer uma verificação *a posteriori*, já que para ele a afirmação é autoexplicativa e consistente por si mesma. Quando, por exemplo, afirmamos que "dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles" (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 3) não é necessário recorrer a uma demonstração analítica para mostrar a validade da mesma, já que a averbação é auto justificável. Os postulados da Geometria Euclidiana possuem essa característica.

✓ **Certeza intrínseca** – o indivíduo aceita a veracidade da afirmação, visto que existe uma convicção segura que está associada ao sentimento de certeza. Na Matemática, uma afirmativa enunciada por meio de um teorema é aceita porque é validada por meio de uma demonstração. Neste caso, a afirmação não é auto evidente, mas o indivíduo aceita a sua validade pelo fato de se apoiar em provas que validam o seu sentido.

✓ **Sentido coercitivo** – o indivíduo recusa as interpretações que diferem de suas intuições particulares. Dessa forma, Fischbein (1987) afirma que as intuições exercem um efeito coercivo na linha de raciocínio dos sujeitos, uma vez que elas se apresentam como representações únicas e absolutas. Assim, o indivíduo passa a eliminar outras alternativas além da que admitiu como válida. Como exemplo dessa característica, o autor cita o postulado de Euclides referente a unicidade da reta. Nesse acaso, ao admitir que "por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada" (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 64), o sujeito exclui a possibilidade de que nenhuma reta paralela pode ser traçada ou mesmo que infinitas retas paralelas a outra podem ser desenhadas.

✓ **Extrapolatividade** – A intuição acontece quando o sujeito consegue chegar a uma conclusão apoiado em informações não explícitas, mas necessárias a obtenção da afirmativa. Como uma ilustração, temos o Princípio da Indução Finita. Em Matemática executamos determinadas demonstrações por esse princípio. Mostramos a validade da afirmativa para um número natural inicial, em seguida para o caso $n = k$, por exemplo, e logo aceitamos a validade da afirmação para o caso $n = k + 1$.

✓ **Caráter de globalidade** – as intuições representam visões globais e sintéticas, sem nenhuma análise preliminar que se opõem às cognições oriundas de vias sequenciais lógicas e inferenciais, ou seja, são cognições globais.

Ainda conforme Fischbein (1987), podemos ter três categorias de raciocínio intuitivo, a saber:

✓ **Intuições afirmativas**: são representações de fenômenos aceitos como verdadeiros, auto consistentes e auto evidentes.

Como exemplo dessas cognições auto consistentes temos algumas proposições primitivas da Geometria Plana. Tomemos como ilustração o Postulado da Existência que afirma o seguinte: "(a) numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos; (b) Num plano há infinitos pontos". (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 2). Esses postulados primitivos são aceitos como declarações evidentes e, portanto admite-se a veracidade dos mesmos sem a necessidade de recorrer a uma demonstração ou verificação formal.

✓ **Intuições conjecturais:** estão relacionadas a declarações atinentes a fenômenos futuros. Representam uma visão global e preliminar de uma solução analítica de um problema.

✓ **Intuição antecipatória:** está associada à fase de resolução do problema, onde o indivíduo encontra-se empenhado em encontrar a solução da questão proposta. Para isso recorre a algumas estratégias, tais como: utilização de fórmulas e elaboração de desenhos.

Fischbein (1987), em sua teorização ainda classifica os tipos de intuição segundo a sua fonte de origem, que são elas: intuições primárias e intuições secundárias. A primeira está relacionada a uma noção cognitiva que o indivíduo desenvolve sem recorrer a uma sequência lógica, inferencial, ou seja, ele se apoiará apenas em uma crença resultante de uma experiência pessoal. Já a segunda, a intuição secundária, é desenvolvida por meio de uma experiência que o indivíduo vivencia, assim sua origem não é natural.

Em nossa investigação, o registro das categorias de raciocínio intuitivo (intuições afirmativas, conjecturais e antecipatórias) será feito mediante a exploração das quatro fases da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau que passará a ser descrita na seção seguinte. Justificamos que o uso da Teoria das Categorias Intuitivas em nossa pesquisa, se justifica pelo fato de termos assumido interesse declarado pela visualização e o componente intuitivo como impulsionador das atividades dos estudantes pesquisados.

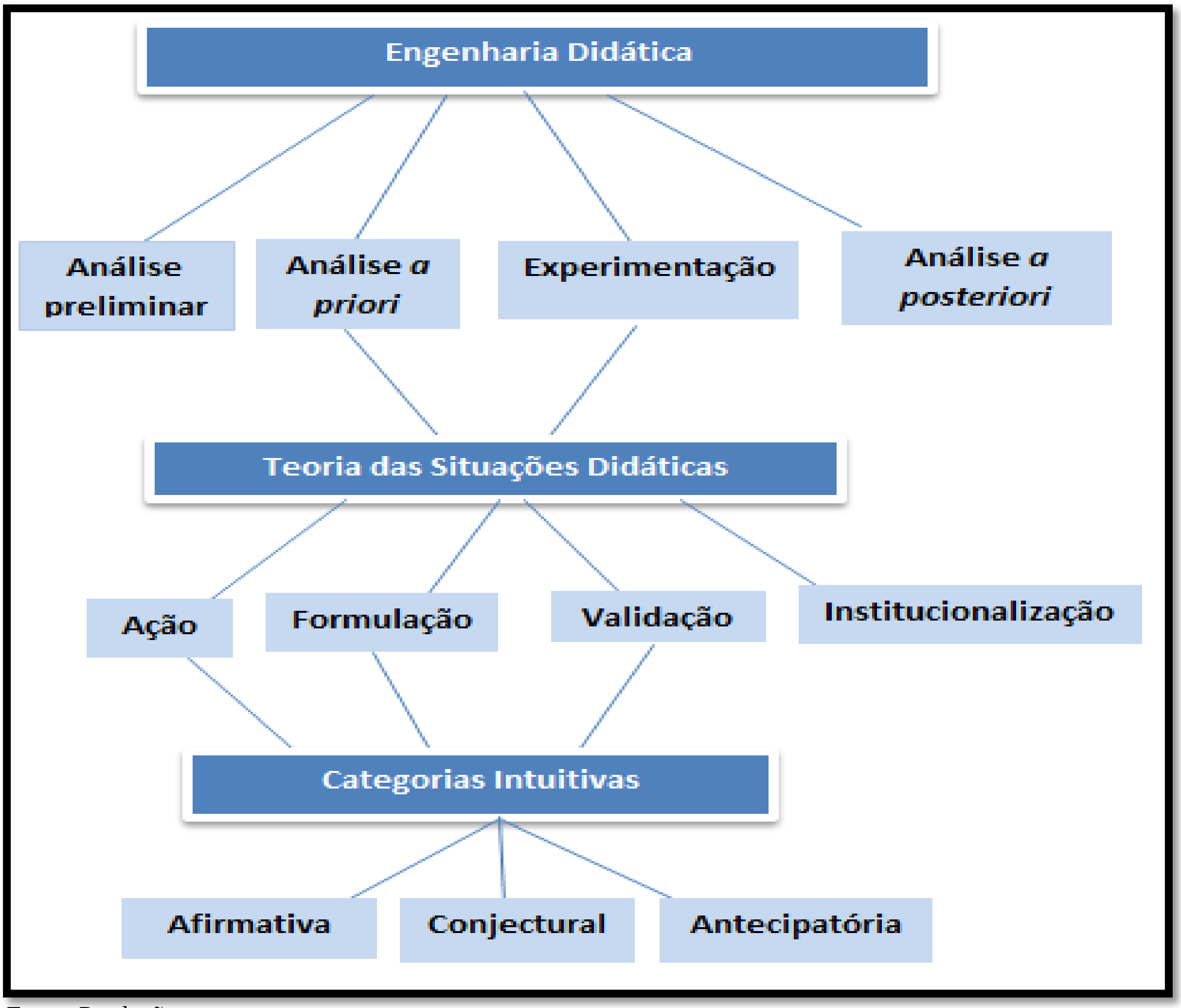
3.4 Complementaridade do referencial metodológico e teórico

Como visto nas seções anteriores, teremos como aporte teórico para a nossa investigação duas teorias, a saber: Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e aTeoria das Categorias Intuitivas de Efrain Fischbein. A primeira trata-se de uma teoria de ensino e será empregada para elaborar e executar as situações didáticas com o objeto matemático estudado, enquanto que a segunda será utilizada no momento de análise de dados.

A Engenharia Didática, trata-se da metodologia de pesquisa elegida para a nossa investigação. Passaremos a compreender como trabalharemos conjuntamente com o aporte teórico e a metodologia de pesquisa, em caráter de complementaridade.

Na Figura 11, podemos visualizar como acontece a complementaridade entre o referencial teórico e metodológico de nossa inquirição.

Figura 11 – Caráter de complementaridade entre o referencial metodológico e teórico



Fonte: Produção nossa

Como podemos perceber pelo esquema exposto na figura 11, a Teoria das Situações Didáticas será utilizada quando estivermos trabalhando na segunda e terceira fases da Engenharia Didática, ou seja, quando estivermos executando a análise *a priori* e a experimentação, uma vez que são nessas fases que delineamos e executamos as situações didáticas que serão analisadas em nossa pesquisa.

A complementaridade entre a TSD e a Teoria das Categorias Intuitivas de Efrain Fischbein se justifica pelo fato de termos que identificar, durante as dialéticas de ação, formulação e validação, o tipo de raciocínio intuitivo que os estudantes manifestarão quando estiverem desenvolvendo as atividades no decorrer dessas fases.

A compreensão da complementaridade entre o aporte teórico e a metodologia da pesquisa é de fundamental importância, uma vez que será por meio do uso das teorias e aplicação da Engenharia Didática que delineamos e executamos a nossa investigação.

4 ANÁLISES PRELIMINARES

Neste tópico da nossa investigação, trazemos uma abordagem sobre o desenvolvimento histórico do cálculo integral, bem como a análise de alguns livros que abordam o objeto matemático de nosso interesse. O intuito é compreender como é feita a abordagem atual do conteúdo estudado em nossa pesquisa, atendendo à sistemática da Engenharia Didática que, segundo Almouloud (2007, p.172), tem como uma das vertentes a organização didática do conteúdo matemático, comportando, dessa forma, o estudo da gênese histórica do conteúdo e a análise dos livros didáticos.

Para a análise dos livros, apoiamo-nos no ponto de vista de Alves (2011) quando buscamos identificar os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* que podem ser manifestados no processo de transição do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis.

Ainda nessa seção da pesquisa, mais uma vez nos orientando pela sistemática da ED, no que concerne ao estudo da organização matemática apontada por Almouloud (2007), evidenciamos os saberes matemáticos do nosso estudo, expondo os critérios de convergência das IDPs e outros conhecimentos teóricos específicos relacionados ao objeto matemático de interesse.

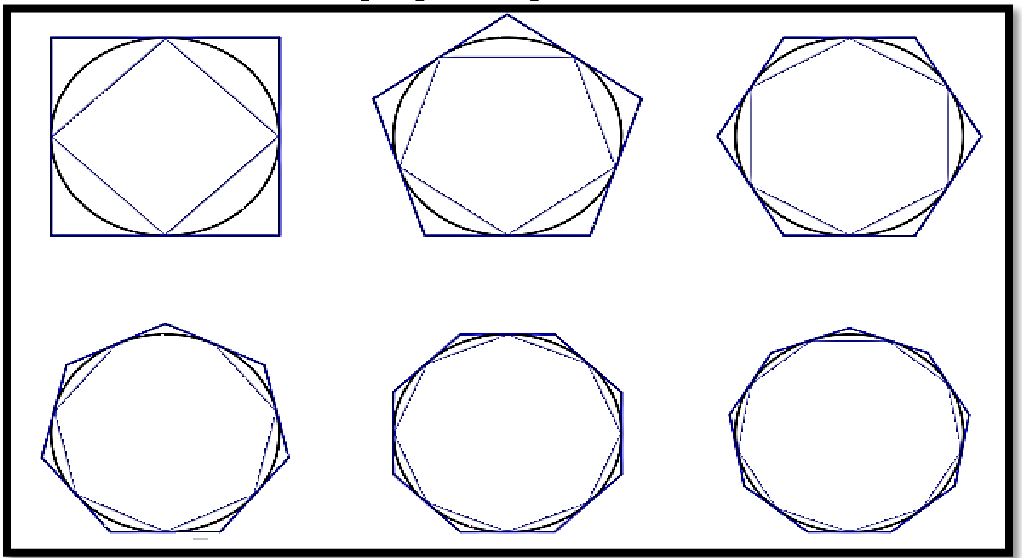
4. 1 Uma abordagem sobre o desenvolvimento histórico do cálculo integral

De acordo com Eves (2011), o surgimento da ideia de integração está relacionada ao cálculo de comprimento, áreas e volumes envolvendo processos de somatórios. O Papiro Golonishev, mais conhecido como Papiro de Moscou, datado de aproximadamente 1890 a. C, traz, no problema de número 10, o registro dos esforços iniciais de se calcular a área de uma superfície hemisférica. Nesse problema, segundo Boyer (2010), o escriba pede que se calcule a área de uma superfície que aparentemente trata-se de um cesto de diâmetro equivalente a $4\ \frac{1}{2}$. Mas segundo Peet (1931) *apud* Cooper (2010), a palavra "cesto" foi utilizada apenas como um termo técnico para denotar a superfície esférica e que o problema poderia estar relacionado ao cálculo da área de um semicírculo bidimensional. O fato é que ainda de acordo com Boyer (2010), o escriba teria tomado a aproximação egípcia $(1-\frac{1}{9})^2$ equivalente a $\frac{\pi}{4}$ e multiplicado por $(2x).x$, sendo que $x = 4\,\frac{1}{2}$. Esse cálculo resultaria em 32 unidades. Esse problema teria sido o primeiro registro do cálculo de área de uma superfície curva.

Um outro registro também importante na história do cálculo integral trata-se do problema da quadratura do círculo. Antífon, (430 a. C) que era um Sofista, chegou a contribuir com esse problema famoso, ao propor, segundo Eves (2011), a ideia de que a diferença entre as áreas de um círculo e de um polígono regular inscrito na primeira figura, iriam exaurir - se quando o número de seus lados fossem duplicados sucessivamente. Essa ideia proposta por Antífon, era semelhante ao método grego da exaustão atribuído a Eudoxo (370 a.C) que pode ser enunciado de acordo com Eves (2011, p. 419) da seguinte forma: “Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará, por fim, a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.”

O método da exaustão citado acima e utilizado pelos gregos na antiguidade, empregava a estratégia de desenhar polígonos inscritos e circunscritos a figuras planas. De forma que, ao aumentar sucessivamente a quantidade de lados dos polígonos, a área destes tornavam – se mais próximas da área da superfície curva. Como pode ser visto na ilustração da Figura 12, onde temos polígonos regulares inscritos e circunsritos a um círculo.

Figura 12 - Ilustração do Método da Exaustão para o caso de um círculo com polígonos regulares inscritos e circunscritos

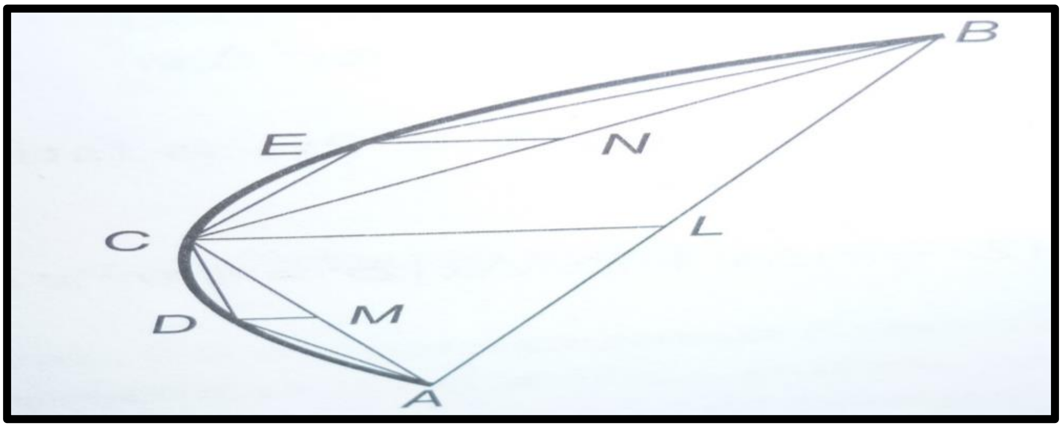


Fonte: Elaboração nossa

Assim como Antífon, Hipócrates de Chios (430 a.C) também trabalhou com cálculo de área de figuras esféricas, mais especificamente com o problema da Quadratura de Lunas, Porém, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi o que utilizou o método da exaustão de forma mais apurada, chegando bem próximo ao cálculo integral que utilizamos atualmente. Esse matemático trabalhou com a quadratura de segmentos parabólicos.

Quando Arquimedes escreveu o tratado sobre a quadratura da parábola, as secções cônicas já eram conhecidas, porém não existiam avanços no tocante ao cálculo de área de tais regiões. Foi esse exímio matemático o primeiro a conseguir quadrar uma secção cônica e, para tanto se amparou no método da exaustão. De acordo com Boyer (2011), Arquimedes provou com rigorosidade que a área de um segmento em forma de parábola é equivalente a quatro terços do triângulo com mesma base e mesma altura do segmento da parábola. Assim na Figura 13, temos que a área do segmento ADCEB é igual a quatro terços da área do triângulo ABC.

Figura 13 - Segmento em forma de parábola



Fonte: Eves (2011, p. 421).

Arquimedes não se limitou apenas a empregar o método da exaustão, apesar de sua rigorosidade. Em um de seus tratados denominado de “O Método”, que havia sido enviado a Erastóstenes em formato de carta, apontava à seguinte idéia:

> Para determinar a área ou volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras grandes ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroides conhecidos. (EVES, 2011, p. 422).

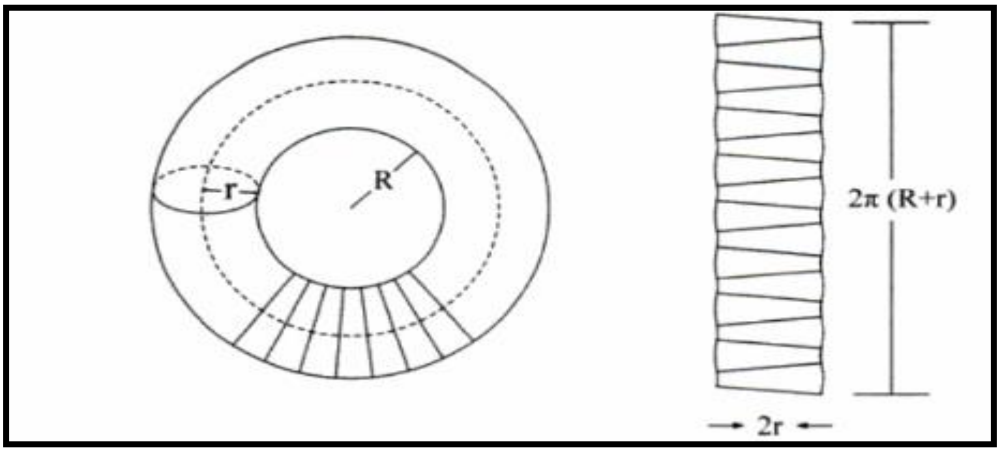
Percebemos que nesse procedimento, nominado de O Método de Equilíbrio de Arquimedes, esse matemático trabalhava com divisão em fatias de áreas sob curvas. Atualmente, essa idéia de aproximação de áreas de superfícies curvas por áreas de fatias retangulares é empregada no cálculo, sendo utilizada para estabelecer a idéia da integral definida.

O Cálculo integral, após as ideias de Arquimedes, passou por um período em que não aconteceram grandes avanços em termos da teoria da integração, até que as contribuições desse matemático fossem difundidas na Europa Ocidental por volta do século XVII.

Entre os europeus que trabalharam com ideias atinentes a infinitésimos e com o cálculo integral, podemos destacar Johann Kepler (1571-1630). Em sua segunda lei do movimento planetário, segundo Eves (2011, p. 357) esse matemático afirma que “o raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais”. Kepler trabalhou com integração e, ainda segundo Eves (2011), também recorreu, em sua obra intitulada *Stereometria doliorum Vinorum* (Geometria Sólida dos Barris de Vinho – 1615), a processos de integração para encontrar os volumes de 93 sólidos gerados pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo.

Kepler calculou, por exemplo, o volume de um Toro, com raio de orifício R e raio de seção circular medindo r unidades. Assim, conforme Garbi (2010), ele supôs que o Toro fosse dividido em fatias que poderiam ser empilhadas, de forma alternada, sendo que seus lados mais espessos ficassem posicionados ora à direita e ora à esquerda, como pode ser ilustrado na Figura 14. De forma que, na medida em que aumentava a quantidade de fatias, a pilha se aproximava de um cilindro, com área da base equivalente a πr^2 e altura $2\pi(R + r)$ e dessa forma o volume do Toro seria dado pelo produto $\pi r^2 2\pi(R + r)$.

Figura 14 - Determinação do Volume do Toro por Kepler



Fonte: Garbi (2010, p. 175).

Bonaventura Cavaliere (1598 – 1647), em seu trabalho *Geometria Indivisibilibus* (1635) apresenta métodos próprios para cálculo de área e volumes de determinadas figuras de superfícies curvas. Assim como Arquimedes, Cavaliere supôs a região dividida em inúmeras fatias pequenas, que eram consideradas indivisíveis, devido a seu tamanho tão minúsculo.

Embora estivesse trabalhando com uma ideia bem antiga, o seu método foi considerado inovador, uma vez que o mesmo empregou muito rigor. Segundo ele, da mesma forma que uma figura plana era composta por infinitas cordas indivisíveis e paralelas, uma superfície sólida poderia ser seccionada em uma infinidade de regiões planas e, dessa forma, conjecturou que figuras distintas que pudessem ser seccionadas nos mesmos indivisíveis teriam a mesma área e volume.

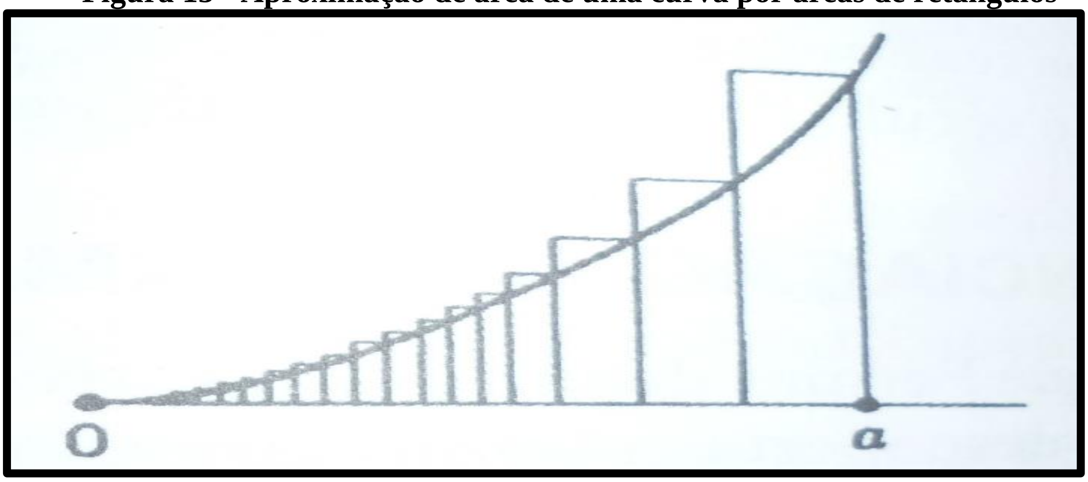
A ideia de Bonaventura foi generalizada no *Principio de Cavaliere*, que é dividido em duas partes, a saber:

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralelas a uma reta dada determinada nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante. 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelos a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2011, p. 426).

A ideia de Cavalieri constitui-se em uma valiosa ferramenta para o cálculo de áreas e volumes, sendo que atualmente pode-se dar um trato ainda mais rigoroso a sua noção por meio do cálculo integral moderno.

Outro matemático que veio a contribuir com a teoria da integração foi Pierre de Fermat (1601? - 1665). Passaremos agora a explicar o método empregado por Fermat. Assim, consideremos uma curva, como a ilustrada na figura abaixo. Se o objetivo for calcular a área da região limitada pela curva e por um determinado intervalo compreendido, Fermat subdividia o intervalo em uma infinidade de subintervalos como os da Figura 15 e, na medida em que os retângulos tornavam-se mais estreitos, a soma de suas áreas se aproximavam da área sob a curva dada.

Figura 15 - Aproximação de área de uma curva por áreas de retângulos



Fonte: Boyer (2010, p. 240)

No século XVII, os estudiosos do cálculo já utilizavam limites para calcular área de superfícies curvas. Isaac Newton e Gottfried Leibniz, fazem suas contribuições e esclarecem que a utilização da integral iria facilitar esses cálculos, surge então o Teorema Fundamental do Cálculo, ao reconhecerem a integral e derivadas como operações inversas. De acordo com Eves (2011), Isaac Borrow (1630 – 1677) teria sido o primeiro a chegar a essa conclusão. Em relação à notação, Leibniz deixa o símbolo para a integral que seria o S alongado devido à letra inicial da palavra latina *summa*.

O inglês John Wallis (1616–1703), um dos mais importantes matemáticos anteriores a Newton, deixou contribuições relevantes ao cálculo infinitesimal e também a teoria da integração. Ele antecipou a ideia de Euler sobre a função fatorial. Segundo Boyer (2011), Wallis reconhecia a integral $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$ como a área sob o semicírculo que teria medida equivalente a $\frac{\pi}{8}$, porém, não sabia como encontrar esse resultado por cálculo direto da integral por métodos infinitesimais. Assim, se apoiou em seu método de indução e interpolação, chegando a respostas interessantes. Após calcular a integral $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$ para vários valores inteiros positivos de n, encontrou o seguinte resultado $(n!)^2 \,/\, (2n + 1)!$, mas esta era uma resposta incompleta. Wallis, então assumiu que a fórmula seria válida também para valores fracionários de n e chegou à conclusão de que: $\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx = \left(\frac{1}{2}!\right)^2 \,/\, 2$.

Leonhard Euler, foi outro matemático muito importante para o desenvolvimento da teoria da integração. O mesmo tratou do cálculo integral em sua obra intitulada, *Institutiones calculi integralis* (1768 a 1777) que era dividida em três volumes. De acordo com Eves (2011), esse trabalho de Euler entre outros contribuiu para modelar o estilo e a notação de muitos compêndios de cálculo utilizados em cursos superiores atualmente.

A integral de Euler apresenta uma definição elegante para o fatorial $n!$. De acordo com Alves (2014a), em um trato moderno temos a seguinte igualdade para essa integral: $\int_0^\infty x^n . e^{-x} \, dx = n!$. O mesmo autor, após fazer algumas conjecturas conclui que: $\int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$. Tomando $t = 1 \leftrightarrow x = 1.u$, temos que: $\int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx = n!$ que se trata *da integral de Euler.* Assim percebemos que esse modelo matemático se trata de uma integral dependente de parâmetros, nesse caso do parâmetro t.

Percebemos pelo exposto, que o desenvolvimento do modelo matemático estudado em nossa investigação aconteceu por meio da contribuição de diversos matemáticos em diferentes épocas históricas. A compreensão da evolução do conceito estudado é muito relevante pois nos permite compreender como ocorreu a generalização do modelo matemático nominado de integral.

4. 2 O objeto matemático em livros didáticos

Esta seção foi desenvolvida com base na perspectiva de Alves (2011) quando aponta existirem *elementos de transição* e *elementos de ruptura* na transição interna do cálculo de uma única variável (CUV) para o cálculo de várias variáveis (CVV). Dessa forma, buscou-se identificar em nossa inspeção, os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* relacionados com a noção de Integrais Generalizadas (IGs) que, consequentemente, tendem a se manifestar no contexto do ensino das Integrais Dependentes de Parâmetros (IDPs).

Na Tabela 2, são indicadas as obras didáticas selecionadas para a inspeção. Enfatizamos que a escolha dos livros foi condicionada com base no Plano de Unidade Didática da disciplina de Cálculo II do Curso de Licenciatura em Matemática do IFCE/CEDRO e, também, pela escolha de outras obras didáticas que não constam no PUD da disciplina, mas que são utilizadas por professores do curso citado, como livro-texto.

Tabela 2 - Obras didáticas analisadas

Livro selecionado	Autores	Ano	Volume	Editora
O Cálculo com Geometria Analítica	Louis Leithold	1994	I	HARBRA
Cálculo	James Stewart	2015	I	CENGAGE Learning
Um curso de Cálculo	Hamilton Luiz Guidorizzi	2014	II	LTC
Cálculo com Geometria Analítica	George F. Simmons – tradução Seiji Haruki	1987	I	PEARSON Makron Books
Cálculo Diferencial e Integral.	Paulo Boulos	1999	I	PEARSON Makron Books

Fonte: Elaboração nossa

O plano de Unidade Didática da disciplina de Cálculo II do Curso de Licenciatura em Matemática do IFCE/CEDRO apresenta em sua bibliografia básica os livros (1) e (2), enquanto que os livros (3) e (4) são apontados na bibliografia complementar. Além dos autores citados ainda apreciaremos o livro (5), este não é indicado no PUD da disciplina de

Cálculo II do IFCE/CEDRO, mas sua escolha é justificada pelo fato de ser utilizado como livro – texto por alguns professores que lecionam a referida disciplina.

4.2.1 Livro I: O Cálculo com Geometria Analítica – Vol. I – Leithold (1994)

Leitlhod (1994), ao abordar o conteúdo Integrais generalizadas, inicia suas discussões apresentando as integrais impróprias com extremos de integração infinitos. Inicialmente, o referido autor estende a definição de integral definida ao considerar um intervalo de integração infinito e, passa a nominar essa nova classe de *integrais impróprias*. Logo em seguida, apresenta uma ilustração que consiste em encontrar a área de uma região limitada por uma curva. O mesmo desenvolve o conteúdo por meio de uma exploração algébrica, apresentando apenas uma ilustração gráfica, conforme pode ser visualizada na Figura 16.

Figura 16 - Exemplo que introduz o conteúdo Integral Imprópria, no livro Cálculo com Geometria Analítica – Vol. I

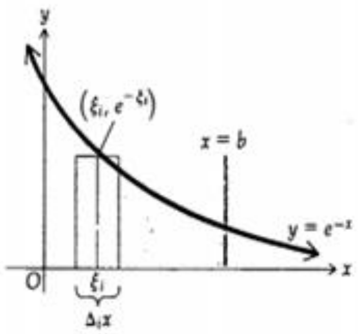


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos o problema de encontrar a área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = b$; onde $b > 0$. A região está na Figura 1. Se A unidades de área for a área da região,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i} \Delta_i x$$
$$= \int_0^b e^{-x}\, dx$$
$$= -e^{-x}\Big]_0^b$$
$$= 1 - e^{-b}$$

Se deixarmos b crescer sem limitação, então

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - e^{-b})$$
$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = 1 \qquad (1)$$

De (1) segue que, não importando quão grande seja o valor de b, a área da região mostrada na Figura 1 será sempre menor do que 1 unidade de área. ◀

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left| \int_0^b e^{-x}\, dx - 1 \right| < \epsilon$$

Em lugar de (1) escrevemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

Fonte: Leithold (1994, p. 665-666)

Logo após essa ilustração, o autor apresenta as definições formais para explicar quando uma integral imprópria converge ou diverge. A primeira definição apresentada, corresponde à integral com o extremo de integração superior infinito. Para esse caso, Leithold (1994, p. 666) afirma que: “Se f for contínua para todo $x \geq a$, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ se esse limite existir”.

A segunda definição é atinente ao caso, onde o extremo inferior da integral é infinito, assim conforme Leithold (1994, p. 666) “Se f for contínua para todo $x \geq b$, então $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$ se esse limite existir”.

Posteriormente, Leitlhod (1994) considera o caso em que ambos os extremos de integração são infinitos, afirmando que: “Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$ se esses limites existirem.” Leithold (1994, p. 666). O autor deixa para o leitor provar, como exercício, que o segundo membro da igualdade $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$ não depende da escolha de c.

O referido autor esclarece, para os três casos considerados nas definições, que a integral imprópria é convergente se os limites existirem e divergente se os limites forem infinitos. Na seção posterior, no mesmo capítulo, o autor trata das integrais impróprias que apresentam descontinuidade infinita nos extremos do intervalo de integração e expõe novamente três definições de integrais impróprias considerando três casos distintos.

No primeiro caso, onde o integrando tem descontinuidade infinita no extremo inferior do intervalo de integração, Leithold (1994, p. 674) esclarece que: “Se f for contínua para todo x no intervalo semiaberto à esquerda $(a, b]$, e se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$ se esse limite existir.”

Para o caso em que o integrando tem descontinuidade infinita no extremo superior do intervalo de integração, o autor estabelece que: “Se f for contínua em todos os x no intervalo semiaberto à direita $[a, b)$, e se $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$ se esse limite existir.” (LEITHOLD, 1994, p. 674).

E, por fim, Leithold (1994, p. 674) define o caso em que existe uma descontinuidade infinita em algum ponto contido no interior do intervalo de integração e, para tanto, afirma que: “Se f for contínua em todos os valores de x no intervalo $[a, b]$ exceto c, onde $a < c < b$

e se $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$ se esses limites existirem.

Para os três casos considerados, o autor elucida que a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ converge quando o limite correspondente existir e se for infinito diverge.

Identificamos nas definições expostas pelo autor (tanto no caso das IGs com intervalos de integração infinitos, como no caso de IGs que apresentam descontinuidade infinita nos extremos do intervalo de integração), *elementos de transição* na passagem da noção de Integrais Generalizadas/Impróprias para as Integrais Dependentes de Parâmetros, uma vez que a noção formal de convergência/divergência possui sentido nos dois contextos de estudo. Ou seja, o conceito de convergência/divergência de IGs pode ser explorado de forma semelhante no contexto das IDPs. Outro elemento de transição que se evidencia também nessa abordagem, trata-se da conservação da simbologia que é mantida no plano de estudo das IDPs.

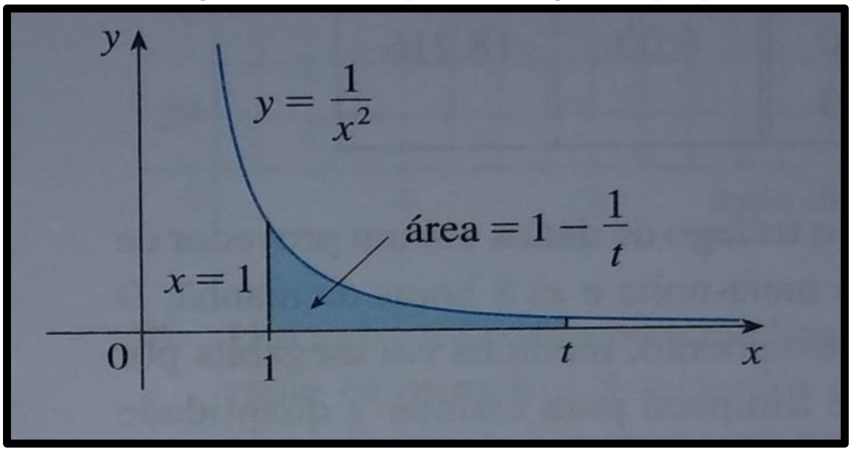
Assim, ao estudar a seção referente a Integrais Impróprias nessa obra investigada, podemos antecipar que na passagem do contexto de estudo das IGs para IDPs, possivelmente os sujeitos participantes da pesquisa não manifestarão entraves na assimilação dos conceitos estudados e na compreensão da simbologia do objeto matemático, uma vez que esses quesitos funcionam como *elementos de transição*. Dessa forma, investigar a existência de *elementos de transição* e de *elementos de ruptura* nessa obra foi um exercício de grande relevância para a nossa investigação.

4.2.2 Livro II: Cálculo Vol. I – James Stewart (2015)

Stewart (2015, p. 470) introduz sua abordagem pontuando que na definição de integral definida $\int_a^b f(x)dx$, presumiu $f(x)$ sem descontinuidade infinita e definida no intervalo [a, b]. O autor afirma que estenderá o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo de integração é infinito e o caso em que a função tem uma descontinuidade infinita no intervalo [a, b]. Stewart (2015) passa a nominar a integral em ambos os casos de *integral imprópria*.

O referido autor trata primeiro das integrais impróprias com intervalos de integração infinitos e apresenta a função $y = \frac{1}{x^2}$, considerando uma região que está sob essa curva, à direita da reta $x = 1$ e acima do eixo x, conforme pode ser visualizado na Figura 17.

Figura 17 - Exemplo de Integral Imprópria



Fonte: Stewart (2015, p. 470)

O autor comenta que o leitor poderia pensar que a área da região tem extensão infinita, mas faz um convite para olhar com um maior cuidado, afirmando que a área destacada sempre será menor que 1, independentemente de t assumir valores crescentes. Ainda afirma que a área da região tende a 1, na medida em que $t \to \infty$, ou seja, $\lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$. Stewart (2015, p. 470) também utiliza a seguinte simbologia: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1$.

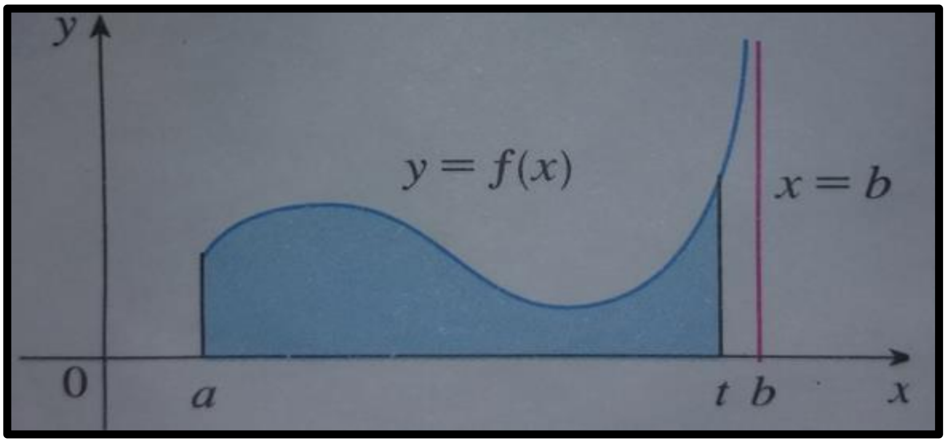
Utilizando o exemplo anterior como referência, Stewart (2015) apresenta a seguinte definição para integrais impróprias com intervalos infinitos:

> (a) Se $\int_a^t f(x)dx$ existe para cada número $t \geq a$, então $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ desde que o limite exista (como um número). (b) Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para cada número $t \leq b$, então $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ desde que o limite exista (como um número). As integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem. Se ambas $\int_a^{\infty} f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ são convergentes, então definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$. Na parte (c) qualquer número real a pode ser usado. (STEWART, 2015, p. 471).

Ainda referente à definição atinente a integrais com intervalos de integração infinitos, Stewart (2015) esclarece que as integrais definidas nos itens (a), (b) e (c) da citação anterior, podem ser interpretadas como uma área de uma região, quando $f(x)$ for uma função positiva.

Após apresentar, algumas ilustrações concernentes às integrais impróprias com intervalos de integração infinito, Stewart (2015) passa a discutir sobre as IGs com integrandos descontínuos. Para isso, supõe uma função positiva e continua no intervalo $[a, b)$ com uma assíntota vertical em b, considera também uma região acima do eixo x, delimitada pela curva de $f(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme ilustrada na Figura 18. Stewart (2015, p. 473 - 474) esclarece que a área da região destacada de azul será dada como $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, sendo que $A(t)$ se aproxima de um valor numérico quando t tende a b pela esquerda e estabelece a seguinte igualdade $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$.

Figura 18 – Ilustração para compreensão da definição de Integral Imprópria com intervalo infinito



Fonte: Stewart (2015, p. 473).

No caso das IDPs, a noção geométrica da integral de parâmetro como uma contribuição de área se mantém. Dessa forma, identificamos um *elemento de transição* que se evidencia na representação geométrica nesses tipos de integrais.

Na mesma seção, Stewart (2015) apresenta a definição seguinte, que é atinente ao caso de integrais impróprias com descontinuidade infinita em um dos extremos do intervalo de integração:

> (a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ se esse limite existir (como um número). (b) Se f é contínua em (a, b] e descontínua em a, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$ se esse limite existir (como um número). A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada convergente se o limite correspondente existir e divergente se o limite não existir. (c) Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambas as integrais impróprias $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então definimos $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (STEWART 2015, p. 474).

Stewart (2015, p. 476) também apresenta um teste de comparação para integrais generalizadas e expõe o seguinte teorema: “Suponha que f e g sejam funções contínuas com

$f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$. (a) Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente. (b) Se $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente."

O autor omite a demonstração do teorema, mas apresenta um comentário que o faz parecer plausível à compreensão do leitor.

Percebemos que para a abordagem das IDPs, as ideias das definições de IGs apresentadas podem ser generalizadas, visto que conceitos semelhantes para o critério de convergência/divergência podem ser aplicados no caso das Integrais Dependentes de Parâmetros. Neste caso, novamente identificamos *elementos de transição* nas definições expostas pelo autor.

A inspeção nessa obra nos permite antecipar que os sujeitos participantes da pesquisa terão facilidade em compreender os conceitos estudados no contexto das IDPs e se adaptar a simbologia do objeto matemático, pois esses pontos funcionam como *elementos de transição*. Esse prognóstico será de grande utilidade no momento de elaboração das sequências didáticas de ensino que serão aplicadas da fase de experimentação de nossa investigação.

4.2.3 Livro III: Cálculo Vol. I – Guidorizzi (2014)

Guidorizzi (2014), no capítulo 3 do volume 2 de seu livro, "Um curso de cálculo", apresenta extensões do conceito de integral e trata das integrais impróprias. No inicio da abordagem, o referido autor explicita seu interesse em dar significado aos símbolos $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ e define uma IG de uma função estendida ao intervalo $[a, +\infty[$ como um limite por meio da seguinte igualdade: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$. Para tanto, o autor considera a função $f(x)$ integrável no intervalo fechado $[a, t]$ para todo $t > a$. Posteriormente, esclarece que, se o limite for finito, a integral converge e, se ocorrer de $\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\infty$ ou $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ ou de o limite não existir, a integral diverge.

O autor, ao supor também, uma função $f(x)$ positiva em $[a, +\infty[$ e integrável em um intervalo $[a, t]$, para $t > a$, define a área de uma região A como uma integral imprópria com intervalo infinito de integração, pela seguinte igualdade: $área\ A = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, onde A é o conjunto composto pelos pontos (x, y) para os quais $0 \leq y \leq f(x)$ e $x \geq a$.

Guidorizzi (2014), ainda se referindo às integrais impróprias com intervalos infinitos de integração, apresenta mais duas definições atinentes a esse tipo de IGs. O autor ao considerar uma função $f(x)$ integrável em $[t, a]$ para todo $t < a$, define a integral imprópria para a função estendida ao intervalo $]-\infty, a]$ pela igualdade: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx$ e para f integrável em $[-t, t]$, $\forall t > 0$, define $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ desde que as integrais $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ e $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ sejam convergentes.

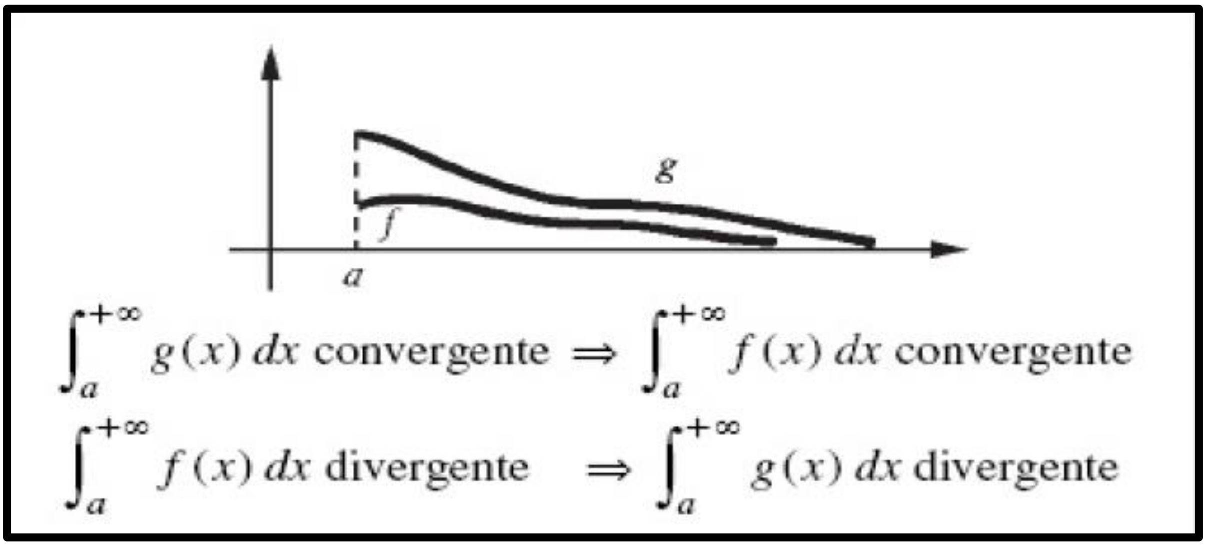
Em outra seção do capítulo, Guidorizzi (2014) alude sobre as integrais impróprias com descontinuidade infinita em um dos extremos do intervalo de integração e, apresenta a seguinte definição:

> Seja f não limitada em $]a, b]$ e integrável em $[t, b]$ para todo t em $]a, b[$. Definimos $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a^{+}} \int_{t}^{b} f(x)dx$ desde que o limite exista e seja finito. O número $\int_{a}^{b} f(x)dx$ denomina-se integral impropria de f em $[a, b]$. Se o limite for $+\infty$ ou $-\infty$, continuaremos a nos referir a $\int_{a}^{b} f(x)dx$ como uma integral impropria e escreveremos $\int_{a}^{b} f(x)dx = +\infty$ ou $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\infty$, conforme o caso. Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é divergente. Se o limite for finito, diremos que a integral impropria é convergente. (GUIDORIZZI, 2014, p.37).

Novamente identificamos *elementos de transição* nas definições apresentadas. As definições de convergência/devergência para IGs possuem significados semelhantes do caso das IDPs.

Na seção seguinte, Guidorizzi (2014) estabelece o critério de comparação para Integrais Impróprias que é ilustrado na Figura 19.

Figura 19 - Ilustração para o critério de comparação de Integrais Impróprias



Fonte: Guidorizzi (2014, pg. 39)

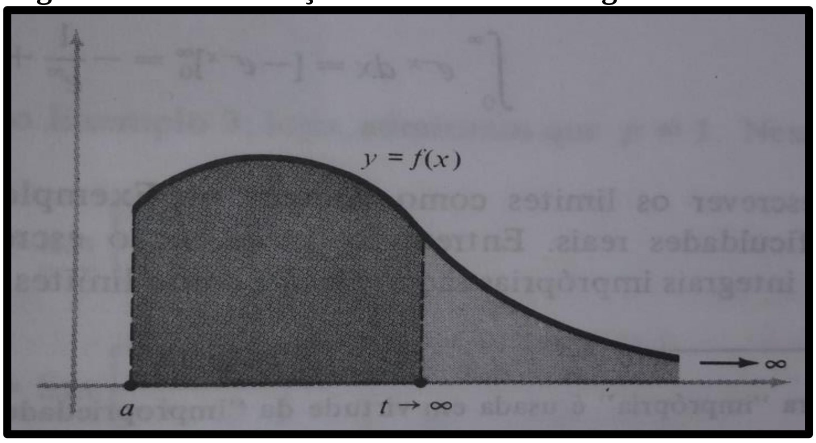
O autor institui que para f e g funções integráveis em um intervalo fechado $[a, t]$, para todo $t > a$ e $x \geq a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ se a integral $\int_a^\infty g(x)dx$ converge então $\int_a^\infty f(x)dx$ também converge, por outro lado, se $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge consequentemente a integral $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Por meio da inspeção desse livro, assim como nas obras anteriores, podemos antecipar que os estudantes participantes da pesquisa possivelmente não manifestarão entraves na aprendizagem das IDPs, uma vez que os conceitos trabalhos no campo das IGs possuem o mesmo sentido no contexto das IDPs e a simbologia se mantém, pois funcionam como *elementos de transição*. Por meio dessa conclusão podemos antever os possíveis comportamentos dos alunos quando estiverem explorando o contexto das IDPs na fase da experimentação.

4.2.4 Livro IV: Cálculo com Geometria Analítica – Simmons (1987)

Simmons (1987) considera inicialmente a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ supondo a função integrante ilimitada e contínua no intervalo $[a, \infty[$ e define, assim como os demais autores, a integral imprópria pela igualdade $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$, afirmando ser a integral convergente quando o limite existe e tem um valor finito e divergente, em caso contrário. O autor esclarece que a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ pode ser interpretada como a contribuição de área de uma região ilimitada, quando $f(x) \geq 0$, conforme a ilustração da Figura 20.

Figura 20 - Contribuição de área de uma região ilimitada I



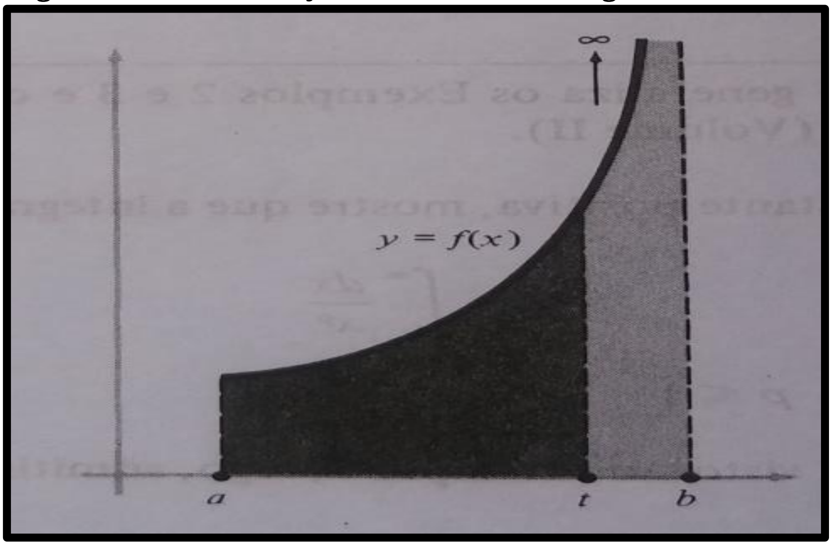
Fonte: Simmons (1987, pg. 577)

Se a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ convergir quando $t \to \infty$, então a área da região será finita e quando $\int_a^\infty f(x)dx$ divergir, a contribuição de área será infinita.

Após apresentar algumas ilustrações para o primeiro tipo de IGs, Simmons (1987) passa a considerar o segundo tipo de integrais impróprias. O autor apresenta a ilustração da Figura 21 e faz a seguinte averbação:

> Nesse caso podemos integrar de a a um limite superior variável t menor que b. Essa integral é uma função de t e podemos agora perguntar se essa função tem limite quando t tende a b. Se for assim, usamos esse limite como definição da integral impropria de $f(x)$ de a a b: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx$. Como anteriormente, essa integral chama-se convergente, se o limite existe e é finito, e divergente, caso contrário. (SIMMONS, 1987, pg. 580-581)

Figura 21 - Contribuição de área de uma região ilimitada II



Fonte: Simmons, (1987, pg. 580)

As definições formais expostas podem ser generalizadas para a teoria das Integrais Dependentes de Parâmetros. Dessa forma, são identificadas na abordagem desse material didático, elementos que podem atuar como *elementos de transição* na passagem de IGs para as IDPs.

4.2.5 Livro V: Cálculo Diferencial e Integral – BOULOS (1999)

Boullos (1999) inicia sua abordagem apresentando a seguinte definição para integrais impróprias com intervalo infinitos de integração:

> (a) Sendo f continua em $[a, \infty[$, define-se $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$, supondo que o limite existe, caso em que se diz que a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é convergente; se o limite não existe, diz-se que a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é divergente. (b) Sendo f contínua em $]-\infty, b]$, define-se $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$, supondo que o limite existe, caso em que se diz que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ é convergente; se o limite não existe, diz-se que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ é divergente. (BOULLOS, 1999, pg. 360)

Boullos (1999) também define a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$ para um valor c. Quando as integrais do segundo membro da igualdade são convergentes, a integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ é convergente e divergente se as integrais $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ e $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ forem divergentes. O autor também trata das integrais com integrandos não-limitados e expõe a seguinte definição:

> (a) Se f é contínua em $[a, c[$ e tende a ∞ ou a $-\infty$ se x tende a c pela esquerda, define-se $\int_a^c f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx$. (b) Se f é contínua em $]c, b]$ e tende a ∞ ou a $-\infty$ se x tende a c pela direira, define-se $\int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$. (c) Sendo $a < c < b, f$ como em (a) e em (b), define-se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (BOULLOS, 1999, p. 363)

As definições apresentadas possuem significados semelhantes no contexto das IGs e IDPs e a simbologia se mantem nos dois planos de estudo, logo são identificados *elemento de transição* nas definições apresentadas.

Para as cinco obras didáticas analisadas, enfatizamos que um elemento que se evidencia diferentemente na abordagem de IGs, em relação às IDPs, diz respeito à existência do parâmetro no trato das classes de funções particulares nas IDPs. A existência do parâmetro pode atuar como um *elemento de ruptura* na compreensão do conceito da integral do segundo tipo.

Identificar os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* nas obras investigadas foi de muita importância para essa investigação, uma vez que por meio dos elementos encontrados, podemos prognosticar os possíveis entraves que os alunos podem manifestar no estudo de Integrais Dependentes de Parâmetros, ou mesmo antecipar os pontos em os participantes não manifestarão dificuldades na passagem do contexto das IGs para as IDPs.

Essa parte de nossa inquirição foi fundamental para a construção e delineamento das sequências didáticas de ensino pelo fato de nos auxiliar nas análises *a priori* da Engenharia

Didática, pois nessa etapa temos que prever determinados comportamentos dos alunos quando estes estiverem desenvolvendo as atividades propostas na fase da experimentação.

4.3 Critérios de convergência para Integrais Generalizadas

Na presente seção abordaremos alguns critérios de convergência para a noção de Integrais Impróprias ou Integrais Generalizadas. O caráter de imprescindibilidade aqui se justifica, na medida em que, no contexto da TINC, notamos vários elementos desconsiderados ao decurso da trajetória de estudos acadêmicos, com início nas Integrais Definidas. Assim, tendo em vista a quase escassez de critérios explorados por parte dos autores de livros de Cálculo e, a fim de proporcionar uma teorização mais robusta para a nossa pesquisa, realizaremos a discussão do objeto IDPs e apresentaremos alguns resultados formais correspondentes à teoria de integrais generalizadas.

Proposição 4.3.1: Seja $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa. A integral imprópria$\int_a^\infty f(x)dx$ converge se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $\int_a^x f(t)dt \leq k,$ para todo $x \in [a, \infty)$.

Demonstração: Seja $g(x) = \int_a^x f(t)dt,$ crescente no intervalo $[a, +\infty[$. Considerando x_1 e x_2 números reais quaisquer, tais que $a \leq x_1 \leq x_2$. Assim: $g(x_2) - g(x_1) = \int_a^{x_2} f(x)dx - \int_a^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \geq 0$. Logo, para quaisquer valores de x_1 e x_2 no intervalo $[a, \infty)$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$. Portanto, $g(x)$ é crescente no intervalo $[a, \infty)$. Dessa forma, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ou será finito ou $+\infty$.

($\Rightarrow$)Se ocorrer de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ser finito, ou seja, se $\int_a^\infty f(x)dx$ converge então, $g(x)$ é limitada superiormente, dessa forma deve existir um $k > 0$ tal que $\int_a^x f(x)dx \leq k$, ($\Leftarrow$) Por outro lado se existe $k > 0$ tal que $\int_a^x f(x)dx \leq k$, consequentemente $g(x)$ deverá ser limitada superiormente, logo será convergente.■

Teorema 4.3.1 (Critério da comparação)**:** Sejam $f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ contínuas. Se existe $k > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq kg(x)$, para todo $x \geq a$, então: (i)$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. (ii) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Demonstração: Parte (i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, pela proposição 3.2.1, existe $k_1 > 0$ tal que $\int_a^x g(x)dx \leq k_1$, para todo $x \in [a, \infty)$. Pela hipótese $0 \leq f(x) \leq kg(x)$, assim $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq k\int_a^{+\infty} g(x)dx \leq k.k_1$, concluímos que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é limitada, o que implica em sua convergência. Parte (ii): Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, como $f(x)$ é não negativa e não decrescente, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é ilimitada superiormente e tenderá ao infinito. Como $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq k\int_a^{+\infty} g(x)dx$, depreendemos comportamento análogo para $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, logo também é divergente. ∎

Um teorema análogo é válido para o caso de integrais improprias com integrandos descontínuos.

Definição 4.3.1 (Convergência absoluta de Integrais impróprias com integrandos descontínuos): Diz-se que integral $\int_a^b f(x)dx$ é absolutamente convergente se a integral $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Teorema 4.3.2: Seja $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, se $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)dx$ também converge.

Demonstração: Inicialmente vamos definir a parte positiva e a parte negativa da função $f(x)$. Dessa forma, sejam $f_+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \geq 0$ (I) e $f_-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \geq 0$ (II). Das duas igualdades temos que $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Como $f_+(x)$ e $f_-(x)$ são positivas, verificamos que $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \geq f_+(x) \Rightarrow f_+(x) \leq |f(x)|$ e $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \geq f_-(x) \Rightarrow f_-(x) \leq |f(x)|$. Subtraindo (I) de (II) obtemos que $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Assim: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f_+(x) - f_-(x)]\, dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$. Pela hipótese do teorema, a integral $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, isso implica pelo critério de comparação, na convergência de $\int_a^b f_+(x)dx$ e de $\int_a^b f_-(x)dx$, o que resulta na convergência de $\int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$. Logo concluímos que $\int_a^b f(x)dx$ converge. ∎

Definição 4.3.2 (Convergência absoluta de Integrais impróprias com intervalos infinitos): A integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é denominada de absolutamente convergente se a integral $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ convergir.

Teorema 4.3.3: Seja $f(x)$ definida no intervalo $[a,\infty[$ e integrável em $[a,t], \forall t > a$, se $\int_a^\infty |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ também converge.

A prova desse teorema será omitida, uma vez que sua demonstração é análoga à prova do teorema anterior no caso de integrais impróprias com integrandos descontínuos.

Proposição 4.3.2: Sejam $f, g: [a,\infty[\to \mathbb{R}$ funções positivas e integráveis no intervalo $[a,x], \forall x > a$. Se existirem as constantes positivas x_1 e x_2 tais que: $x_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq x_2, \forall x > a$, então ambas $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ convergem ou ambas divergem.

Demonstração: Por hipótese $x_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq x_2, \forall x > a$, então verificamos que $x_1 g(x) \leq f(x) \leq x_2 g(x) \Rightarrow \int_a^\infty x_1 g(x)dx \leq \int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty x_2 g(x)dx$. Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, pelo critério da comparação, a integral $\int_a^\infty x_1 g(x)dx$ terá o mesmo comportamento, logo $\int_a^\infty g(x)dx$ também convergirá. Da mesma forma, se $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty x_2 g(x)dx$ também converge. Logo, novamente pelo critério da comparação $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, uma vez que $\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty x_2 g(x)dx$. Agora, se $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente, pelo critério da comparação, a integral $\int_a^\infty x_2 g(x)dx$ também diverge, logo $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente. Se $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge então $\int_a^\infty x_1 g(x)dx$ também diverge e pelo critério da comparação $\int_a^\infty f(x)dx$ também deve divergir pelo fato de $\int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty x_1 g(x)dx$. ■

Teorema 4.3.4 (Teste do quociente ou critério do limite): Sejam $f, g: [a,\infty[\to \mathbb{R}$ funções integráveis no intervalo $[a,x], \forall x > a$, onde $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$. (i) Se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ ou ∞, então ambas as integrais $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ convergem, ou ambas divergem. (ii) Se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.(iii) Se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ e se $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Demonstração: (i) Seja $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ pela definição de limite, para todo $\in > 0$ deve existir um $N > 0$ tal que se $x > N$ então $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \in \Leftrightarrow$ se $x > N$ então $L - \in < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \in$. Caso (i):

Tomemos $\in = \frac{L}{2}$, assim se $x > N$ então $\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$. Do segundo membro da desigualdade $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{3L}{2} g(x)$. Se $\int_a^\infty g(x)dx$ for convergente, então $\int_a^\infty \frac{3L}{2} g(x)dx$ também o será. Segue da desigualdade $f(x) < \frac{3L}{2} g(x)$ e do critério de comparação que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Do primeiro membro da desigualdade, ou seja, de $\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) < \frac{2}{L} f(x)$. Se $\int_a^\infty f(x)dx$ for convergente, então $\int_a^\infty \frac{2}{L} f(x)dx$ também o será. Do critério de comparação e da desigualdade $g(x) < \frac{2}{L} f(x)$ segue que $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente. Se $\int_a^\infty g(x)dx$ for divergente, vamos supor por contradição que $\int_a^\infty f(x)dx$ seja convergente, assim pela desigualdade $g(x) < \frac{2}{L} f(x)$, $\int_a^\infty \frac{2}{L} f(x)dx$ também será convergente, logo pelo critério da comparação, $\int_a^\infty g(x)dx$ também o será, o que contradiz a hipótese, logo $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge. Da mesma forma, se $\int_a^\infty f(x)dx$ for divergente, vamos supor por contradição que $\int_a^\infty g(x)dx$ seja convergente, assim pela desigualdade $f(x) < \frac{3L}{2} g(x)$, e pelo critério da comparação verificamos que $\int_a^\infty f(x)dx$ deve convergir, mas tal comportamento contradiz a hipótese, portanto $\int_a^\infty g(x)dx$ deve também divergir.

(ii) Sendo $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, novamente pela definição de limite, para todo $\in > 0$ deve existir um $N > 0$ tal que se $x > N$ então $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \in \Leftrightarrow$ se $x > N$ então $L - \in < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \in$, mas como nesse caso $L = 0$ e tomemos $\in = 1$, assim se $x > N$ então $-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$, como as funções são positivas segue que $f(x) \le g(x)$. Assim se $\int_a^\infty g(x)dx$ for convergente, então pelo critério de comparação, $\int_a^\infty f(x)dx$ também o será.

(iii) Como $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, existe um número $M > 0$ tal que $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ ou equivalentemente a $f(x) > g(x)$ se $x > M$, logo se $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ também diverge. ■

OBS: Um critério semelhante é válido para o caso de integrais improprias com integrandos descontínuos.

Teorema 4.3.5 (Teorema do sanduiche para integrais impróprias): Supondo que $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções localmente integráveis, $\forall x \epsilon [a, \infty)$ e que $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Se as integrais $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty h(x)dx$ são convergentes, então $\int_a^\infty g(x)dx$ também converge.

Demonstração: Admitindo que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, temos que a desigualdade: $0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$. Veja que pode ser estabelecida a seguinte desigualdade $0 \leq \int_a^\infty [g(x) - f(x)]dx \leq \int_a^\infty [h(x) - f(x)]dx$. Como por hipótese as integrais $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty h(x)dx$ convergem, então a integral $\int_a^\infty [h(x) - f(x)]dx$ também convergirá e pelo critério da comparação $\int_a^\infty [g(x) - f(x)]dx$ converge. Veja também que:

$\int_a^\infty g(x)dx = \int_a^\infty [g(x) - f(x) + f(x)]dx = \int_a^\infty [g(x) - f(x)]dx + \int_a^\infty f(x)dx.$

Mas $\int_a^\infty [h(x) - f(x)]dx$ converge e $\int_a^\infty f(x)dx$ por hipótese também converge, portanto $\int_a^\infty g(x)dx$ também convergirá. ■

Teorema 4.3.6 (Critério de Cauchy): Seja $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ em que suas restrições $f|[a, r]$ são integráveis $\forall r > a$. Assim, a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ convergirá se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$ existir um número $K > 0$ e $B > A > K$ de forma que $\left|\int_A^B f(x)\right| < \varepsilon$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, seja $L \epsilon \mathbb{R}$ o valor numérico para o qual a integral converge. Pela definição de convergência, $\forall \varepsilon > 0$, existe um número $K \geq a$, suficientemente grande, de modo que se $A \geq K$, então $\left|\int_a^A f(x)dx - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Veja que para $B > A \geq K$, tem-se: $\left|\int_A^B f(x)\, dx\right| = \left|\int_a^B f(x)dx - \int_a^A f(x)dx - L + L\right| = \left|(\int_a^B f(x)dx - L) + (L - \int_a^A f(x)dx)\right| \leq \left|\int_a^B f(x)dx - L\right| + \left|\int_a^A f(x)dx - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

($\Leftarrow$) Para $n \epsilon \mathbb{N}$, seja $x_n = \int_a^n f(x)dx.$ Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um $m \geq a$ de modo que se $m, n \geq K$. Veja que $|x_m - x_n| = \left|\int_a^m f(x)dx - \int_a^n f(x)dx\right| = \left|\int_m^n f(x)dx\right| < \varepsilon$. Mas perceba que $\{x_n\}_{n \epsilon \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, logo é convergente. ■

Teorema 4.3.7 (Teste de Dirichlet para integrais impróprias): Sejam $f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$, onde f e g apresentam as seguintes particularidades:

$i)$ f é monótona, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ e f' é integrável em $[a, x], \forall x > a$.

ii) g é contínua e $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ limitada, com $G: [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Admitindo essas particularidades, temos que a integral $\int_a^\infty f(x). g(x)dx$ é convergente.

Demonstração: Consideremos a integral $\int_a^c f(x). g(x)dx$, para $c > a$ e $c \in [a, b]$ Assim, dado o intervalo fechado [a,b], pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $b \in [a, b]$, de modo que: $\int_a^c f(x).g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_b^c g(x)dx$. Como $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ é limitada, escrevemos:

$$\int_a^c f(x).g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_b^c g(x)dx \leq \int_a^c f(x).g(x)dx$$
$$= f(a).M + f(b).M$$

Assim, $\int_a^c f(x).g(x)dx \leq [f(a) + f(b)].M$, mas como de (i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, podemos ter: $[f(a) + f(b)] < \frac{\varepsilon}{M}$, dessa forma, $\int_a^c f(x).g(x)dx < \varepsilon$. ■

De acordo com Alves (2013), temos o seguinte teste para integrais impróprias que será enunciado neste trabalho como um teorema.

Teorema 4.3.8 (Teste de Abel): Sejam f e g definidas no intervalo $I = [a, \infty)$ se: (i) g é monótona e limitada em I e (ii) a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, então a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ é convergente. (Alves, 2013, p. 8).

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, como por (i) g é limitada, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M, \forall x \in [a, \infty)$. Por (ii), a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Também pelo Critério de Cauchy, $\exists A > 0$, tal que $t_1, t_2 > A$. Assim: $\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Tomando $t_1, t_2 > A$, pelo teorema do Valor Médio para integrais, existe entre t_1 e t_2, um $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$\int_{t_1}^{t_2} f(x).g(x)dx = g(t_1)\int_{t_1}^{c} f(x)dx + g(t_2)\int_{c}^{t_2} f(x)dx$. Assim:

$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x).g(x)dx\right| \leq |g(t_1)|.\left|\int_{t_1}^{c} f(x)dx\right| + |g(t_2)|.\left|\int_{c}^{t_2} f(x)dx\right| < |g(t_1)|.\frac{\varepsilon}{2M} + |g(t_2)|.\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$. ■

Finalizamos aqui o nosso universo de dados que constituem as análises preliminares da nossa proposta de ED. Doravante, com arrimo da perspectiva adquirida nessa investigação, deflagraremos a seção subsequente que visa um esforço em delinear um universo estruturado com concepção de um roteiro de intervenção em sala de aula. Passaremos, então, para a etapa de análise *a priori*.

5 ANÁLISE A PRIORI E EXPERIMENTAÇÃO

Lembremos que segundo Almouloud (2007, p. 175) “o objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido”. Em nossa investigação, abordamos as variáveis microdidáticas, ou seja, as variáveis relacionadas à organização, planejamento e execução das sequências de ensino em sala de aula.

Em nossa pesquisa, destacamos como variáveis microdidáticas, os elementos de organização de nossas sequências de ensino, o conhecimento dos possíveis obstáculos, a descrição do local de aplicação do estudo, bem como a constituição da amostra de sujeitos participantes da pesquisa. Dessa forma, na presente seção, buscaremos enfatizar a discussão em torno dessas variáveis, por meio das quais delineamos a concepção das sequências de ensino, referentes a IGs e IDPs.

Além de discutir as variáveis microdidáticas de uma ED escolhidas para esta investigação, nessa seção ainda detalharemos o desenvolvimento da experimentação das sequências de ensino aplicadas ao público-alvo no campo de execução. Recordamos que a fase de experimentação conforme Almouloud (2007, p. 177) “é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise *a priori*.”

5.1 Caracterização do lócus da investigação

A presente Investigação foi desenvolvida em uma turma da disciplina de Cálculo II, do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará do Campus CEDRO/CE. Essa Instituição de ensino tem 21 anos de funcionamento e oferece, além do Ensino Médio Integrado, Cursos técnicos em Eletrotécnica, Mecânica Industrial e Eletrotécnica na modalidade EJA (Educação de jovens e Adultos). Quanto ao nível superior, o IFCE Campus Cedro oferece os cursos de Tecnologia em Mecatrônica Industrial, Licenciatura em Matemática, Sistema de Informação e Licenciatura em Física.

O curso de Licenciatura em Matemática foi implantado no ano de 2004. O seu Projeto Pedagógico, enfatiza, entre os objetivos e competências propostos, o desenvolvimento de habilidades atreladas à utilização de recursos computacionais para o ensino de Matemática, bem como a exploração de situações problemas que proporcionem aos estudantes criarem conjecturas e fazerem generalizações utilizando a tecnologia como uma ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

O referido *campus* possui um laboratório de Matemática e um laboratório de informática exclusivo para o curso de Licenciatura em Matemática, o que facilita o trabalho de professores que têm interesse em trabalhar com os recursos computacionais em suas aulas.

Apesar do Projeto do curso preconizar a utilização de recursos da tecnologia para ampliar as possibilidades de aprendizagem em Matemática, percebemos que geralmente as disciplinas específicas do curso de Licenciatura em Matemática, no *campus* de Cedro-CE, são ministradas de forma tradicional com uma abordagem que enfatiza especificamente os aspectos lógicos formais dos conteúdos.

A experimentação da presente investigação, assentada nos elementos característicos de uma ED, foi desenvolvida no interior da disciplina de Cálculo II, que assim como as demais disciplinas do curso citado, sua abordagem é centrada em aulas expositivas, com o predomínio do trato analítico dos conteúdos. Essa disciplina, apresenta a seguinte configuração dos seus conteúdos:

> **Unidade I**: Introdução à Integração: Propriedades da integral indefinida; tabelas de integrais imediatas; método da substituição; método da integração por partes; área, integral definida; teorema fundamental do Cálculo.
> **Unidade II**: Métodos de Integração: Integração de funções trigonométricas; fórmulas de redução e/ou recorrência; integração por substituição trigonométrica; integração de funções racionais por frações parciais; integrais envolvendo expressões da forma $a \neq 0$.
> **Unidade III**: Aplicações da Integral Definida: Comprimento do arco de uma curva (usando a equação cartesiana); área de região plana; volume de um sólido de revolução: métodos do disco circular, anel circular, invólucro cilíndrico e do corte.
> **Unidade IV:** Coordenadas Polares: Gráfico em coordenadas polares; comprimento do arco em coordenadas polares, áreas de figuras planas em coordenadas polares.
> **Unidade V:** Formas indeterminadas e integrais impróprias: A forma indeterminada 0/0 e outras formas indeterminadas; integrais impróprias com limites infinitos de integração e outras integrais impróprias.
> Integração; Métodos de integração; Aplicação das integrais; Coordenadas Polares; Formas indeterminadas e integrais impróprias. (PROJETO PEGADÓGICO, IFCE – *Campus* Cedro, p. 134).

Como podemos perceber pela configuração anterior, a ementa da disciplina Cálculo II, assim como os livros de Cálculo, de forma geral, não apresentam uma abordagem relativa às Integrais Dependentes de Parâmetros, restringindo sua apreciação até as Integrais Generalizadas. Porém, ressaltamos a importância da abordagem das IDPs em um curso de Cálculo II, uma vez que esse conteúdo no processo de transição de integrais é um tópico intermediário que está compreendido entre as IGs e as integrais de funções de mais de uma variável. A ausência de sua abordagem pode promover um entrave na aprendizagem dos estudantes quando estiverem na disciplina de Cálculo III. Porém essa questão foge do contexto de nossa pesquisa, podendo ser estudada em investigações futuras.

5.2 Os sujeitos da pesquisa

O público-alvo de nossa investigação foi constituído por estudantes regularmente matriculados na disciplina de Cálculo II, no quarto semestre do Curso de Licenciatura em Matemática do IFCE - *Campus* Cedro, no ano de 2016, semestre letivo 2016.1. Os referidos alunos estavam cursando pela primeira vez a disciplina Cálculo II e foram instigados a participar, de forma voluntária, das sequências de ensino atinentes a IGs e IDPs. Inicialmente, comunicamos aos estudantes as nossas intensões com a pesquisa, esclarecemos os objetivos da investigação e após explicar como transcorreria a execução das atividades, convidamos a turma para participar da experimentação.

Cada estudante assinou um termo de compromisso, conforme anexo B, confirmando a ciência em participar do trabalho e, concordando com a divulgação dos dados coletados nesta dissertação e também em publicações futuras.

Quanto à turma escolhida para a pesquisa, esta era composta por 04 estudantes, sendo que 01 (um) dos alunos, por motivos pessoais, desistiu de cursar a disciplina, ficando para compor a amostra de nossa investigação um total de 03 discentes. A decisão da escolha por essa turma se justifica pelo motivo de ser no interior da disciplina de Cálculo II que é ministrado o conteúdo de integrais generalizadas. Os sujeitos participantes da pesquisa serão identificados por Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3, para que a privacidade de suas identidades seja preservada.

Na seção seguinte descrevemos as situações didáticas que foram aplicadas na fase de experimentação e posteriormente explicamos o desenvolvimento das atividades de nosso experimento.

5.3 Construção e descrição das situações para o ensino das IGs

Nesta seção, apresentaremos as análises *a priori* das sequências de ensino previamente elaboras de acordo com as dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. Para elaborar as situações-problema estivemos em consonância com a perspectiva de Almouloud (2007, p. 174) ao afirmar que “as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos”.

Nessa etapa da pesquisa, ressaltamos que as situações didáticas foram elaboradas com o arrimo do *software* GeoGebra[2], com o intuito de prever determinados comportamentos dos estudantes, também pensando em estratégias para intermediar situações diversas que poderiam surgir no decorrer da aplicação das sequências de ensino.

Enfatizamos também que as sequências didáticas foram pensadas com a intenção de promover um ambiente em que os estudantes pudessem agir por si mesmos, uma vez que segundo Almouloud (2007) as situações didáticas devem ser suscetíveis de provocar nos alunos a aprendizagem.

Situação-problema I: Discutir em torno da convergência/divergência das integrais $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

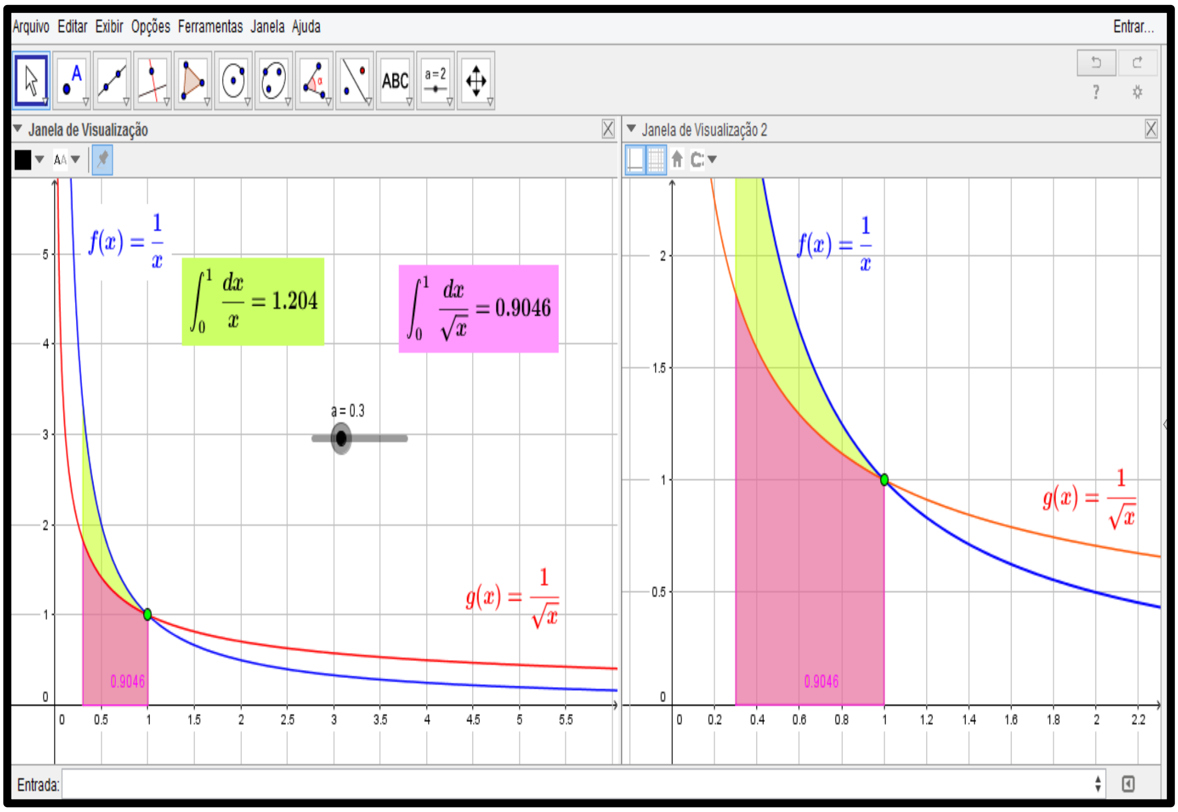
A atividade esperada dos estudantes, envolve a discussão em torno da convergência/divergência das integrais $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Com arrimo da construção da Figura 22, o debate dos alunos deverá mobilizar os quadros gráfico-geométricos e numérico do GeoGebra. Os dados numéricos e a construção dinâmica com o *software* deverão estimular a verificação formal com o modelo matemático subjacente, inclusive o confrontamento dos dados.

Situação de ação: Os alunos devem explorar o comportamento numérico e geométrico das integrais e serem estimulados a comparar desigualdades do tipo $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x}$. Tal desigualdade deverá ser extraída da construção geométrica, exposta na figura 22. Outro fator a ser instigado com os estudantes diz respeito ao motivo das escolhas dos limites de integração $\int_?^? \frac{dx}{x}$ e $\int_?^? \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e a justificativa de lidarem com uma IG e não com integrais definidas. Os estudantes podem depreender, por meio da visualização das contribuições de área, o

[2] O GeoGebra é um *software* dinâmico de Matemática que foi desenvolvido pelo professor da Universidade de Salzburg, Markus Hohenwarter, com o objetivo de dinamizar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos diferentes níveis de ensino. O GeoGebra reúne, em um único ambiente recursos de Álgebra, Cálculo e Geometria. Por meio das relações existentes entre suas janelas é possível visualizar, ao mesmo tempo, as representações geométricas e algébricas do objeto matemático estudado.

comportamento de convergência da integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e divergência de $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Também podem estabelecer o critério referente ao Teste da Comparação de Integrais Impróprias.

Figura 22 - Descrição visual da comparação entre as integrais $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$



Fonte: Construção nossa.

Situação de formulação: Nesta dialética, os estudantes buscarão por meio de uma linguagem própria ou matemática explicar o comportamento de convergência ou divergência das integrais. Poderão recorrer ao desenvolvimento analítico, apropriando-se de conhecimentos prévios sobre técnicas de integração para resolver as integrais apresentadas. Assim, utilizando a definição de integrais improprias, poderão verificar que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}(\int_t^1 x^{-1/2} dx) = \lim_{t\to 0^+} (2\sqrt{x})_t^1 = 2 - \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{t} = 2$. Uma vez que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{t} = 0$.

Já em relação à segunda integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, os alunos poderão constatar que $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+}(ln|x|)_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(-ln|t|) = +\infty$. Para compreender que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{t} = 0$ e que $\lim_{t\to 0^+}(-ln|t|) = +\infty$, eles, possivelmente, recorrerão a desenhos de gráficos ou à ferramenta da calculadora para observarem o comportamento dos limites à medida que a variável t tende a zero pela direita.

Situação de validação: Nesta fase, os alunos confrontarão os resultados encontrados com a visualização das construções do *software* com o desenvolvimento analítico produzido na dialética de formulação. Assim, podem decidir após fazerem a soma visual, pelo comportamento de convergência da integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e divergência de $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Poderão também justificar a aplicabilidade ou não do Teste de Comparação para Integrais Impróprias para essas IGs.

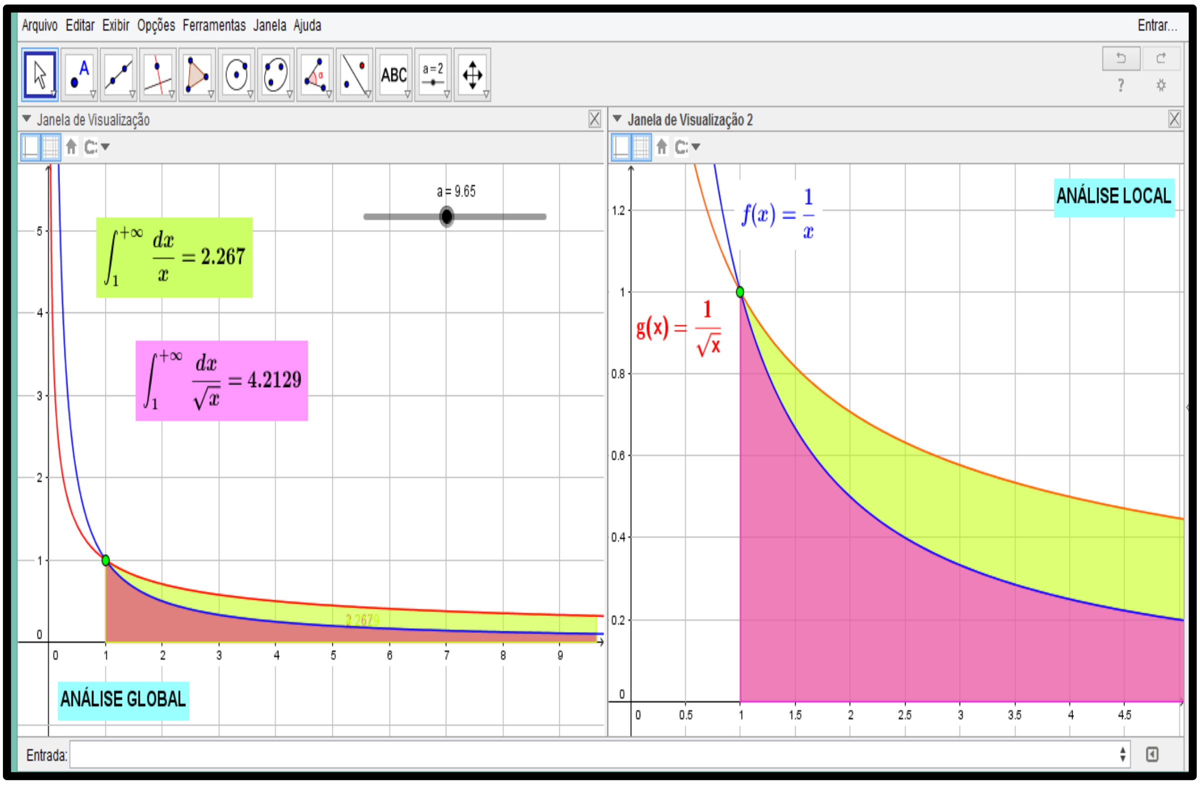
Situação de institucionalização: Para rematar a situação didática, instituiremos o conhecimento em jogo com a apresentação do Teste de Comparação para Integrais Impróprias com integrandos descontínuos.

Situação-problema II: Decidir o caráter de convergência e divergência das seguintes integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Nesta situação didática, os estudantes, deverão discutir o comportamento de convergência/divergência das integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e, assim como na atividade anterior, farão uso da construção do *software* GeoGebra exposta na Figura 23.

Situação de ação: Os alunos devem, como na situação-problema I, manipular o *software* GeoGebra, visualizando o comportamento geométrico e numérico das integrais. Na medida em que analisarem as contribuições de área das integrais, apresentadas na figura 23, serão estimulados a comparar a desigualdade $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ que, correlata ao caso anterior, deverá se inverter. Novamente, outro ponto a ser instigado com os alunos diz respeito à escolha dos limites de integração $\int_?^? \frac{dx}{x}$ e $\int_?^? \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e à justificativa de lidarem com uma Integral Generalizada. Posteriormente, por meio da visualização das contribuições de áreas das integrais, poderão concluir que as duas integrais divergem. Ao analisar a desigualdade $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, poderão conjecturar algum resultado referente ao teste de comparação para integrais desse tipo.

Figura 23 - Descrição visual da comparação entre as integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$



Fonte: Construção nossa

Situação de formulação: No que concerne ao desenvolvimento da dialética de formulação, o solucionador pode observar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_1^t x^{-1/2}dx\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(2\sqrt{x}\right)_1^t = +\infty$. Quanto à segunda integral, o estudante poderá verificar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} (ln|x|)_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty} (ln|t|) = +\infty$.

Situação de validação: Os alunos ao confrontar os resultados geométricos com o analítico poderão concluir que as contribuições de áreas das integrais tendem a aumentar quando x tender para $+\infty$. Consequentemente, conjecturar que os valores numéricos de área desse limite tendem, paulatinamente a crescer, com base no gráfico (cor roxa), como um caráter inerente ao comportamento de divergência.

Situação de institucionalização: O conhecimento será institucionalizado nessa dialética com a exposição e compreensão do Teste de Comparação para Integrais Impróprias com integrandos infinitos. Brousseau (1986, p. 342) comenta que “a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]", Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos que determinaram sua aparição.

5.4 Construção e descrição das situações para o ensino das IDPs

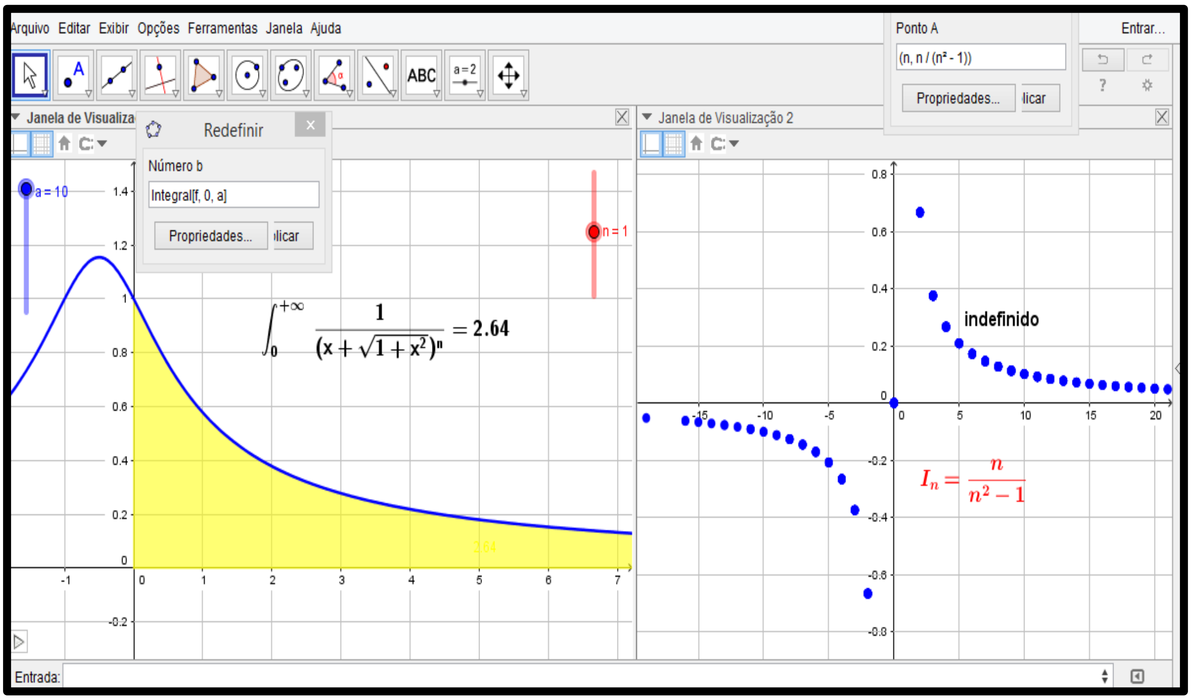
Na presente seção exploraremos situações-problema envolvendo a questão da convergência/divergência de certas IDPs. Vale acentuar o caráter de imprescindibilidade da readaptação das concepções e estratégias mobilizadas nas situações relativas ao contexto das IGs. Nesse sentido, em consonância com o que preconiza Alves (2011), relativamente aos elementos discutidos nos capítulos passados sobre a TINC, teremos condições de prever a mediação e exploração de *elementos de ruptura*.

Situação-problema III: Decidir o caráter de convergência ou divergência da seguinte integral $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx$ para todo índice inteiro não negativo.

Nessa situação didática, com arrimo na Figura 24, o estudante será instigado a uma análise pormenorizada da integral apresentada. Dessa forma, deverá identificar valores correspondentes de alguns índices em que não contamos com a convergência da integral apresentada.

Situação de ação: com origem em uma manipulação de seletores móveis do *software* GeoGebra, os alunos poderão depreender que as contribuições dinâmicas de área expostas na figura 24 (de cor amarela) tendem, paulatinamente, a decrescer, na medida em que $x \to +\infty$, para valores de $n \geq 1$. Ora, ao lado direito, mostraremos que $I_n = \frac{n}{n^2-1}$ e, com origem no rastro (na cor azul) definido no plano cartesiano por $\left(n, \frac{n}{n^2-1}\right) \in \mathbb{R}^2, (n, \frac{n}{n^2-1}) \in IR^2$, os estudantes poderão concluir que seus valores não assumem valores demasiadamente grandes, na medida em que $n \to +\infty$. Entretanto, podemos analisar, de modo particular, os valores iniciais de seu comportamento, com o auxílio da função rastro do GeoGebra (ponto na cor azul ao lado direito). Observamos, ainda, os valores numéricos assumidos pela integral. Com origem na exploração do modelo formal e do ambiente produzido pelo *software*, o professor deve instigar uma plenária de troca de informações entre os estudantes.

Figura 24 – Interpretação gráfico-numérico para a compreensão da integral
$$\boldsymbol{I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx}$$



Fonte: Construção nossa.

Situação de formulação: Assim como propõe Dana-Picard (2011), inicialmente os solucionadores podem estudar o comportamento de convergência/divergência da integral $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx$, para alguns valores de n, tais como $n = 0$ e $n = 1$. Para o primeiro caso, o aluno poderá verificar que: $I_0 = \int_0^{+\infty} dx = x|_0^{+\infty} = +\infty$ e assim decidir pelo comportamento de divergência da integral.

Já para o caso $n = 1$, ou seja, $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} dx$, pode recorrer à técnica de integração por substituição para solucionar a integral e, para tanto, pode considerar $x = senht \therefore dx = cosht$. O estudante pode recordar que $1 + senh^2t = cosh^2t \therefore cosht = \sqrt{1 + senh^2t}$. Substituindo esses resultados em I_1, constatará que $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{cosht}{senht+cosht} dt$. Mas pode ainda, considerar que: $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$. Assim: $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}} dt \therefore I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t+e^{-t}}{2e^t} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (1 + e^{-2t})dt \therefore I_1 = \frac{1}{2}(t - \frac{e^{-2t}}{2})\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4e^{2t}}\Big|_0^{+\infty} = +\infty$.

Novamente o aluno depreenderá que a integral, nesse caso, assume um comportamento de divergência. Posteriormente poderá analisar a condição restritiva de $n \geq 2$. De forma análoga ao caso anterior, pode fazer a substituição $x = senht \therefore dx = cosht$. Todavia, perceberá que $x \to 0$ quando $t \to 0$ e que $x \to +\infty$ quando $t \to +\infty$. Da igualdade $cosht = \sqrt{1 + senh^2 t}$, verificamos que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{(e^t)^n} dt \therefore$

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{t(1-n)} + e^{-t(1+n)}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n}e^{t(1-n)} - \frac{1}{1+n}e^{-t(1+n)}\right)_0^{+\infty} \therefore I_n = \frac{n}{n^2-1}, \forall n \geq 2.$$

Situação de validação: Os alunos confrontarão os resultados coligidos na dialética de ação com os resultados encontrados na fase de formulação. Por outro lado, por meio da visualização da construção no GeoGebra e também pelo desenvolvimento analítico poderão ser conduzidos ao entendimento da convergência da referida integral (para o caso de $n \geq 2$), na medida em que os mesmos podem visualizar, ao lado esquerdo, as contribuições tendencialmente decrescentes (na cor amarela). Ao lado direito, o comportamento esperado dos pontos do tipo $\left(n, \frac{n}{n^2-1}\right) \in \mathbb{R}^2$. E também, a partir da "soma visual" envolvendo a ação perceptual de coligir os dados exibidos nas duas janelas do *software* GeoGebra, os alunos poderão depreender o comportamento de divergência, quando exploramos os índices indicados por I_{-n}, com $n \leq 1$.

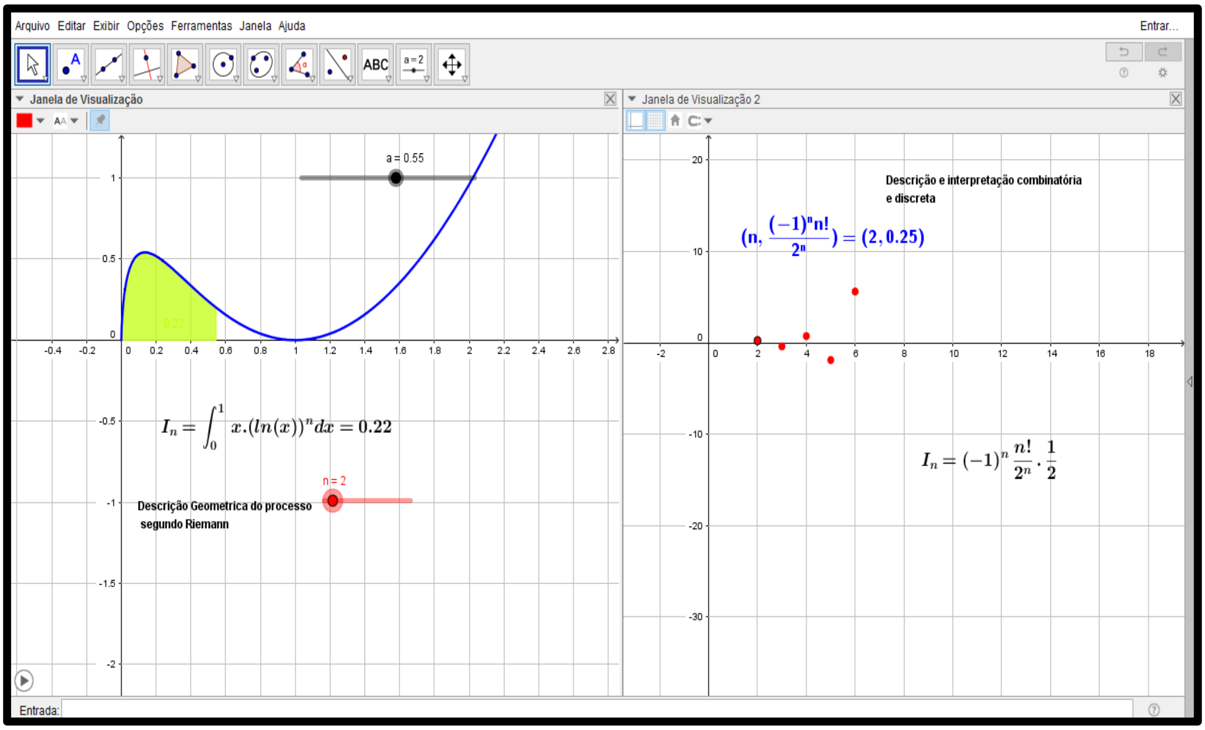
Situação de institucionalização: O conhecimento nessa situação didática será institucionalizado por meio da seguinte proposição:

Proposição 5.4.1: $\forall n \geq 2$, temos que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx = \frac{n}{n^2-1}$.

Situação-problema IV: Decidir pela convergência ou divergência da integral indicada por $I_n = \int_0^1 x.(lnx)^n dx$.

Situação de ação: de acordo com Almouloud (2007), nesta fase o professor propõe ao estudante uma situação-problema que o desafie e este passa a agir sobre a mesma, recorrendo aos dados da questão e ao conhecimento prévio que tem a respeito do assunto, ou seja, é o momento em que o aluno busca alternativas para solucionar o problema apresentado. Nesta dialética, os estudantes podem recorrer à manipulação dos recursos do *software GeoGebra* para a elaboração de conjecturas a respeito do comportamento da integral estudada. Os alunos, com arrimo na visualização da Figura 25, observarão o comportamento da integral em relação às contribuições de área no lado esquerdo, na cor verde e o que acontecerá em relação à representação discreta exposta no lado direito da tela do *software*. Eles poderão decidir, na soma visual observada, pela convergência da integral, uma vez que as contribuições de área tendem a diminuir à medida que $x \to 0^+$ para distintos valores de n.

Figura 25 - Soma visual do comportamento de convergência da Integral Dependente de Parâmetro $I_n = \int_0^1 x.(lnx)^n dx$



Fonte: Construção nossa

Situação de formulação: Nesta dialética, Almouloud (2007) explica que o aluno utiliza uma linguagem natural ou matemática para de forma oral ou escrita explicar aos colegas as respostas encontradas na resolução do modelo. Assim, resolvendo a integral por partes, tem-se que: $u(x) = (lnx)^n$, $du = n(lnx)^{n-1}.\frac{1}{x}dx$, $dv = xdx$ e assim $v = \frac{x^2}{2}$. Dessa forma: $\int_0^1 x.(lnx)^n dx = \underbrace{(lnx)^n.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}_{0} - \int_o^1 \frac{x^2}{2}.\ n(lnx)^{n-1}.\frac{1}{x}dx.$ Portanto, verificamos que: $\int_0^1 x.(lnx)^n dx = -\int_o^1 \frac{x}{2}.\ n(lnx)^{n-1} dx = -\frac{n}{2}\underbrace{\int_0^1 x\,(lnx)^{n-1}\,dx}_{I_{n-1}} = -\frac{n}{2}I_{n-1}$. Decompondo I_{n-1}, obtém-se: $\mathrm{I_n} = -\frac{\mathrm{n}}{2}\mathrm{I_{n-1}} = -\frac{\mathrm{n}}{2}\left[-\frac{\mathrm{n-1}}{2}.\mathrm{I_{n-2}}\right] = -\frac{\mathrm{n}}{2}.\left[-\frac{(\mathrm{n-1})}{2}\right]\left[-\frac{(\mathrm{n-2})}{2}\mathrm{I_{n-3}}\dots\right] = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{n!}{2^n}I_0$. Calculando I_0: $I_0 = \int_0^1 x.(lnx)^0 dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. Portanto: $I_n = (-1)^n\frac{n!}{2^n}I_0 = (-1)^n\frac{n!}{2^n}\frac{1}{2} = (-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$.

Situação de validação: aqui, o aluno justificará a validade de sua resposta por meio de uma linguagem matemática apropriada. Deverão coligir os resultados encontrados na fase de ação (quando exploraram a construção no *software*) com o resultado analítico obtido na fase de formulação. Os estudantes poderão depreender o comportamento de convergência da integral, uma vez que analiticamente corresponderá ao valor numérico $(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$ e geometricamente, na soma visual, observarão que as contribuições de área diminuirão quando $x \to 0^+$, para quaisquer valores de n.

Situação de institucionalização: Almouloud (2007, P. 40) caracteriza essa fase como o momento em que "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe". Com essa concepção, nesta dialética será enunciada a seguinte proposição:

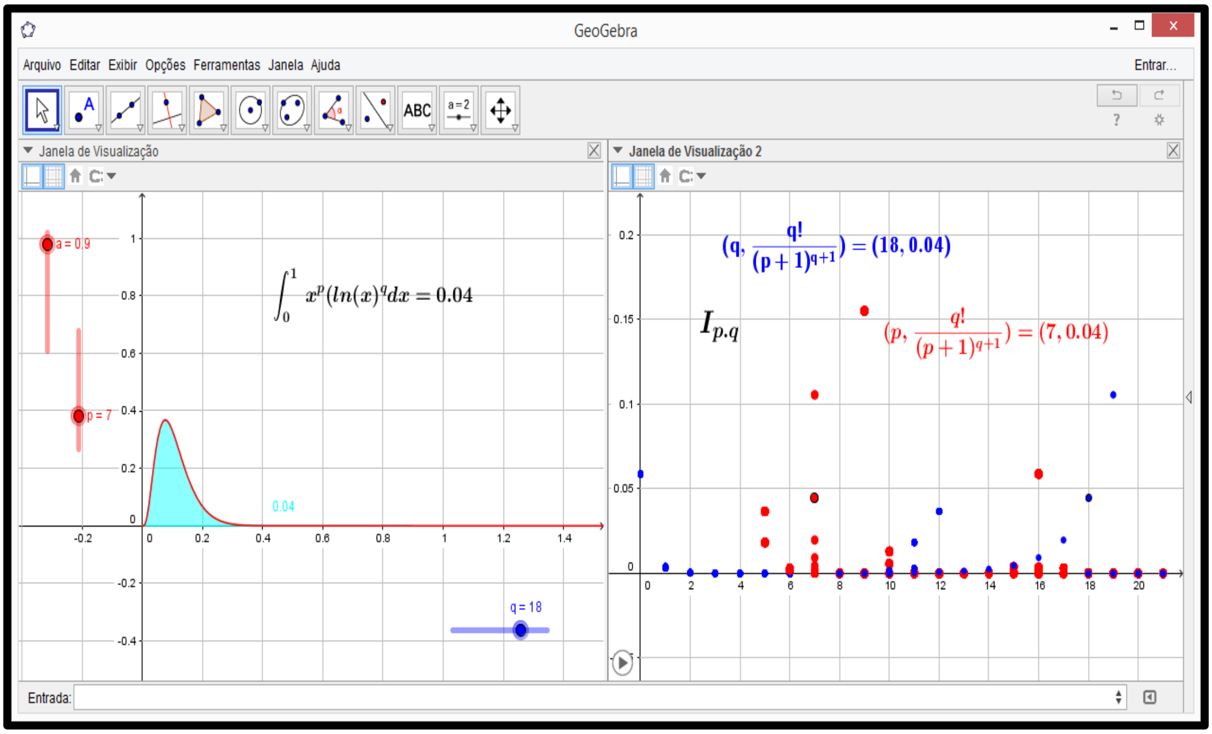
Proposição 5.4.2: Para qualquer número natural n, I_n=$(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$. (DANA-PICARD, 2005b, p. 2).

Situação-problema V: Decidir pela convergência ou divergência da seguinte IDP $I_{p,q} = \int_0^1 x^p.(\ln(x))^q dx$.

Para a referida situação problema deixaremos como sugestão a utilização da propriedade $\lim_{x\to 0^+} x^p.(\ln(x))^q = 0$, com p e q inteiros positivos. O estudante terá como arrimo as construções no *software GeoGebra* apresentadas na Figura 26.

Situação de ação: os alunos podem dispor da construção *a priori* elaborada que exibimos na Figura 26. Acentuamos, porém, que a exploração do *software* pode impulsionar concepções e a atividade de elaboração de conjecturas desejáveis referentes ao processo de convergência da família de funções (ao lado esquerdo), na cor azul, na medida em que os mesmos consideram valores $x \to 0^+$. Além disso, para mantermos a fidedignidade com a definição e o sentido/significado extraído de sua definição formal, os estudantes deverão ser instigados a desenvolver uma atenção maior para o intervalo $(0,1]$, posto que, quando visualizamos o intervalo $[1, +\infty)$, os gráficos (na cor azul), tendem a manifestar um comportamento de maior dispersão e, portanto, sugerem a não existência do limite indicado por $\lim_{x \to 0^+} x^p (\ln(x))^q = 0$. Desse modo, apenas em $(0,1]$, contamos com a possibilidade de sua consistência. Posteriormente, os estudantes deverão explorar a visualização exposta na Figura 26, observando as contribuições de área apresentada no lado esquerdo da tela do GeoGebra e a representação discreta exposta no lado direito, para assim depreender pelo comportamento de convergência/divergência da integral.

Figura 26 - Soma visual do comportamento de convergência da Integral Dependente de Parâmetro $I_{p,q} = \int_0^1 x^p . (\ln(x))^q dx$



Fonte: Construção nossa.

Nesta parte, os estudantes devem explorar, na construção exibida na Figura 26, o comportamento algébrico e geométrico da IDP estudada. A mobilização dos recursos do *GeoGebra* propiciará ao aluno criar conjecturas a respeito do processo de convergência ou divergência da referida integral, na medida em que observam as variações dos parâmetros p e q, ao considerar valores $x \to 0^+$. No lado esquerdo, os estudantes observarão as contribuições de área da integral e no lado direito o comportamento discreto das coordenadas dos pontos indicados nas cores vermelha e azul. Os mesmos serão instigados a chegar a uma conclusão a respeito do caráter de convergência ou divergência da IDP por meio da visualização.

Situação de formulação: Dada a integral $I_{p,q} = \int_0^1 x^p.(\ln(x))^q dx$, os alunos podem recorrer à técnica de integração por partes para encontrar uma solução analítica. Assim, seja $u(x) = \ln(x)^q \therefore du = q.(\ln(x))^{q-1}.\frac{dx}{x}$ e $dv = x^p dx \therefore v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$. Dessa forma, tem-se que: $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (lnx)^q dx = (lnx)^q.\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}.q.(lnx)^{q-1}.\frac{1}{x}dx$. Para a expressão $(lnx)^q.\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1$ o estudante pode recorrer à regra de L´Hospital, para inferir que $\lim_{x\to 0^+}(\ln(x))^q.\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right) = 0$ e chegará à conclusão de que $(lnx)^q.\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = 0$. Assim, tem-se a igualdade: $I_{p,q} = -\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}.q.(lnx)^{q-1}.\frac{1}{x}dx = -\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^p.(lnx)^{q-1}\,dx$. Como $\int_0^1 x^p.(lnx)^{q-1}\,dx = I_{p,q-1}$. Os alunos deverão seguir com a decomposição da expressão, Assim observarão que: $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\left[-\left(\frac{q-1}{p+1}\right)\right].I_{p,q-2} = -\frac{q}{p+1}\left\{-\left(\frac{q-1}{p+1}\right).\left[-\left(\frac{q-2}{p+2}\right)\right]\right\}.I_{p,q-3}$. Dando continuidade à decomposição, os estudantes encontrarão o seguinte resultado para a integral dependente de parâmetro: $I_{p,q} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^q}.I_{p,0}$. Para concluir, eles deverão efetuar o cálculo $I_{p,0=} \int_0^1 x^p.(lnx)^0 dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$. Substituindo esse resultado em $I_{p,q} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^q}.I_{p,0} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^q}.\frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Os estudantes serão instigados a confrontar os dados na soma visual da figura 5 exposta nas janelas do *software GeoGebra*, observando a representação do valor numérico da área sob a curva, que encontraram ser designada por $\frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$, e, a dispersão dos pontos $(p, I_{p,q}) = \left(p, \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}\right) \in \mathbb{R}^2$ e $(q, I_{p,q}) = \left(q, \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Situação de validação: Os estudantes poderão decidir pelo comportamento de convergência da integral, uma vez que analiticamente corresponderá ao valor numérico $\frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$ e geometricamente, na soma visual, observam que as contribuições de área tendem a diminuir quando $x \to 0^+$, para quaisquer valores de p e q, concordando com o comportamento discreto dos pontos $(p, I_{p,q}) = \left(p, \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}\right) \in \mathbb{R}^2$ e $(q, I_{p,q}) = \left(q, \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}\right) \in \mathbb{R}^2$que tendem a se concentrar em trono do eixo, ao aumentar os valores dos parâmetros p e q.

Situação de institucionalização: nesta dialética enunciaremos a proposição apresentada por Dana – Picard (2005b).

Proposição 5.4.3: Para qualquer par (p, q) de números naturais, $\int_0^1 x^p (lnx)^q dx = \frac{(-1)^q.q!}{(p+1)^{q+1}}$. (DANA-PICARD, 2005b, p. 4).

Tivemos como objetivo, nessa seção, apresentar as análises *a priori* das sequências de ensino que serão aplicadas na fase de experimentação. Dessa forma, estivemos empenhados em apresentar um prognóstico do desenvolvimento das sequências didáticas elaboradas, antevendo os possíveis comportamentos que os sujeitos da pesquisa poderiam manifestar quando estivessem empenhados na resolução das situações-problema propostas e perpassando pelas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. Na próxima seção passaremos a descrever a fase da experimentação, para no capítulo V apresentar as análises dos dados colhidos nessa etapa da Engenharia Didática.

5.5 Experimentação

A etapa de experimentação, de acordo com Almouloud (2007), corresponde ao momento em que o pesquisador colocará em prática a execução das atividades previamente elaboradas. Como visto nas duas seções anteriores, as sequências didáticas de ensino foram divididas em duas categorias, sendo duas atividades sobre Integrais Generalizadas e três sobre Integrais Dependentes de Parâmetros. É oportuno ressaltar que a experimentação das sequências de ensino foram precedidas por aulas teóricas sobre o objeto matemático estudado. Dessa forma, explicamos, previamente, aos estudantes participantes da pesquisa, por meio de aulas expositivas e tradicionais, os principais conceitos e propriedades referentes ao conteúdo abordado nessa investigação.

Após as aulas, em um contra turno, aplicamos as seções com as sequências de ensino previamente elaboradas. Resolvemos aplicar as situações didáticas em um outro horário, pelo fato de não querermos interromper o andamento da disciplina, visto que ainda tinha boa parte do conteúdo programático a ser ministrado e poucos dias restantes para encerrar o semestre letivo.

Cada sequência didática foi aplicada para 03 alunos em seções individuais, em um número de 05 seções para cada participante da pesquisa, totalizando 15 seções. O tempo de duração de cada sequência de ensino, foi em média de 2 horas para cada atividade. Optamos por aplicar seções individuais pelo fato de termos que mediar, ao mesmo tempo, as sequências de ensino e colher dados empíricos dos sujeitos participantes.

Os estudantes utilizavam em cada atividade um notebook, lápis e papel. Fizemos o registro de todas as atividades por meio de vídeos, áudios e da coleta das anotações dos participantes da pesquisa. A tabela 3, apresenta um resumo das distribuições das sequências de ensino executas.

Tabela 3 - Descrição das sequências de ensino

Sequências didáticas	Duração	Números de seções por aluno	Tópico	Objetivo
I	2 h	3	Integrais Generalizadas	Discutir em torno da convergência/divergência das integrais $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
II	2 h	3	Integrais Generalizadas	Decidir o caráter de convergência e divergência das seguintes integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
III	2 h	3	Integrais Dependentes de Parâmetros	Decidir o caráter de convergência ou divergência da seguinte integral $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n} dx$ para todo índice inteiro não negativo.
IV	2 h	3	Integrais Dependentes de Parâmetros	Decidir pela convergência ou divergência da integral indicada por $I_n = \int_0^1 x.(lnx)^n dx$.
V	2 h	3	Integrais Dependentes de Parâmetros	Decidir pela convergência ou divergência da seguinte IDP $I_{p,q} = \int_0^1 x^p.(\ln(x))^q dx$.

Fonte: Construção nossa.

Para a execução das atividades, tivemos como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Essa teoria de ensino proporcionou aos participantes da pesquisa construir conhecimentos atinentes a Integrais Generalizadas e Integrais Dependentes de Parâmetros. Em todas as sequências didáticas os estudantes trabalharam com o GeoGebra, pois a visualização proporcionada pelos recursos desse *software* proporcionou aos alunos explorarem os conceitos de convergência/divergência de IGs e IDPs e criarem conjecturas referentes a esses objetos matemáticos.

Todas as situações didáticas foram elaboradas com muito critério, com o intuito de proporcionarmos aos estudantes uma interação com um meio provido de intenções didáticas, uma vez que:

> O *milieu* não munido de intensões didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens (ALMOULOUD, 2007, p.32).

Assim, construímos previamente as atividades no GeoGebra. Durante a experimentação, os alunos deveriam apenas explorar os recursos do *software* para criar suas hipóteses e testar suas conjecturas sobre convergência/divergência de IGs e IDPs. Para cada sequência de ensino, as quatro fases da TSD foram executadas. Na dialética de ação, os estudantes deveriam explorar os recursos do GeoGebra, posteriormente na fase de formulação recorreriam ao trato analítico do objeto matemático e com lápis e papel desenvolveriam analiticamente a atividade proposta. Na dialética de validação os estutantes discutiam as conjecturas que foram criadas, tentando validar suas hipóteses por meio do confronto de dados obtidos na visualização no GeoGebra e no trato analítico

6 ANÁLISES A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DO ESTUDO

No presente capítulo apresentamos e discutimos os dados mais relevantes coletados no desenvolvimento das situações didáticas que foram executadas com os estudantes participantes da pesquisa. O intuito é identificar as categorias intuitivas (intuições afirmativas, intuições conjecturais e intuições antecipatórias), segundo Fischbein (1987), manifestadas pelos alunos no decorrer da execução das fases da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, durante a resolução das questões atinentes ao comportamento de convergência/divergência de algumas Integrais Generalizadas e Integrais Impróprias Dependentes de Parâmetros. Dessa forma, analisamos os dados colhidos junto aos participantes da pesquisa, confrontando os resultados encontrados com os prognósticos feitos nas análises *a priori*, seguindo o delineamento da ED, uma vez que segundo Almouloud (2007):

> Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise *a priori* realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. (ALMOULOUD, 2007, p. 177).

Nessa perspectiva, analisamos e discutimos cada situação didática aplicada aos alunos, retomando as previsões levantadas nas análises *a priori* para fazer uma comparação com os resultados colhidos junto aos estudantes. Posteriormente, discutimos sobre a validação do nosso estudo.

6.1 Análise *a posteriori* da situação didática I

As primeiras atividades executadas foram referentes ao objeto matemático Integrais Generalizadas. Inicialmente aplicamos duas situações didáticas sobre IGs e, posteriormente, executamos três atividades sobre Integrais Dependentes de Parâmetros.

Na dialética de ação da primeira situação-problema, os estudantes passaram a inspecionar o *software* GeoGebra com o intuito de compreender o comportamento em torno da convergência/divergência das integrais analisadas e comparando as desigualdades do tipo $\int_0^1 \frac{dx}{x} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, conforme antecipamos nas análises *a priori*.

Na Figura 27 apresentamos algumas imagens dos sujeitos da pesquisa, registradas na dialética de ação, no momento em que estes começaram a manipular o *software* GeoGebra.

Figura 27- Estudantes em um momento da dialética de ação durante o desenvolvimento da atividade 1

Fonte: Dados da pesquisa

Antes dos alunos observarem o comportamento numérico das integrais, instigamos os mesmos a comparar a desigualdade $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x}$, fazendo interrogações sobre as escolhas dos valores dos limites de integração de $\int_?^? \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\int_?^? \frac{dx}{x}$, que representariam integrais generalizadas e não integrais definidas. Os sujeitos da pesquisa apresentaram as seguintes respostas:

> Aluna 1: Se colocasse o zero em um dos extremos do intervalo, ou então se colocasse o intervalo $+\infty$ ou $-\infty$.
>
> Aluno 2: Em zero eu teria uma indeterminação, pode ser valores infinitos, eu acho.
>
> Aluno 3*:* Se colocasse o intervalo no infinito, do menos infinito a mais infinito ficaria uma integral imprópria. De zero a mais infinito também poderia ser, ou seja sempre que tiver esses casos, sempre que tiver indeterminação [...].

Os estudantes recordaram as definições de Integrais Impróprias, sendo para eles evidente que intervalos infinitos e integrandos descontínuos tornariam aquela integral generalizada. Os mesmos já tinham internalizado as definições dos tipos de IGs, conforme tínhamos previsto nas análises *a priori*.

Expomos a seguir, os discursos que os alunos apresentaram na dialética da ação, no momento em que manipulavam o *software* e buscavam compreender o comportamento das integrais analisadas. O cenário de estudo foi favorável ao surgimento de intuições que foram classificadas por nós.

A aluna 1, no momento que manuseava o *software*, na atividade 1, argumentou que: “a primeira (integral em amarelo) vai divergir porque ela vai sempre crescendo pra esquerda, vai aumentando o valor cada vez mais. Já a segunda (rosa) converge porque ela para em um determinado valor.”

De acordo a Teoria das Categorias Intuitivas de Efrain Fischbein, a aluna 1 desenvolve uma *intuição conjectural*, visto que consegue dizer corretamente o comportamento das integrais no intervalo estudado, mas não apresenta ainda justificativas formais que possam confirmar suas inferências.

Já o aluno 2, no cenário de investigação do comportamento de convergência/divergência das integrais estudadas na atividade 1, apresentou os argumentos seguintes, quando o interrogamos sobre o comportamento esperado da Integral Generalizada estudada.

> Pesquisadora: Qual o comportamento da integral representada na cor amarelo?
>
> Aluno 2: Vamos ver aqui...A área tá crescendo, então ela tá divergindo. Vejo aqui que quando eu coloco o controle deslizante no zero, aparece um ponto de interrogação, é justamente devido à indeterminação no zero. É, ela diverge.
>
> Pesquisadora: E qual o comportamento da integral representada na cor lilás?
>
> Aluno 2: No caso aqui é a mesma coisa, ou não? Espera aí...Não ela converge pra 2, nós não vamos ter aqui uma indeterminação no caso.
>
> Pesquisadora: E o que acontece com as contribuições de área dessa integral?
>
> Aluno 2: Ela aumenta. Pela interpretação geométrica ela seria divergente, mas o valor numérico nos mostra que vai ser convergente.
>
> Pesquisadora: Você está confuso?
>
> Aluno 2: Sim, mas acho que ela converge. (Dados da pesquisa

Em um primeiro momento de sua fala, conforme Fischbein (1987), o aluno 2 manifestou uma *intuição conjectural* quando faz a seguinte averbação: “A área tá crescendo, então ela tá divergindo”, percebemos que o estudante expõe uma justificativa para a sua dedução, embora seu argumento não esteja apoiado em propriedades formais.

No segundo momento, o estudante chega a apontar uma insegurança quanto ao comportamento da integral. Para ele, a interpretação gráfico-geométrica está indicando uma solução, enquanto que a representação numérica está indicando outra resposta. O sujeito não consegue apresentar com clareza seus argumentos, nem tão pouco explica o porquê dessa divergência entre as respostas encontradas, contando apenas com o fator sorte para afirmar que as IGs assumem um comportamento de convergência. Dessa forma, identificamos uma *intuição conjectural* em seu discurso quando o mesmo declara que "*acho que ela converge*". Para o aluno não é evidente esse comportamento da integral, uma vez que as representações estão indicando respostas distintas, mas o mesmo resolve apostar na solução que foi indicada pela representação numérica.

Dando continuidade ao diálogo, atuando como mediadores do conhecimento, questionamos o estudante 2 sobre a aplicabilidade do Teste da Comparação para as integrais generalizadas:

> Pesquisadora: O que aconteceu com a integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$?
>
> Aluno 2: Ela divergiu.
>
> Pesquisadora: Então qual deve ser o comportamento da outra integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?
>
> Aluno 2: Era pra divergir também. Só que ela convergiu. O que a gente faz agora? O Teste da Comparação era pra garantir que as duas fossem divergentes, mas nesse caso ai ele não é válido não.

O aluno 2, na declaração acima, chegou a uma conclusão equivocada sobre o Teste da Comparação para Integrais Generalizadas. O fato da integral da função maior, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, divergir não asseguraria que a integral da função menor $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ também divergisse.

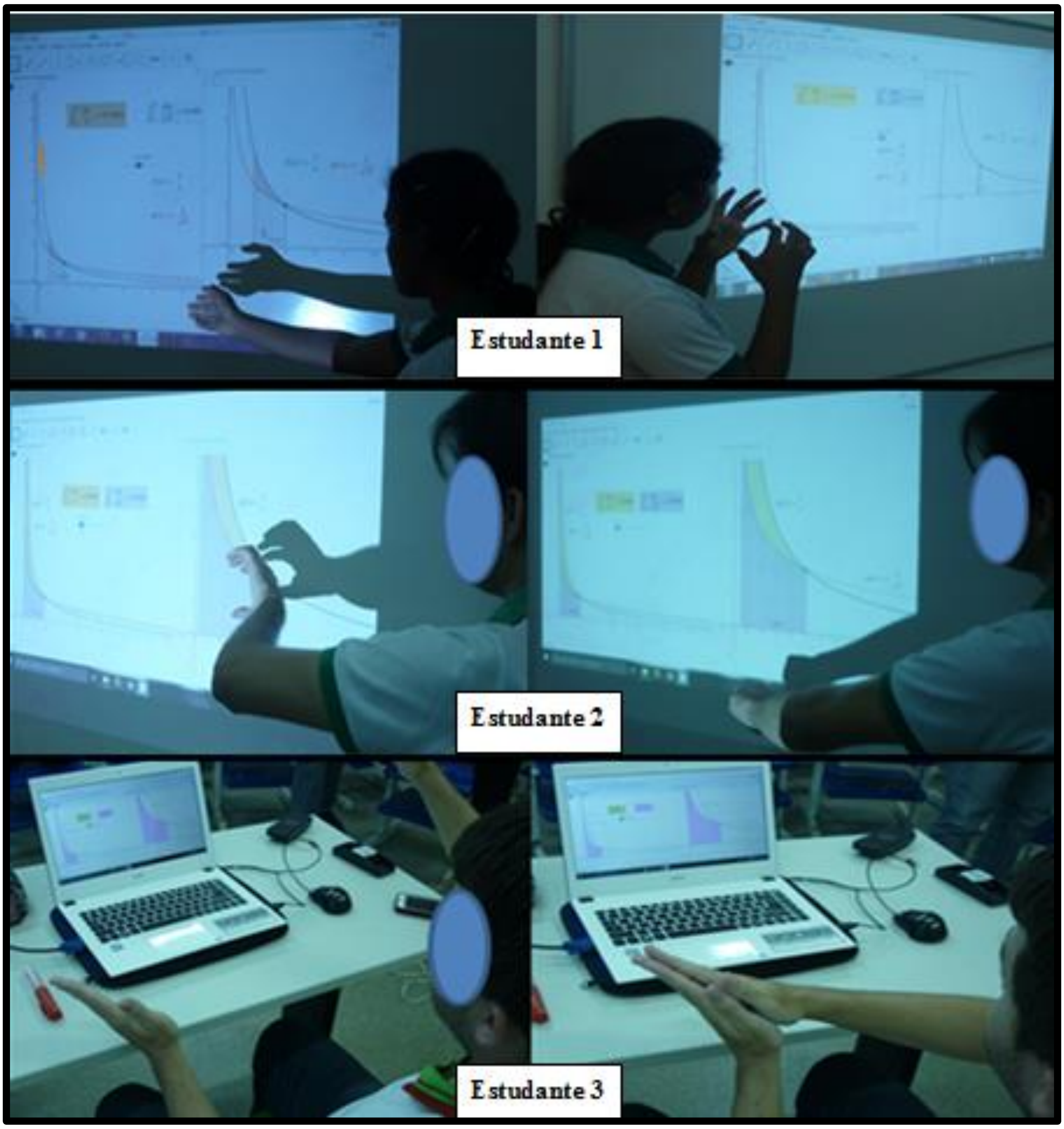
Na dialética da institucionalização, etapa final da TSD, explicamos a aplicabilidade do Teste nesse problema e esclarecemos que pelo Teste da Comparação, dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$, então se a integral generalizada da função $f(x)$ é convergente, a integral generalizada da função $g(x)$ também tem o mesmo comportamento. Assim como, se a integral generalizada de $g(x)$ assumir o comportamento de divergência, a integral da função $f(x)$ também seria divergente, ou seja, se a menor diverge, a maior também diverge e se a maior converge, a menor também converge.

Em relação à inspeção do GeoGebra para decidir pelo comportamento de convergência/divergência das integrais em estudo, o aluno 3 observou que: "a área amarela vai sempre crescer, então ela tá divergindo, mas quando chega no zero, não tenho como determinar essa área porque dá uma indeterminação... A rosa vai divergir porque quando eu me aproximo do zero, vai crescendo o valor numérico."

Na compreensão do aluno 3, as duas integrais generalizadas apresentaram um comportamento de divergência. Esse estudante também, de acordo com Fischbein (1987), manifestou em sua averbação *intuições conjecturais*. Mesmo sendo suas justificativas elementares e apenas apoiadas na visualização que o *software* proporcionou, o sujeito conseguiu expor argumentos para a sua dedução.

A imagem da Figura 28 apresenta momentos ocorridos na dialética de ação, quando os alunos apresentavam seus discursos acerca do comportamento das integrais.

Figura 28 - Discussão atinente ao comportamento de convergência/divergência das IGs da atividade 1

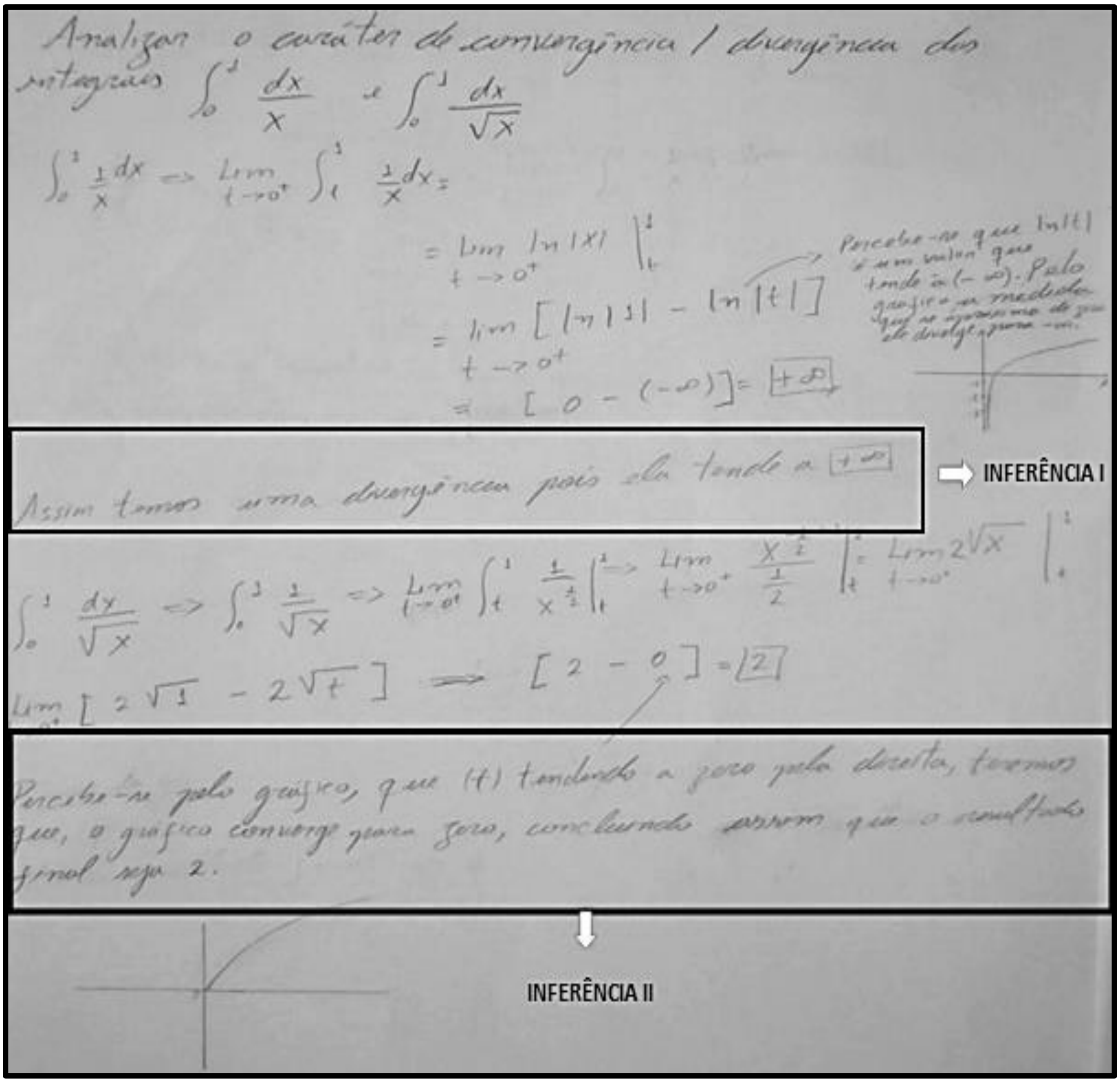


Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos nas imagens da Figura 28 que os alunos se comunicam por meio de uma linguagem natural, recorrendo a sinais próprios para expressar sua compreensão acerca do fenômeno analisado, sendo esse comportamento não antecipado nas análises *a priori*. Ressaltamos, ainda, que todas as ações executadas na fase de ação da TSD, tiveram como arrimo a visualização e a nossa intermediação.

Na dialética da formulação da TSD, os alunos desenvolveram analiticamente as integrais e apontaram suas conclusões acerca do resultado obtido. Ao observarmos os extratos das produções dos três sujeitos da pesquisa, percebemos que os mesmos encontraram resultados similares para o comportamento das integrais. Dessa forma, expomos nesta parte do texto apenas a produção do aluno 2, por apresentar uma exposição analítica mais detalhada.

Figura 29 - Produção do aluno 2, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 1

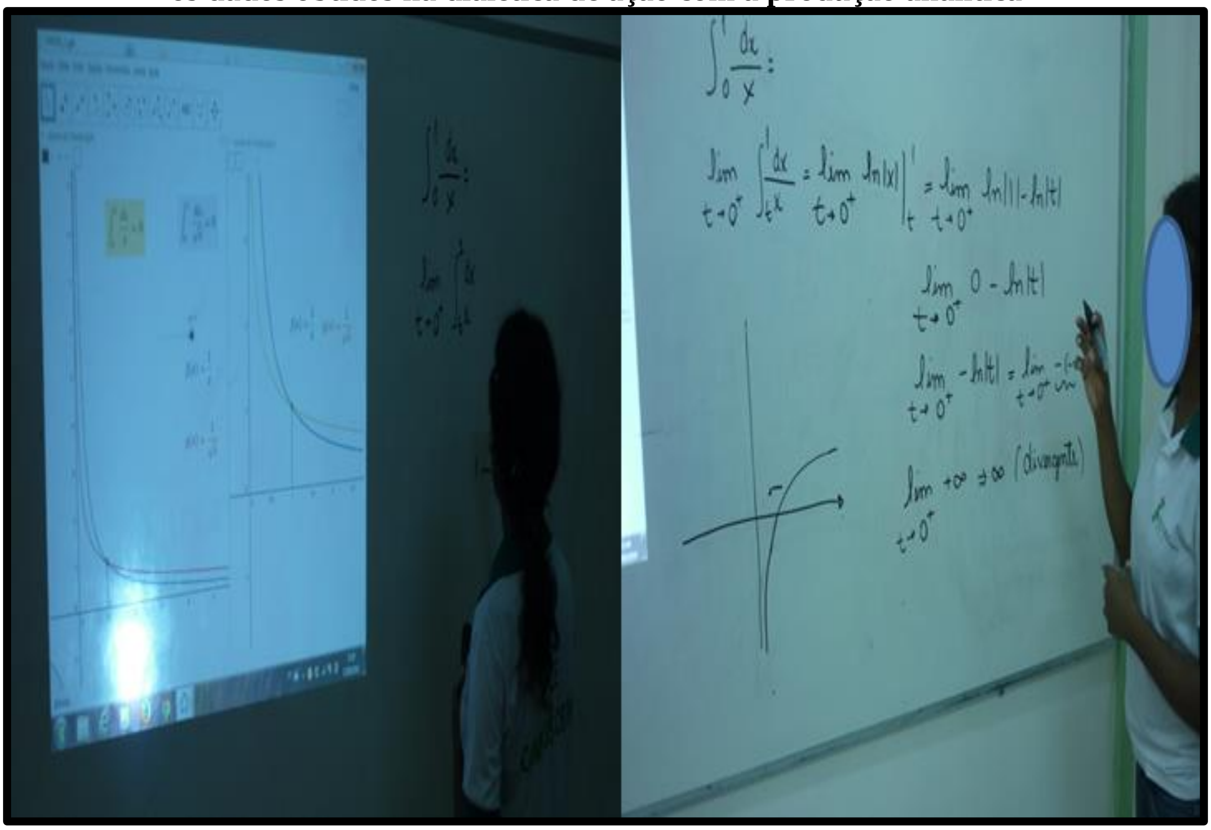


Fonte: Dados da pesquisa

No fragmento da Figura 29, o aluno 2 está efetivamente envolvido no plano de solução para o problema proposto e busca estratégias para obter as respostas para as integrais analisadas. Recorre, para tanto, a construção de gráficos, fórmulas e propriedades formais que possam lhe auxiliar em seu desenvolvimento. Assim, manifesta nessa fase, segundo Fischbein (1987), uma *intuição antecipatória* nas inferências I e II em destaque na Figura 29.

Na imagem da Figura 30, outro sujeito da pesquisa, a estudante 1, na dialética de validação da TSD, busca confrontar os dados obtidos por meio da inspeção no GeoGebra com a produção analítica desenvolvida na dialética de formulação.

Figura 30 - Aluna 1 no momento da dialética de validação da atividade 1, confrontando os dados obtidos na dialética de ação com a produção analítica



Fonte: Dados da pesquisa

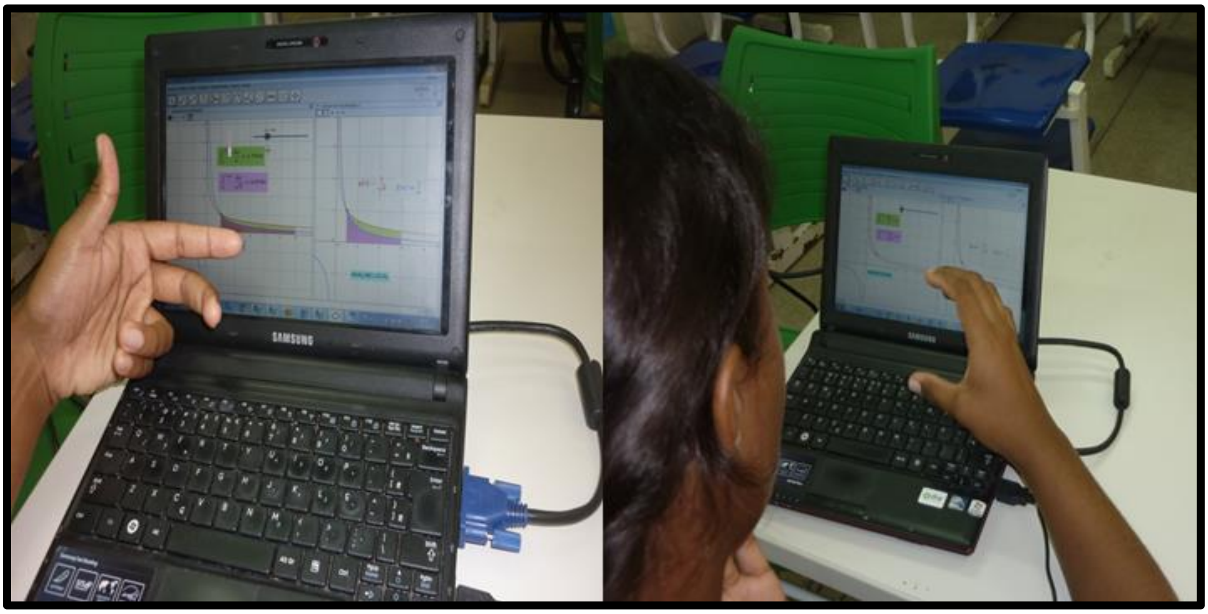
Nesta situação didática, apenas os estudantes 1 e 2 conseguiram compreender corretamente o comportamento das integrais estudadas. Já o aluno 3 não conseguiu interpretar o caráter de convergência/divergência de uma das integrais generalizadas. Quanto à comparação das desigualdades, esperamos nas análises *a priori* que os sujeitos da pesquisa identificassem a validade do Teste da Comparação para as IGs, porém nenhum deles obteve sucesso nessa parte da atividade.

6.2 Análise *a posteriori* da situação didática II

Na situação didática II, na dialética de ação, como foi previsto nas análises *a priori* e, de maneira análoga à atividade anterior, os estudantes manipularam o *software* GeoGebra para compreender o comportamento das integrais generalizadas estudadas e criar suas conjecturas acerca do objeto matemático analisado.

As imagens da Figura 31 foram registradas na dialética de ação quando a aluna 1 inspecionava o GeoGebra e apresentava algumas conjecturas que apresentaremos posteriormente.

Figura 31 - Ações gestuais da aluna I que manifestam a sua compreensão acerca do comportamento de convergência/divergência das IGs estudadas na atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à análise das contribuições de área referentes às integrais apresentadas no problema, a aluna 1 argumentou que: "as contribuições de área estão aumentando, tanto da amarela, quanto da rosa vão crescer. O valor numérico da amarela vai crescer cada vez mais, isso significa que ela vai divergir. A rosa também vai crescer, então ela tá divergindo."

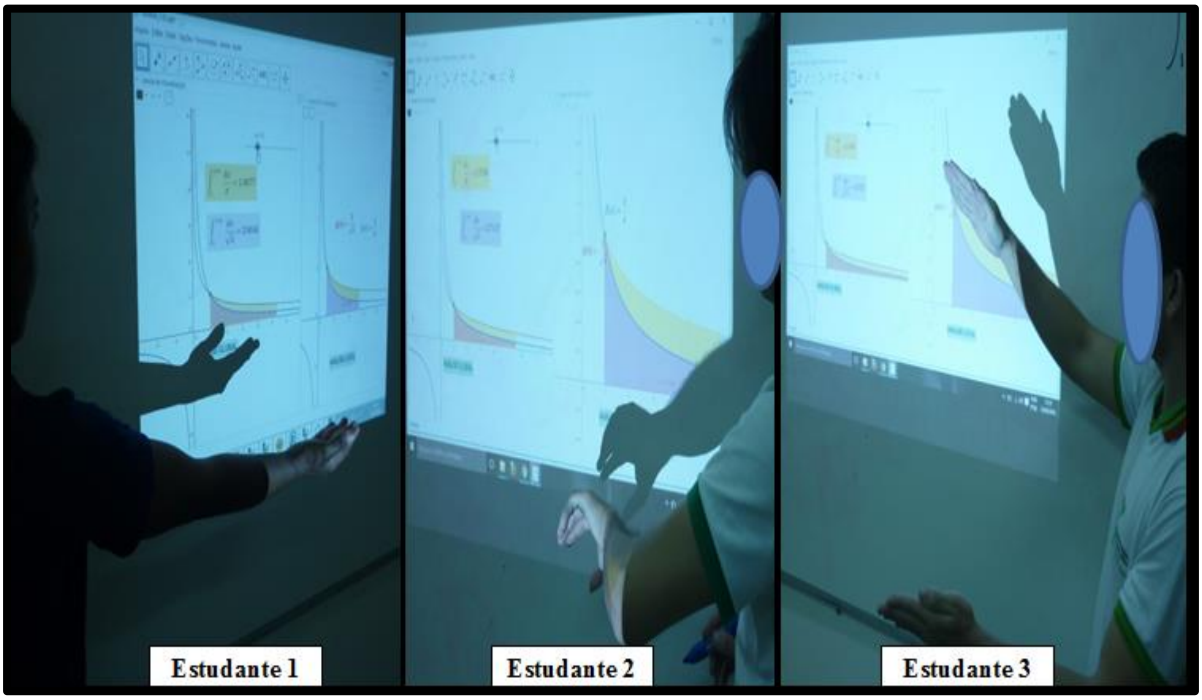
Novamente aqui, de acordo com Fischbein (1987), a aluna 1 manifestou uma *intuição conjectural*. Ela conseguiu ter uma compreensão do fenômeno estudado e utiliza um argumento informal para justificar a sua inferência.

Também nessa atividade, instigamos os estudantes para que chegassem a alguma conclusão a respeito do Teste de Comparação para as integrais em questão. A seguir, apresentamos alguns trechos das falas dos alunos 2 e 3 sobre este quesito programado nas análises *a priori*, uma vez que antecipamos que os sujeitos da pesquisa analisariam as desigualdades do tipo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. O aluno 2 fez a seguinte averbação: “Percebo que a menor tá divergindo e a maior tá divergindo, o teste faz sentido nesse caso.” Já o aluno 3 afirmou que: “A menor tá acompanhando a outra [...], é faz sentido o teste. Mas não devemos deixar de calcular as integrais para comprovar.”

Nesse caso, os alunos conseguiram identificar a aplicabilidade do Teste da Comparação para as integrais generalizadas com a visualização proporcionada pelo *software*. Porém o aluno 3, mostra-se um pouco resistente a limitar-se apenas pela exploração gráfico-geométrica do GeoGebra e prefere desenvolver as integrais para confirmar as suas deduções, recorrendo ao modo formal e ao trato analítico do conteúdo como sempre ocorre no ensino clássico. Conforme Alves e Borges Neto (2011, pg.43), “no ensino tradicional, tal ato improfícuo do estudante se caracteriza pelo *pensamento algorítmico*”.

A Figura 32 apresenta imagens registradas nos momentos em que os estudantes discutiam os comportamentos das integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Figura 32 - Discussão atinente ao comportamento de convergência/divergência das IGs da atividade 2

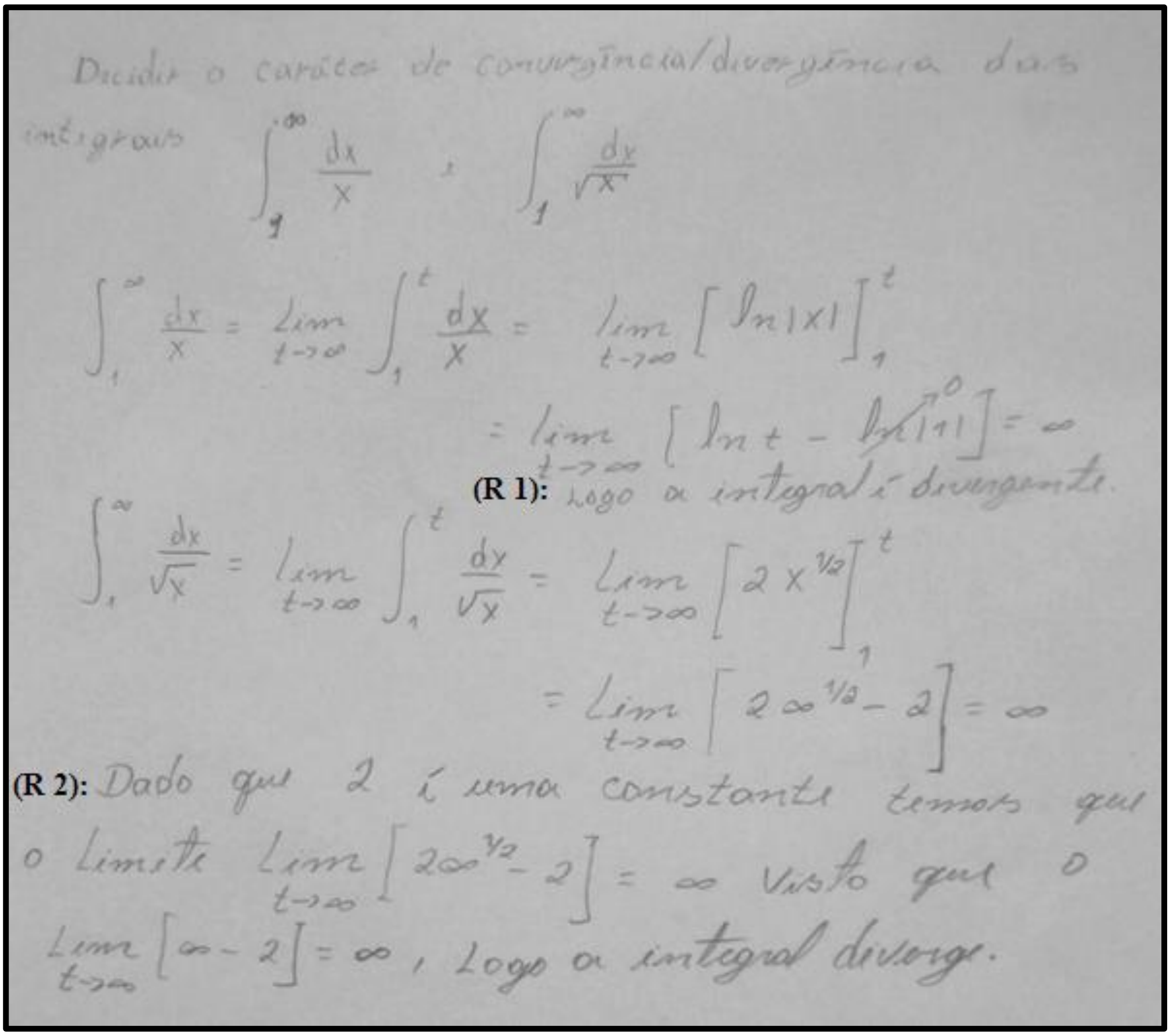


Fonte: Dados da pesquisa

Assim como na situação didática anterior, os estudantes fazem ações gestuais para expressar sua compreensão atinente ao caráter de convergência/divergência das integrais generalizadas.

Na Figura 33, expomos um extrato da produção analítica das integrais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, desenvolvidas na dialética de formulação da TSD pelo estudante 3. Novamente aqui, os alunos obtiveram resultados semelhantes. Dessa forma, expomos apenas a produção do estudante 3, sendo os demais extratos estão apresentados nos apêndices dessa pesquisa.

Figura 33 - Produção do aluno 3, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência das IGs da atividade 2



Decidir o caráter de convergência/divergência das integrais $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to \infty} \left[\ln|x| \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\ln t - \ln|1| \right] = \infty$$

(R 1): Logo a integral é divergente.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to \infty} \left[2x^{1/2} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[2\infty^{1/2} - 2 \right] = \infty$$

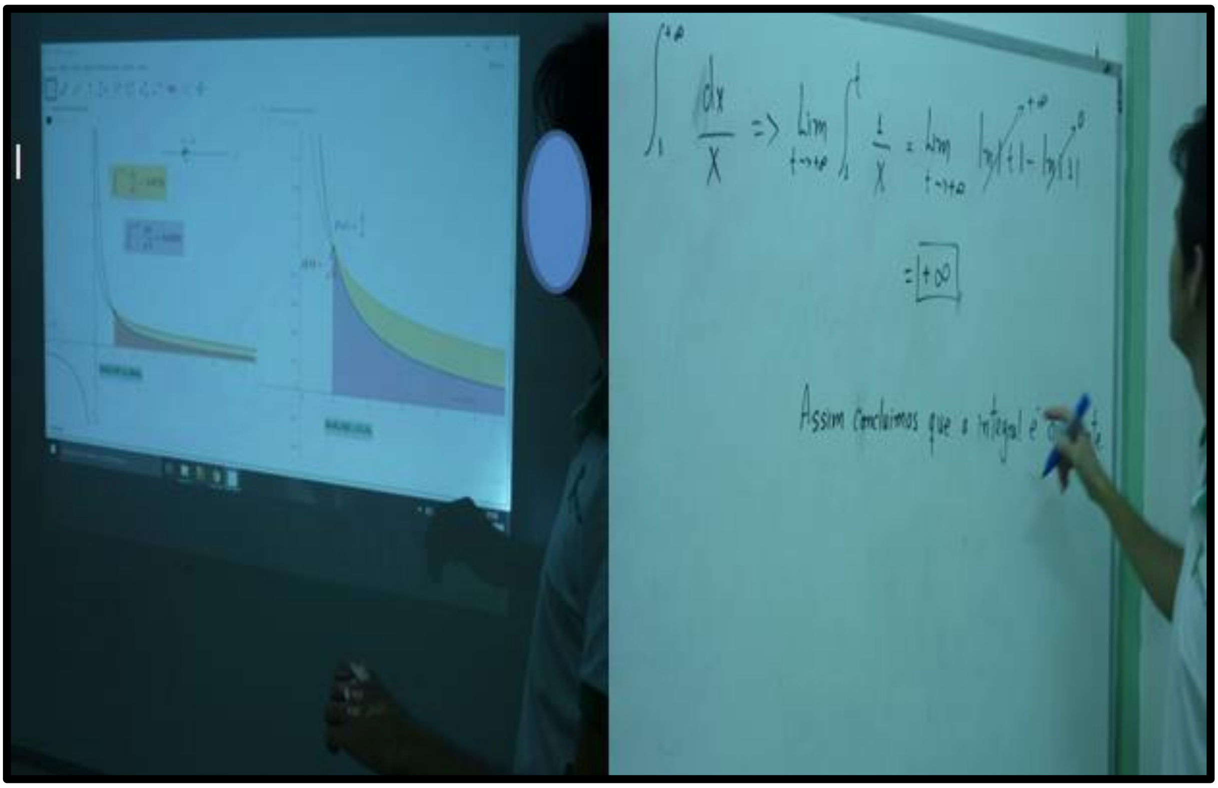
(R 2): Dado que 2 é uma constante temos que o limite $\lim_{t \to \infty} \left[2\infty^{1/2} - 2 \right] = \infty$ visto que o $\lim_{t \to \infty} \left[\infty - 2 \right] = \infty$, Logo a integral diverge.

Fonte: Dados da pesquisa

Na produção do estudante 3 identificamos *intuições antecipatórias* nos fragmentos indicados por R1 e R2. O sujeito da pesquisa recorreu a uma estratégia para obter suas respostas. Apoiou-se na definição de um dos casos de integrais generalizadas (intervalos infinitos) e efetuou os cálculos necessários. A resposta foi obtida após um esforço por parte do estudante que desenvolveu intuições classificadas, de acordo com Fischbein (1987), como sendo *antecipatórias*.

Na imagem da Figura 34, outro sujeito da pesquisa, o estudante 2, na dialética de validação, busca confrontar os dados obtidos por meio da inspeção no GeoGebra com a produção analítica desenvolvida na dialética de formulação.

Figura 34 - Aluno 2 no momento da dialética de validação da atividade 2, confrontando os dados obtidos na dialética de ação com a produção analítica



Fonte: Dados da pesquisa

Os objetivos para esta situação didática foram atingidos. Os três sujeitos da pesquisa conseguiram, por meio da visualização, compreender o caráter de divergência das integrais e, por meio do trato analítico puderam comprovar os resultados obtidos nas representações gráfico – geométricas proporcionadas pelo GeoGebra.

Ressaltamos que a exploração dos recursos gráficos e geométricos proporcionados pelo *software* GeoGebra foi fundamental para que os sujeitos participantes da pesquisa pudessem manifestar um raciocínio intuitivo atinente ao comportamento de convergência das integrais generalizadas estudadas na sequência didática II.

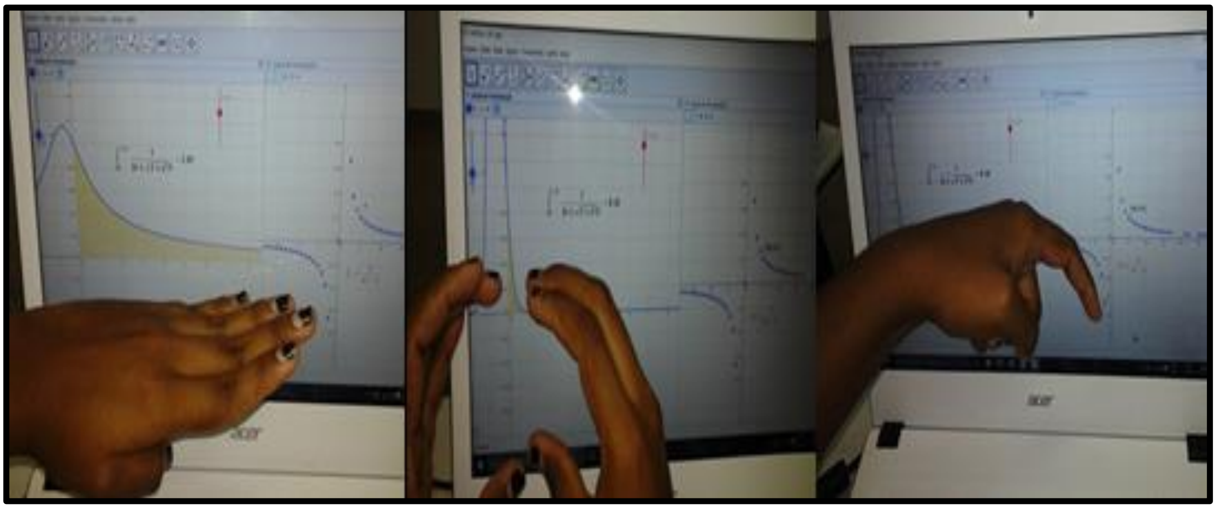
6.3 Análise a posteriori da situação didática III

Nessa atividade, na dialética de ação, conforme previmos nas análises *a priori*, os estudantes manusearam a construção no GeoGebra, manipulando os seletores móveis e observando o comportamento da integral no intervalo $[0, +\infty[$ para diversos valores de n ($n \in \mathbb{Z}_{-}, n = 0$, $n = 1$ e $n \in \mathbb{Z}_{+}$). No momento em que manipulavam os seletores móveis do *software* e criavam suas conjecturas a respeito da situação proposta, registramos ações gestuais dos estudantes que representavam a sua compreensão relativa ao comportamento de convergência/divergência da integral dependente de parâmetro estudada.

Durante o momento da dialética da ação, instigamos os estudantes a observarem as duas janelas da tela do *software*. Em um primeiro momento analisaram a representação contínua da integral e em um segundo momento, a representação discreta da IDP.

Na Figura 35 podemos observar uma sequência de ações gestuais da aluna I, no momento em que manuseava o *software* durante a dialética de ação. Enfatizamos que esse comportamento não havia sido previsto nas análises *a priori*, uma vez que a manifestação de gestos por parte do aluno compreende um conhecimento que vai além do formalismo matemático presente na abordagem dos conteúdos.

Figura 35 - Ações gestuais da aluna 1 que manifestam a compreensão acerca do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada na atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

A mão estendida da aluna 1 indica a sua compreensão a respeito do comportamento de divergência da integral para alguns valores de n, no intervalo de integração $[0, +\infty[$. Já as mãos semifechadas, uma em direção a outra, foi a ação gestual empregada pela estudante para representar a ideia de convergência para outros valores de n no intervalo de integração estudado. Na terceira parte da imagem, a aluna está manifestando uma compreensão a respeito da representação discreta da integral estudada e, indica que os pontos do gráfico estão tendendo a menos infinito em relação ao eixo y, o que corresponde ao comportamento de divergência da IDP para determinados valores do parâmetro n.

No cenário em que registramos essas imagens da aluna 1, gravamos o seguinte áudio que retrata a compreensão da referida estudante quanto ao comportamento da integral em relação à representação contínua exposta no *software*:

> Percebo que para n negativo a integral tá divergindo [...]. Em -6, por exemplo, a contribuição de área tá indo pra infinito positivo. Quando aumentamos o parâmetro a, a área tá aumentando e a integral vai para um valor muito grande. Em $n = 0$ ela continua divergindo porque a área tá crescendo rapidamente e o valor da integral tá crescendo. Agora, para n maior que 1 percebo que ela vai crescendo devagar, então ela vai convergir. (Aluna 1).

Na fala da aluna, conforme Fischbein (1987) registramos *intuições conjecturais*. Elementos ligados à solução já são identificáveis no discurso da estudante, porém a mesma não possui, ainda, estratégias delineadas para efetiva solução da situação proposta.

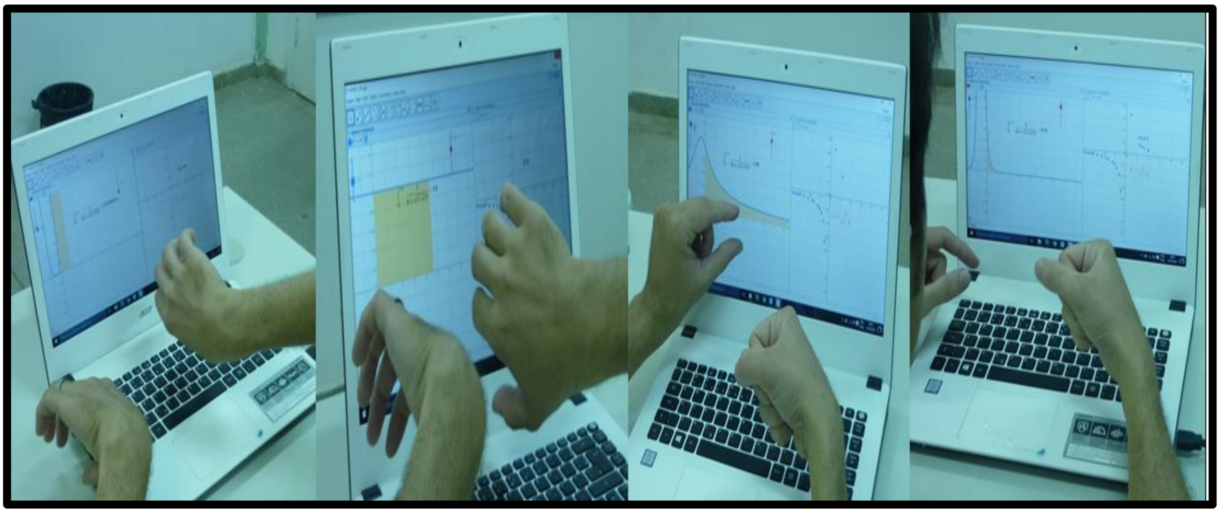
Quanto à interpretação da parte discreta, a aluna 1 afirmou que:

> Para valores negativos de n, os pontos estão tendendo cada vez mais para menos infinito, então ela tá divergindo para menos infinito. Já em 1, deu uma indeterminação, isso porque se eu substituir n por 1 em $\frac{n}{n^2-1}$ vai dá zero no denominador [...]. Agora para n maior que 1, os pontos tenderão a zero, logo ela vai convergir. (Aluna 1).

Na declaração da estudante, *intuições antecipatórias* são novamente identificadas. No trecho de sua fala alguns elementos da solução são explícitos. A aluna 1 ao afirmar que *"Para valores negativos de n, os pontos estão tendendo cada vez mais para menos infinito, então ela tá divergindo para menos infinito"*, se apoia em uma definição de integral generalizada. A discente relacionou o fato do limite da integral não existir como um número (a mesma está tendendo ao infinito) com o caráter de divergência da IDP em questão. Percebemos que a estudante consegue interpretar a solução da situação proposta na região de divergência, porém amparando-se em conhecimentos prévios relativos ao conteúdo estudado. Já quando pontua que: "*Agora para n maior que 1, os pontos tenderão a zero, logo ela vai convergir*", novamente recorre à definição para justificar a convergência da integral, uma vez que se o limite existe como um número, no caso ela afirma ser zero, então a IDP converge.

O aluno 2 inspecionou o *software* em quatro situações distintas. As imagens da Figura 36 apresentam momentos ocorridos na fase de ação da TSD referentes a algumas falas que apresentamos posteriormente.

Figura 36 - Ações gestuais do aluno 2 que manifestam a compreensão do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada na atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Em um primeiro momento o aluno 2 buscou verificar o comportamento da integral no intervalo analisado para valores negativos de n, posteriormente observou as contribuições de área da integral para $n = 0$ e $n = 1$, logo em seguida determinou o que aconteceria com a integral para o caso $n > 1$. Abaixo apresentamos algumas partes do diálogo que desenvolvemos com o referido estudante, registradas no momento em que o sujeito explorava na construção do GeoGebra, o comportamento algébrico e geométrico da IDP estudada.

> Pesquisadora: Qual o comportamento geométrico da integral, em relação às contribuições de área, quando atribuímos ao parâmetro n valores negativos?
>
> Aluno 2: Para n igual a menos quarenta, por exemplo, a gente vê que para um determinado valor do controle deslizante $a,$ a integral chega a uma indeterminação. Ela explode, cresce tão rápido que gera a indeterminação, então ela vai divergir. [...] Para n igual a menos cinco percebo que o valor numérico da integral tá aumentando, ela tá divergindo, tanto na contribuição de área, na análise gráfica, como numericamente ela tá crescendo. Ela tá aumentando, tá divergindo.
>
> Pesquisadora: E quando $n = o$, o que acontece? Você pode descrever o comportamento geométrico dessa integral nesse caso?
>
> Aluno 2: Em n igual a zero a área tá aumentando, ela diverge se o parâmetro cresce indefinidamente. [...]

Identificamos, nas duas respostas apresentadas, que o aluno 2 também desenvolveu *intuições conjecturais* durante o momento de exploração da representação geométrica e contínua da IDP. Em seu discurso, o estudante aponta as regiões onde a IDP apresenta um comportamento de convergência/divergência. Em parte, ele já deixa explícita uma resposta para o problema e uma representação do evento estudado, porém não recorre a definições, propriedades ou teoremas para justificar formalmente as suas conjecturas, ou seja, ele ainda não está empenhando esforço em um plano de resolução ou buscando estratégias para resolver a situação-problema.

Em relação à representação discreta da IDP, o aluno 2 ao manipular o *software* GeoGebra apresentou o seguinte discurso:

> Para valores de n entre -40 e 0 a integral tá tendendo a menos infinito, no caso ela tá divergindo, né? [...] Deu uma indeterminação aqui em $n = 1$. Agora a partir do 1, a impressão gráfica é que vai convergir. Vai dar uma acumulação de pontos quase que tocando no eixo x. Os pontos vão se aproximar do eixo x. (Aluno 2).

No trecho de sua fala, o aluno 2 manifesta uma *intuição afirmativa*, na parte em que faz a seguinte declaração: "*Agora a partir do 1, a impressão gráfica é que vai convergir.* Vai *dar uma acumulação de pontos quase que tocando no eixo x"*. Percebemos que o estudante não consegue apresentar justificativas formais que expliquem sua dedução. Para ele, é evidente o comportamento de convergência da integral para valores de n maiores que 1 apenas pela impressão gráfica que o mesmo tem ao interagir com o *software*. Dessa forma, o discente aceita o comportamento de convergência, sem empregar justificativas.

O aluno 3, desenvolveu estratégias similares às empregadas pelos alunos 1 e 2. Inicialmente, analisou apenas a representação contínua da integral. Nessa parte da atividade, explorou a construção no *software* em valores negativos de n, em $n = 0$, $n = 1$ e para diversos valores positivos de n.

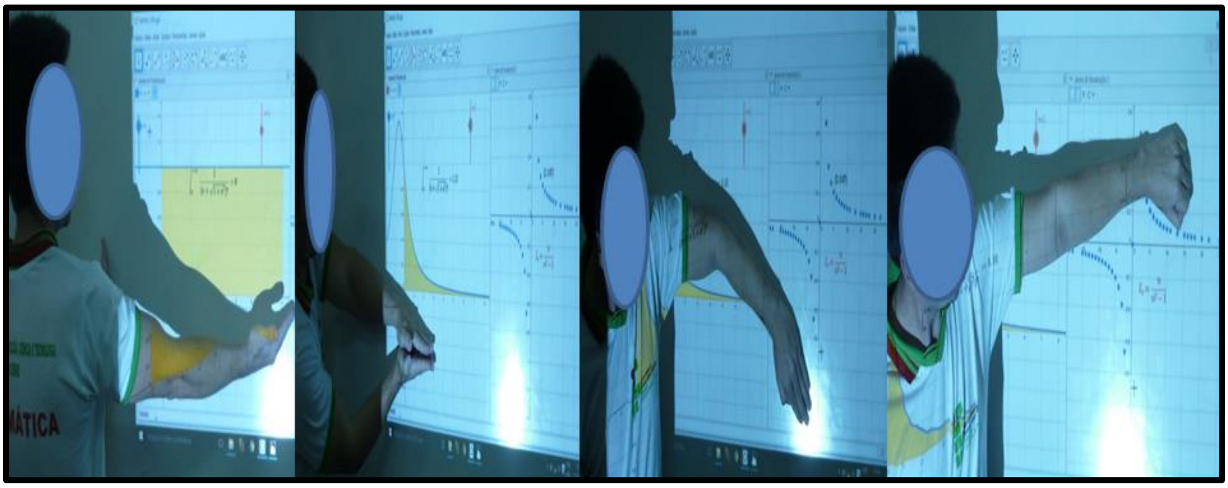
Durante a inspeção no GeoGebra, o referido estudante declarou o seguinte:

> Para valores negativos de n até o zero, a contribuição de área aumenta infinitamente, então a integral vai divergir[...]. Já em $n = 1$ ela vai divergir, a área tende a se expandir, embora ela se aproxime bastante do eixo, mas não chega a encostar não [...]. A partir de $n = 2$ a integral converge, chega a um certo valor aqui nesse intervalo que ela vai resultar em um valor numérico. Essa área vai encostar no eixo, limitando-se. Como a área se limita, então ela converge. (Aluno 3).

Identificamos por Fischbein (1987) *intuições conjecturais* nas averbações do aluno 3. O estudante não apresenta propriedades formais que fundamentem suas inferências, mas consegue expor justificativas convincentes que mostram sua visão acerca do fenômeno estudado.

As imagens da Figura 37 mostram as ações gestuais apresentadas pelo aluno 3, no momento em que analisava o comportamento de convergência/divergência da integral e criava suas conjecturas a respeito do fenômeno analisado.

Figura 37 - Ações gestuais do aluno 3 que manifestam a compreensão do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada na atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira parte da figura, o braço estendido do aluno foi o símbolo empregado pelo mesmo para indicar o comportamento de divergência da integral para algum valor do parâmetro n. As mãos encostadas correspondem à simbologia utilizada para indicar convergência. Na terceira imagem, o estudante está indicando que os pontos de coordenadas $\left(n, \frac{n}{n^2-1}\right)$ tendem a se direcionar para a parte negativa do eixo y. Com a mão fechada, o discente tentou indicar a concentração de pontos em torno do eixo x. As duas primeiras partes da figura são atinentes à análise da parte contínua da integral, enquanto que as duas últimas correspondem ao estudo da representação discreta da IDP.

Em relação à inspeção da representação discreta da integral no *software*, feita após a análise da parte contínua, registramos em áudio, o seguinte diálogo desenvolvido com o aluno 3:

> Pesquisadora: De acordo com a sua compreensão, na análise da representação discreta, a integral convergirá ou divergirá quando aumentamos o valor do parâmetro n?

> Aluno 3: Bom, inicialmente de -40 até 1, ela vai convergir porque os pontos vão se aproximando cada vez mais do eixo.
>
> Pesquisadora: Mas anteriormente, na análise da parte contínua, você havia dito que a integral divergia para valores negativos de n e agora ao observar a dispersão dos pontos, você tá afirmando que a integral tá convergindo. O que você pode dizer sobre isso?
>
> Aluno 3: É, dá a impressão que ela converge, só que na outra janela, a gente percebe que ela diverge, mas aqui dá a impressão que ela converge. Ela se aproxima cada vez mais do eixo, embora eu acredito que ela não chega a encostar [...].
>
> Pesquisadora: E para valores do parâmetro n, maiores que zero, o que vai acontecer?
>
> Aluno 3: Depois do zero, os pontos tendem a zero. Dá a impressão que ela vai convergir.

Nas respostas apresentadas pelo estudante 3, predomina a manifestação de *intuições conjecturais*. Na primeira resposta, o sujeito consegue explicar o porquê da integral está convergindo de acordo com sua concepção. Na segunda e terceira respostas, o aluno está inseguro acerca de sua dedução, chegando a declarar que tem a impressão que a integral convergirá. O estudante não manifesta clareza em suas declarações e conta com o acaso para obter a solução do problema, expressando apenas uma presunção do que pode acontecer com a integral quando o parâmetro tende para infinito.

Previmos nas análises *a priori* que na dialética de formulação os alunos recorreriam ao trato analítico para determinar o comportamento de convergência/divergência da IDP estudada. Antecipamos, também, que os estudantes analisariam analiticamente alguns casos particulares de n, tais como o caso $n = 0$, $n = 1$ e $n \geq 2$, e chegariam à conclusão de que a IDP diverge nos casos em que $n = 0$ e $n = 1$ e converge para n inteiro e $n \geq 2$.

Diferentemente da nossa previsão, o aluno 3, na descrição analítica do comportamento da IDP estudada, não fez a análise do caráter de convergência/divergência nos casos $n = 0$ e $n = 1$, passando diretamente a verificar o caso geral, como pode ser visto na Figura 38.

O estudante 3 chega à conclusão de que a integral é convergente e desenvolve uma *intuição antecipatória*, já que conforme Fischbein (1987), a resposta para o problema surgiu como resultado de um esforço por parte do aluno. Para tanto, o mesmo empregou estratégias com técnicas de integração a que ele teve que recorrer para chegar à solução, mobilizando conhecimentos anteriores referentes a métodos de integração e também a propriedades de integral generalizada, uma vez que afirmou ser a IDP convergente pelo fato de que o limite da integral existe como um número, visto que $n \in \mathbb{Z}$.

Os estudantes 1 e 2 apresentaram estratégias similares de resolução para a atividade 3 e corresponderam ao que foi previsto nas análises *a priori*. Os mesmos estudaram separadamente cada caso em particular, $n = 0$ e $n = 1$, para em seguida analisar o caso onde $n \geq 2$. Na Figura 38 e Figura 39 é exposta a produção realizada pela aluna 1 e a Figura 40 apresentamos o desenvolvimento do aluno 3. Nos apêndices da dissertação é disponibilizado o desenvolvimento analítico produzido pelo estudante 2.

Figura 38 - Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3 (1ª parte)

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}$

Inicialmente vejamos o caso $n = 0$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^0} = \int_0^{+\infty} dx = x \Big|_0^{+\infty} = +\infty + \Big|_0^{+\infty} - 0 = +\infty$

Logo a integral diverge, pois o resultado vai se aproximar de $+\infty$.

Agora vejamos o caso $n = 1$.

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^1}$

Seja $x = \operatorname{senh} u$

$dx = \cosh u\, du$

$x + \sqrt{1+x^2} = \operatorname{senh} u + \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 u} = \operatorname{senh} u + \sqrt{\cosh^2 u} = \operatorname{senh} u + \cosh^2 u$, sabendo que

$\operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$; $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

Vamos analisar o intervalo de integração para a variável u:

Para $x = 0$, temos:

$x = \operatorname{senh} u$

$x = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{0}{1} = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

$e^u - e^{-u} = 0 = \frac{e^u}{e^{-u}} - \frac{e^{-u}}{e^{-u}} = \frac{0}{e^{-u}}$

$e^{-(-u)} - 1 = 0 = e^{2u} = 1$

$e^{2u} = e^0 \quad u = 0$

$u = \frac{0}{2} = 0$

Para $x = +\infty$, temos:

$x = \operatorname{senh} u$

$x = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = +\infty$

$+\infty = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \neq +\infty = e^u - e^{-u}$

$\infty = \frac{e^u}{e^{-u}} - \frac{e^{-u}}{e^{-u}} \neq \infty = e^{u-(-u)} - 1 \neq \infty = e^{2u} - 1$

Para que tenhamos uma igualdade em ambos os lados:

$u = +\infty$

$x = 0 ; u = 0$

$x = +\infty ; u = +\infty$

$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh u\, du}{\operatorname{senh} u + \cosh u} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)}$

(I) $\frac{e^u \cancel{- e^{-u}} + e^u \cancel{+ e^{-u}}}{2}$

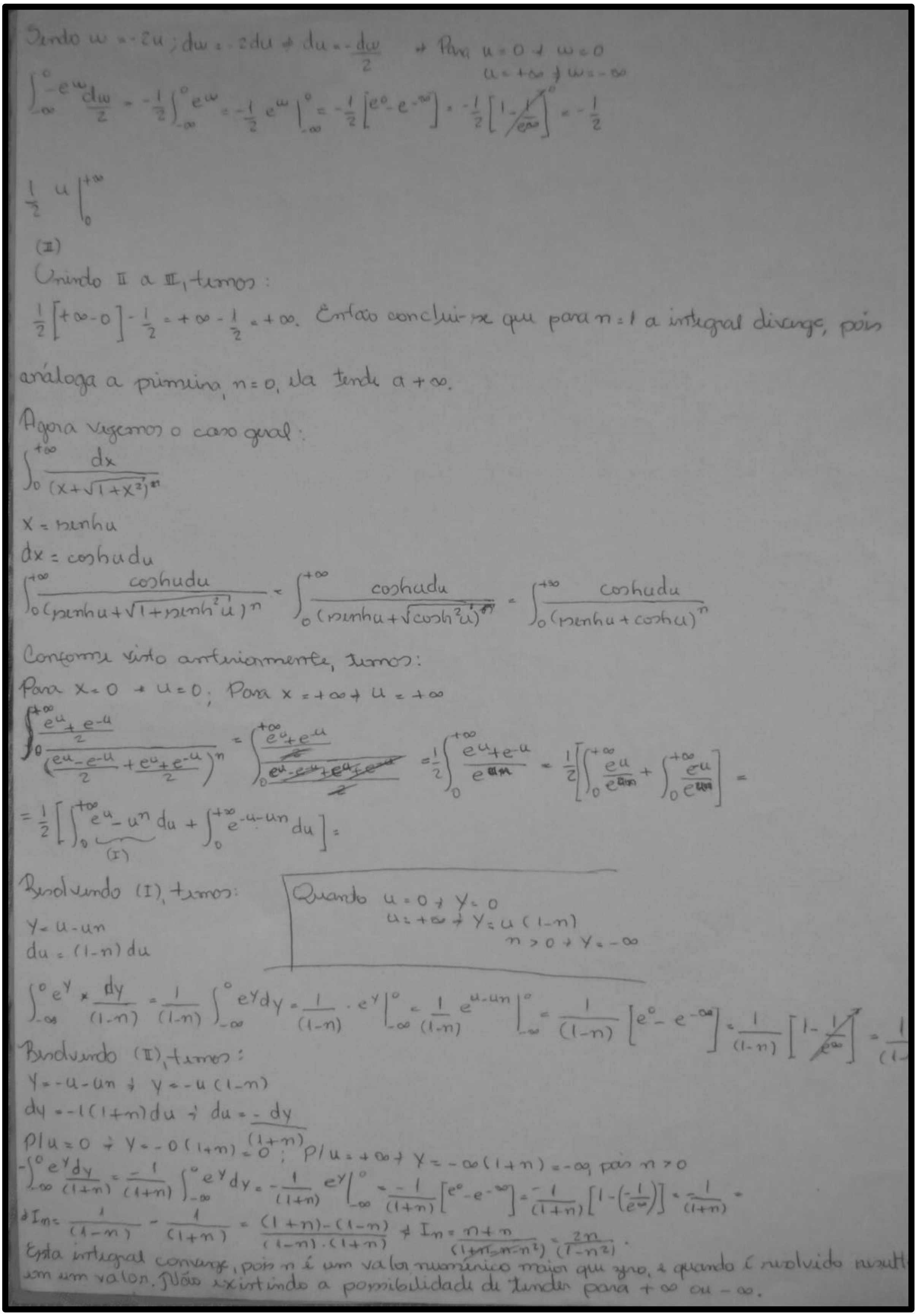
(II) $\frac{\cancel{2} e^u}{\cancel{2}} = e^u$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^u + e^{-u}}{2}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cdot \frac{1}{e^u}\, du$

$\frac{1}{2} \int \frac{e^u + e^{-u}}{e^u} du + \frac{1}{2} \int \frac{e^u}{e^u} + \frac{e^{-u}}{e^u}\, du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 1 + e^{-2u} du = \frac{1}{2} \Big[\underbrace{\int_0^{+\infty} du}_{(II)} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-2u} du}_{(III)} \Big] = \frac{1}{2} u \Big|_0^{+\infty} +$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 39 - Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3 (2ª parte)



Sendo $w=-2u$; $dw=-2du \Rightarrow du=-\frac{dw}{2}$ ⇒ Para $u=0 \Rightarrow w=0$
$u=+\infty \Rightarrow w=-\infty$

$\int_{-\infty}^{0} -e^{w}\frac{dw}{2} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{w} = -\frac{1}{2}e^{w}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{2}[e^0-e^{-\infty}] = -\frac{1}{2}\left[1-\cancel{\frac{1}{e^{\infty}}}^{0}\right] = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}u\Big|_0^{+\infty}$

(II)

Unindo II a III, temos:

$\frac{1}{2}[+\infty-0]-\frac{1}{2}=+\infty-\frac{1}{2}=+\infty$. Então conclui-se que para $n=1$ a integral diverge, pois análoga a primeira, $n=0$, ela tende a $+\infty$.

Agora vejamos o caso geral:

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}$

$x = \operatorname{senh} u$

$dx = \cosh u\,du$

$\int_0^{+\infty}\frac{\cosh u\,du}{(\operatorname{senh}u+\sqrt{1+\operatorname{senh}^2u})^n} = \int_0^{+\infty}\frac{\cosh u\,du}{(\operatorname{senh}u+\sqrt{\cosh^2u})^n} = \int_0^{+\infty}\frac{\cosh u\,du}{(\operatorname{senh}u+\cosh u)^n}$

Conforme visto anteriormente, temos:

Para $x=0 \Rightarrow u=0$; Para $x=+\infty \Rightarrow u=+\infty$

$\int_0^{+\infty}\frac{\frac{e^u+e^{-u}}{2}}{\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}+\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^n} = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{e^u+e^{-u}}{\cancel{2}}}{\cancel{\frac{e^u-e^{-u}+e^u+e^{-u}}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^u+e^{-u}}{e^{un}} = \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{e^{un}}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{e^{un}}\right] =$

$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^{+\infty}e^{u-un}du}_{(I)}+\int_0^{+\infty}e^{-u-un}du\right] =$

Resolvendo (I), temos:

$y = u-un$

$du = (1-n)\,du$

$\boxed{\text{Quando } u=0 \Rightarrow y=0;\ u=+\infty \Rightarrow y=u(1-n);\ n>0 \Rightarrow y=-\infty}$

$\int_{-\infty}^{0}e^y\times\frac{dy}{(1-n)} = \frac{1}{(1-n)}\int_{-\infty}^0 e^y dy = \frac{1}{(1-n)}\cdot e^y\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{(1-n)}e^{u-un}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{(1-n)}[e^0-e^{-\infty}] = \frac{1}{(1-n)}\left[1-\cancel{\frac{1}{e^\infty}}\right] = \frac{1}{(1-$

Resolvendo (II), temos:

$y=-u-un \Rightarrow y=-u(1-n)$

$dy=-1(1+n)du \Rightarrow du=-\frac{dy}{(1+n)}$

$p/\ u=0 \Rightarrow y=-0(1+n)=0$; $p/\ u=+\infty \Rightarrow y=-\infty(1+n)=-\infty$ pois $n>0$

$-\int_{-\infty}^0 e^y\frac{dy}{(1+n)} = \frac{-1}{(1+n)}\int_{-\infty}^0 e^y dy = -\frac{1}{(1+n)}e^y\Big|_{-\infty}^0 = \frac{-1}{(1+n)}[e^0-e^{-\infty}] = \frac{-1}{(1+n)}\left[1-\left(\frac{1}{e^\infty}\right)\right] = \frac{-1}{(1+n)} =$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{(1-n)}-\frac{1}{(1+n)} = \frac{(1+n)-(1-n)}{(1-n)\cdot(1+n)} \Rightarrow I_n = \frac{n+n}{(1+n-n-n^2)} = \frac{2n}{(1-n^2)}$.

Esta integral converge, pois n é um valor numérico maior que zero, e quando é resolvido resulta em um valor. Não existindo a possibilidade de tender para $+\infty$ ou $-\infty$.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 40 - Produção do aluno 3, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n}$$

$x = \text{Senh}\, y$, $dx = \text{Cosh}\, y\, dy$

$P/\ x=0 \Rightarrow \text{Senh}\, y = 0 \Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0 \Rightarrow e^y - e^{-y} = 0 \Rightarrow e^y = e^{-y} \Rightarrow \boxed{y=0}$

$P/\ x=+\infty$; $\text{Senh}\, y = +\infty \Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = +\infty \Rightarrow e^y - e^{-y} = +\infty \Rightarrow$

$e^y - \frac{1}{e^y} = +\infty$, Quando $y \to +\infty$ temos que $e^{\infty} - \underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{\to 0} = +\infty$

Mais quando $y \to -\infty$ temos que $\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0} - e^{+\infty} \Rightarrow -\infty \neq +\infty$ (Não converge)

Assim temos: $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Cosh}\, y . dy}{\left(\text{Senh}\, y + \sqrt{1+\text{Senh}^2 y}\right)^n}$, Sabendo que:

$\text{Cosh}^2 y - \text{Senh}^2 y = 1$, temos: $\int_0^{+\infty} \frac{\text{cosh}\, y\, dy}{(\text{Senh}\, y + \text{cosh}\, y)^n} =$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{e^y+e^{-y}}{2}}{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2} + \frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^n} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^y+e^{-y}}{2}}{\left(\frac{e^y+e^y}{2}\right)^n} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^y+e^{-y}}{2} \cdot \frac{2^n}{2^n . e^{yn}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^y + e^{-y}}{e^{yn}} . dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^y + e^{-y}) . e^{-yn} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{y-yn} + e^{-y-yn} dy$$

$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{y-yn} . dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y-yn} . dy$, Fazendo $y - yn = u \Rightarrow du = (1-n) dy$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-2n} \left[e^{y-yn}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2-2n} \left[\left(e^{+\infty(1-n)}\right) - 1\right] = -\frac{1}{2-2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-2-2n} \left[e^{-y-yn}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-2-2n} \left[e^{y(-1-n)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-2-2n} \left[\cancel{e^{+\infty(-1-n)}}^{\,0} - 1\right] = \frac{1}{2+2n}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+n)} - \frac{1}{(1-n)}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-n-1-n}{(1+n)(1-n)}\right) = -\frac{n}{1^2-n^2} = \boxed{\frac{n}{n^2-1}}$; Logo converge dado que n é um valor numerico.

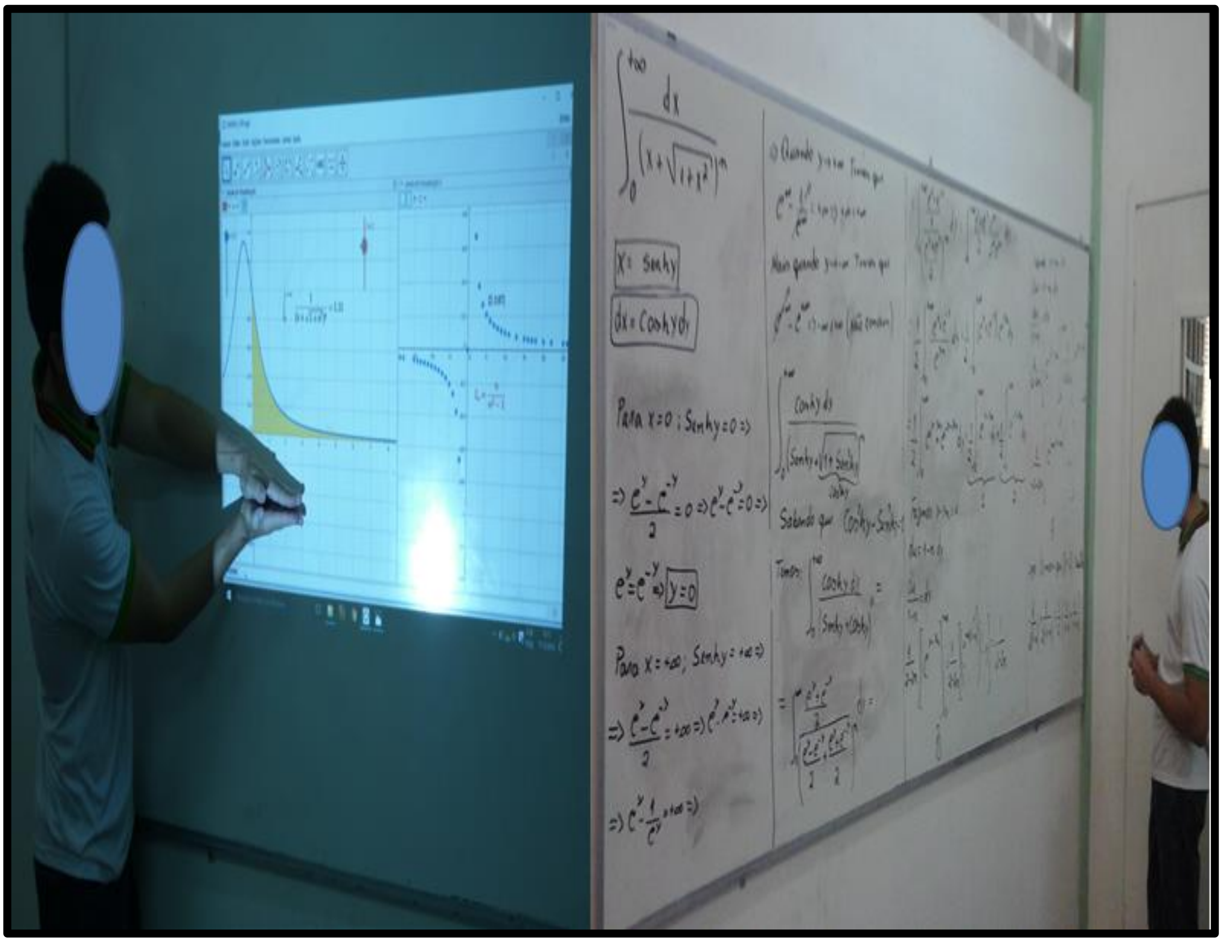
Fonte: Dados da pesquisa

A estudante 1, assim como o aluno 3, chega à conclusão de que a integral é convergente e manifesta *intuições antecipatórias.* Além disso, conclui que para os casos $n = 0$ e $n = 1$ a IDP diverge, de acordo com a nossa previsão na análise *a priori*.

A referida aluna, na sua produção, já se encontra empenhada na busca de solução para o problema e chega à resposta após empenhar esforços e empregar técnicas para resolver a atividade. Assim, podemos afirmar que a mesma, nessa fase, desenvolveu *intuições antecipatórias* quando escreveu que: "Então, conclui-se que para $n = 1$ a integral diverge, pois análogo à primeira $n = 0$, ela tende a $+\infty$. Esta integral converge, pois n é um valor numérico maior que zero e quando é resolvido resulta em um valor. Não existindo a possibilidade de tender para $+\infty$ ou $-\infty$." (Aluna 1).

Na Figura 41, na fase de validação, o aluno 3 compara os resultados encontrados na dialética de ação, quando explorou os recursos gráficos do GeoGebra, com o resultado analítico obtido na fase de formulação.

Figura 41: Aluno 3 no momento da dialética de validação da atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Na dialética de validação, o aluno 3 afirmou que: “o resultado aqui que o GeoGebra dá, realmente coincide com o resultado algébrico. Analiticamente eu percebo que ela converge, dada em vista que n é um valor numérico [...]. No GeoGebra também dá pra perceber isso.” (Aluno 3).

Para rematar essa situação didática, na dialética de institucionalização, convertemos os resultados que foram obtidos para o problema na Proposição 5.4.1 deduzida por Dana-Picard (2005b) e enunciada nas análises *a priori*.

Pelo desenvolvimento apresentado pelos estudantes 1, 2 e 3 na fase de experimentação da atividade 3, percebemos que os mesmos conseguiram compreender o comportamento de convergência da IDP por meio da visualização, comprovando suas conjecturas por meio do trato analítico. Assim, podemos afirmar que o objetivo dessa atividade foi atingido, uma vez que os alunos chegaram à conclusão, com o GeoGebra de que as contribuições dinâmicas de área tendem a diminuir, na medida em que $x \to +\infty$, levando-os a concluir que a IDP converge. Da mesma forma, analiticamente encontram o mesmo resultado para o comportamento da integral estudada.

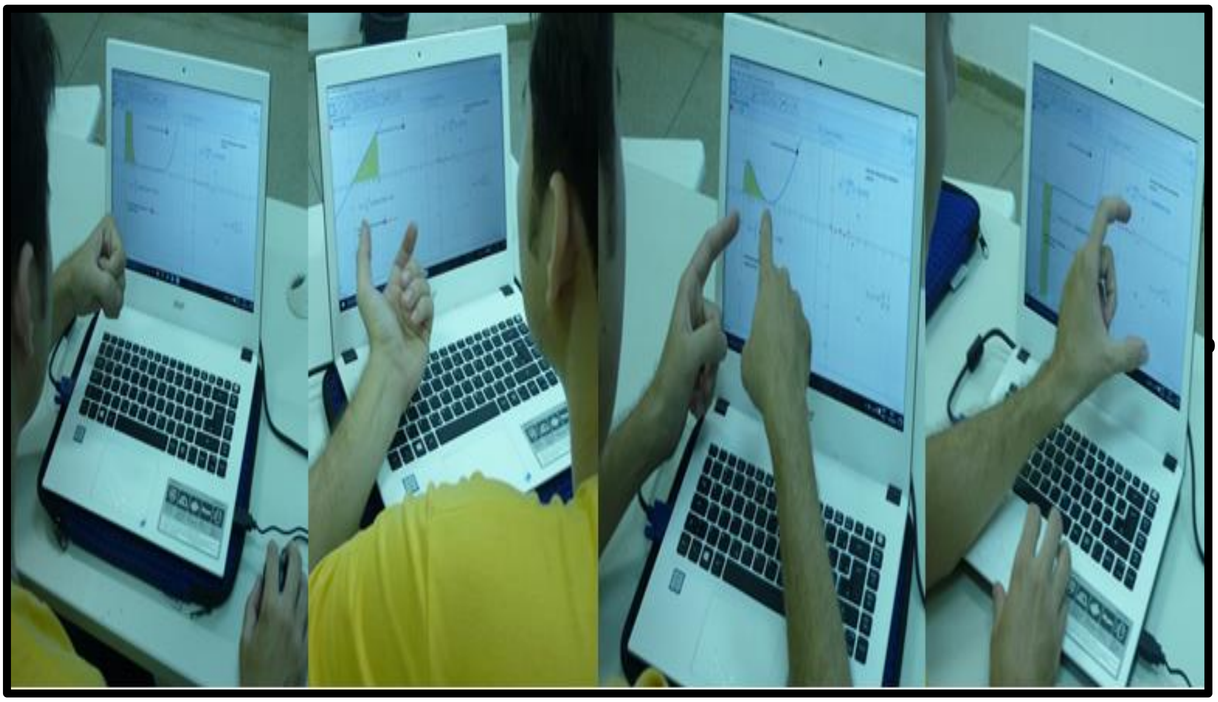
Dessa forma, o que foi previsto, nas análises *a priori*, em relação à resposta para o problema proposto, foi confirmado mediante a exploração do GeoGebra e pelas produções desenvolvidas pelos estudantes.

6.4 Análise a posteriori da situação didática IV

Na atividade 4, havíamos antecipado, nas análises *a priori,* que os estudantes, na dialética de ação, manipulariam os recursos do GeoGebra para elaborar suas conjecturas atinentes ao comportamento da IDP estudada. Dessa forma, com arrimo da construção do *software,* poderiam depreender o comportamento de convergência da integral por meio da soma visual proporcionada pela representação discreta e pela representação contínua da integral dependente de parâmetro. Essa previsão foi confirmada na fase de experimentação da atividade 4, na qual os estudantes passaram a atuar sobre o problema e buscaram estratégias, inicialmente, por meio da exploração dos recursos do software para solucionar a situação proposta.

A Figura 42 mostra o momento em que o aluno 2, após ter recebido a situação apresentada, passa a atuar sobre o problema, refletindo, criando conjecturas e, dessa forma, se desenvolvendo por iniciativa própria, uma vez que de acordo com Almoloud (2007, p. 37) é importante que “o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre a sua ação”.

Figura 42 - Ações gestuais do aluno 2, na dialética de ação, que manifestam a compreensão do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada na atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa

No momento em que os estudantes 1, 2 e 3 exploraram os recursos dinâmicos do GeoGebra, na dialética de ação da atividade 4, os áudios com suas conjecturas foram registrados por nós para que intuições fossem identificadas nos discursos apresentados pelos sujeitos participantes da pesquisa. A seguir, de forma sequencial, apresentamos as transcrições das falas dos alunos 2 e 3, referentes à análise da parte contínua da IDP analisada.

O aluno 2, no áudio, afirmou que “para diferentes valores de n, intuitivamente a gente percebe que a integral tá convergindo porque a contribuição de área não cresce [...]. Ela tende a um valor fixo.”

O aluno 2 desenvolve uma *intuição conjectural*. Ele consegue indicar a resposta para o comportamento da IDP, apresentando um argumento que ainda é informal e não fundamentado por propriedades matemáticas relativas ao conteúdo.

Já o aluno 3 argumentou que a integral “sempre vai convergir devido ao intervalo de integração. Agora dependendo do valor de n vai dar uma contribuição de área maior ou menor, mas sempre vai convergir não importa o valor de n, seja par, ou ímpar.” (Aluno 3).

Nesse caso, identificamos na ilação do aluno 3 *intuições afirmativas*. Na fala do estudante, o elemento solução ainda é implícito. Para o sujeito, é evidente que a integral convergirá devido ao intervalo de integração. Dessa forma, o mesmo aceita a interpretação do fato sem recorrer a justificativas mais convincentes e não busca encontrar estratégias que possam confirmar ou vetar a sua dedução.

Acerca da análise da representação discreta da IDP da atividade 4, o aluno 2 pontuou que:

> Os pontos fazem um zig zag. Tipo, vai aumentando o espaçamento entre eles que vão se distanciando do eixo cada vez mais[...]. Quanto à dispersão dos pontos eu não sei se converge ou diverge, mas em minha análise acho que vai divergir, eu não consigo ter certeza. (aluno 2).

O aluno 2 não consegue argumentar corretamente a sua dedução. Por meio da visualização, ele chega a supor, com dúvidas, o caráter de divergência da integral, ou seja, o sujeito apresenta apenas uma presunção do que pode acontecer quanto ao comportamento da IDP e desenvolve, dessa forma, uma *intuição conjectural.*

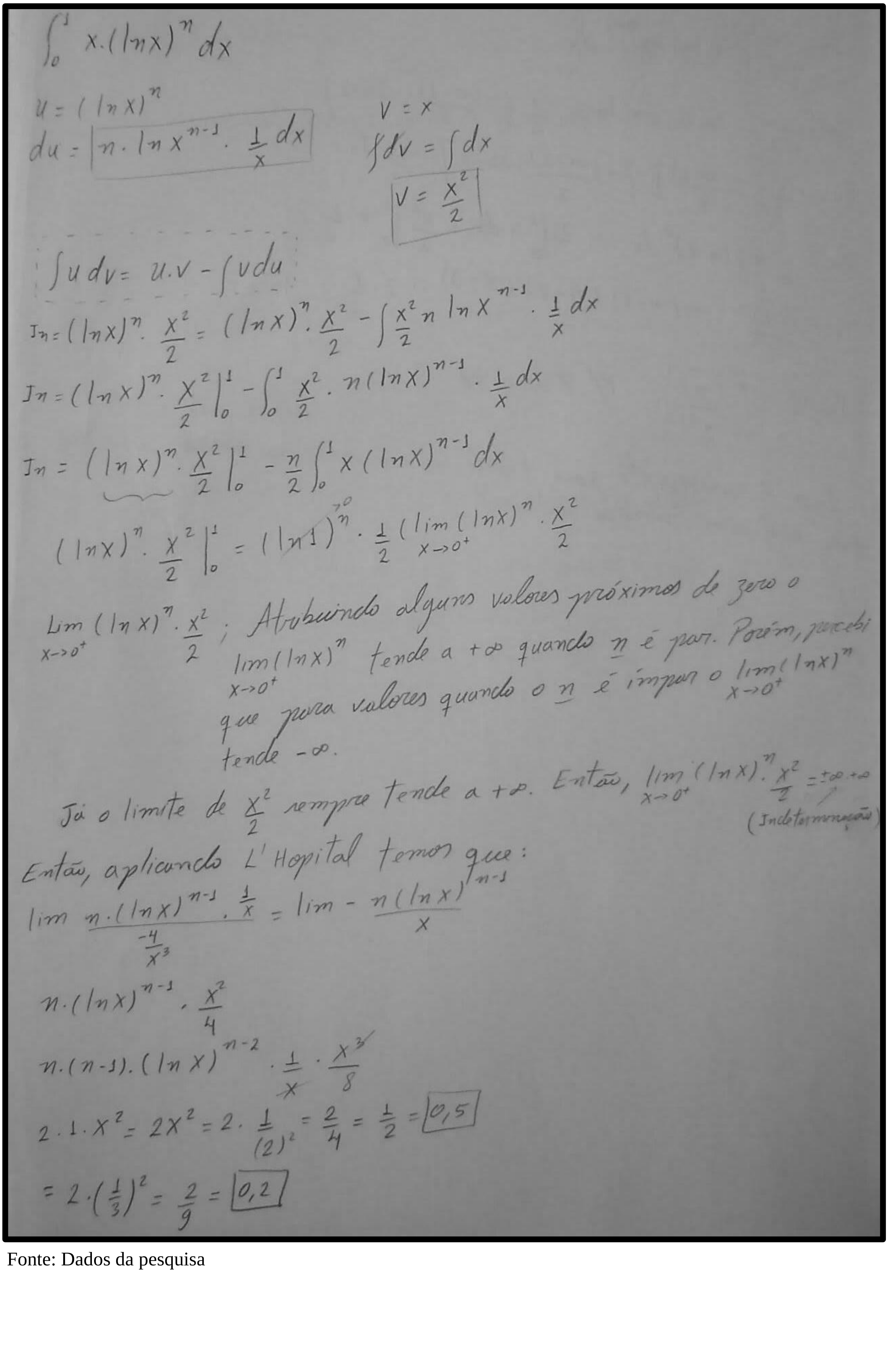
Já o aluno 3 afirmou que "na medida em que aumentamos o valor de n vai aumentando a quantidade de pontos. Dá pra perceber que os pontos se distanciam cada vez mais da origem, não obedecendo nenhum padrão, então a integral vai divergir. "

No discurso do aluno 3, identificamos *intuições conjecturais*, o aluno consegue justificar a sua ilação, mas não utiliza propriedades formais que fundamentem as suas inferências.

Para a atividade 4, prevenimos nas análises *a priori* que na dialética de formulação, os estudantes resolveriam a integral apresentada, empregando técnicas de integração que conheciam para obter o resultado desejado. O nosso prognóstico foi confirmado, como podemos ver nas Figuras 43 e 44, onde apresentamos o desenvolvimento analítico produzido pelos alunos 2 e 3.

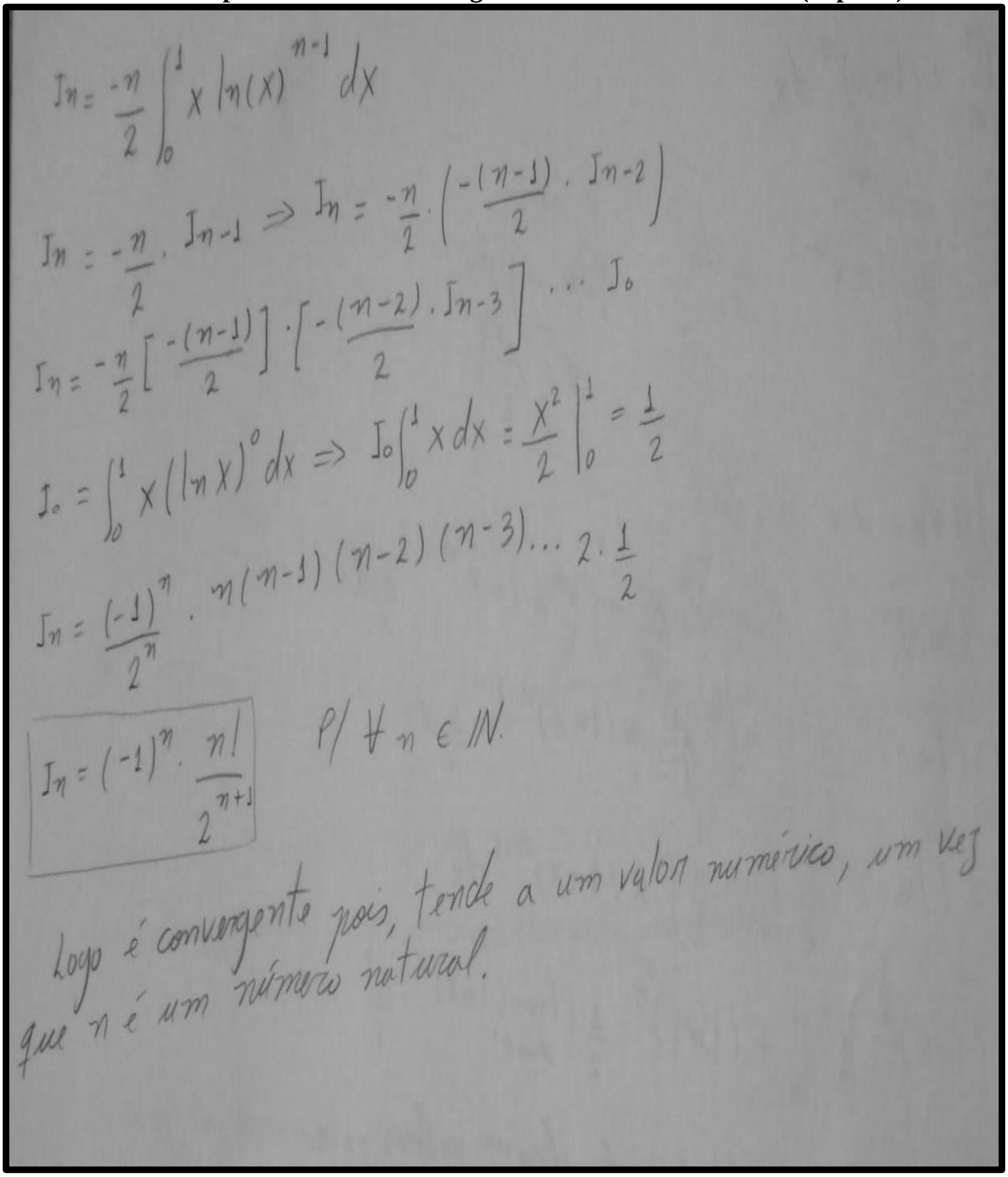
Na produção do aluno 2, exposta nas Figuras 43 e 44 percebemos que o mesmo empregou conhecimentos prévios para solucionar a integral. Além da técnica de integração por partes, em um determinado momento utilizou a regra de L'Hopital como uma estratégia auxiliar no modelo desenvolvido em sua resolução. A figura a seguir traz a continuidade do desenvolvimento apresentado pelo estudante 2.

Figura 43 - Produção do aluno 2, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 4 (1ª parte)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 44 - Produção do aluno 2, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 4 (2ª parte)



$$I_n = \frac{-n}{2}\int_0^1 x\, \ln(x)^{n-1}\, dx$$

$$I_n = -\frac{n}{2} \cdot I_{n-1} \Rightarrow I_n = -\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{(n-1)}{2} \cdot I_{n-2}\right)$$

$$I_n = -\frac{n}{2}\left[-\frac{(n-1)}{2}\right]\cdot\left[-\frac{(n-2)}{2}\cdot I_{n-3}\right] \dots I_0$$

$$I_0 = \int_0^1 x(\ln x)^0\, dx \Rightarrow I_0 \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{2^{n+1}}} \quad \text{p/ } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

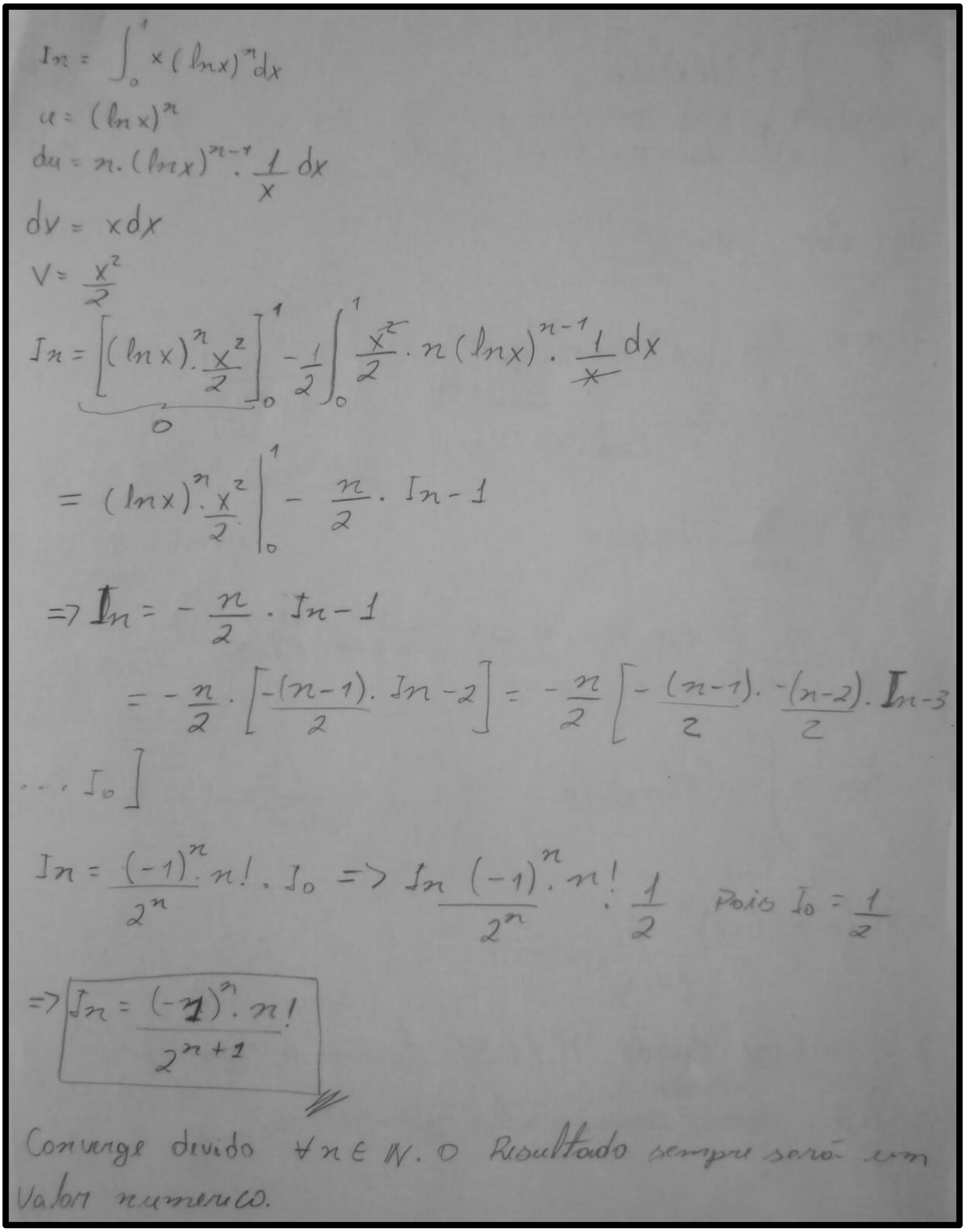
Logo é convergente pois, tende a um valor numérico, um vez que n é um número natural.

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno 2, na fase de formulação, emprega estratégias persuasivas para a resolução do problema da atividade 4, assim conforme Fischbein (1987) o referido estudante desenvolve *intuições antecipatórias,* na última linha de sua produção.

A Figura 45 apresenta a produção elaborada pelo aluno 3, na dialética de formulação da atividade 4.

Figura 45 - Produção do aluno 3, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 4



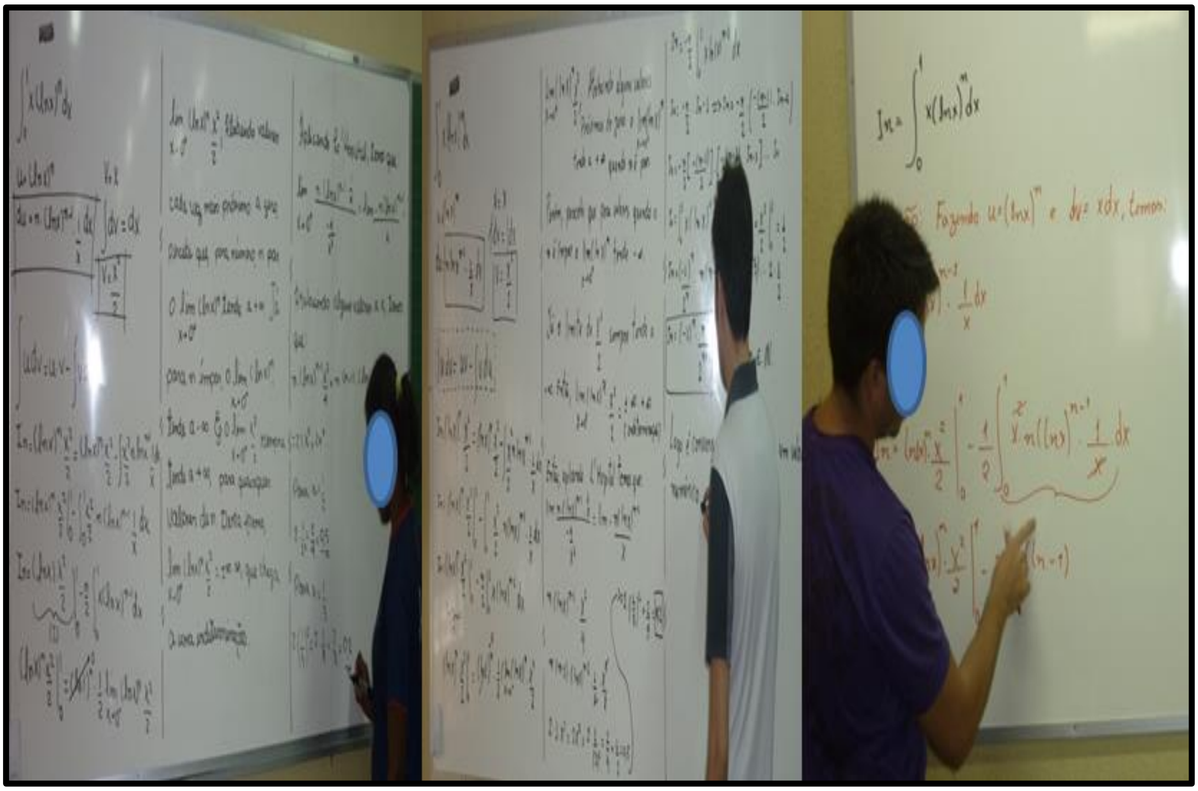
Fonte: Dados da pesquisa

Conforme Fischbein (1987), o aluno 3 também desenvolveu uma *intuição antecipatória*, uma vez que a solução para o problema, no caso o comportamento de convergência da IDP, surgiu como uma descoberta após aplicar uma estratégia de resolução da integral, empregando conhecimentos prévios referentes ao conteúdo.

A aluna 1, também recorreu à técnica de integração por partes para solucionar a integral em estudo e, após resolver a IDP, chegou à conclusão de que a integral assumia o comportamento de convergência, manifestando, assim como os estudantes 2 e 3, uma *intuição antecipatória*. A produção da referida aluna pode ser conferida nos apêndices dessa investigação.

Na Figura 46 apresentamos imagens no cenário de validação da situação didática no momento em que os estudantes apresentavam e justificavam suas estratégias de resolução para o problema proposto.

Figura 46 - Estudantes 1, 2 e 3 no cenário da dialética de validação da atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes, após inspecionarem a construção no GeoGebra e depois de desenvolverem analiticamente a resolução da integral depreenderam o comportamento de convergência da IDP, uma vez que, geometricamente, na soma visual, observaram que as contribuições de área tendiam a diminuir na medida em que $x \to 0^+$, para quaisquer valores de n e analiticamente chegaram ao valor numérico $(-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$, com n pertencente aos inteiros. Dessa forma, afirmamos que o objetivo da atividade 4 foi alcançado.

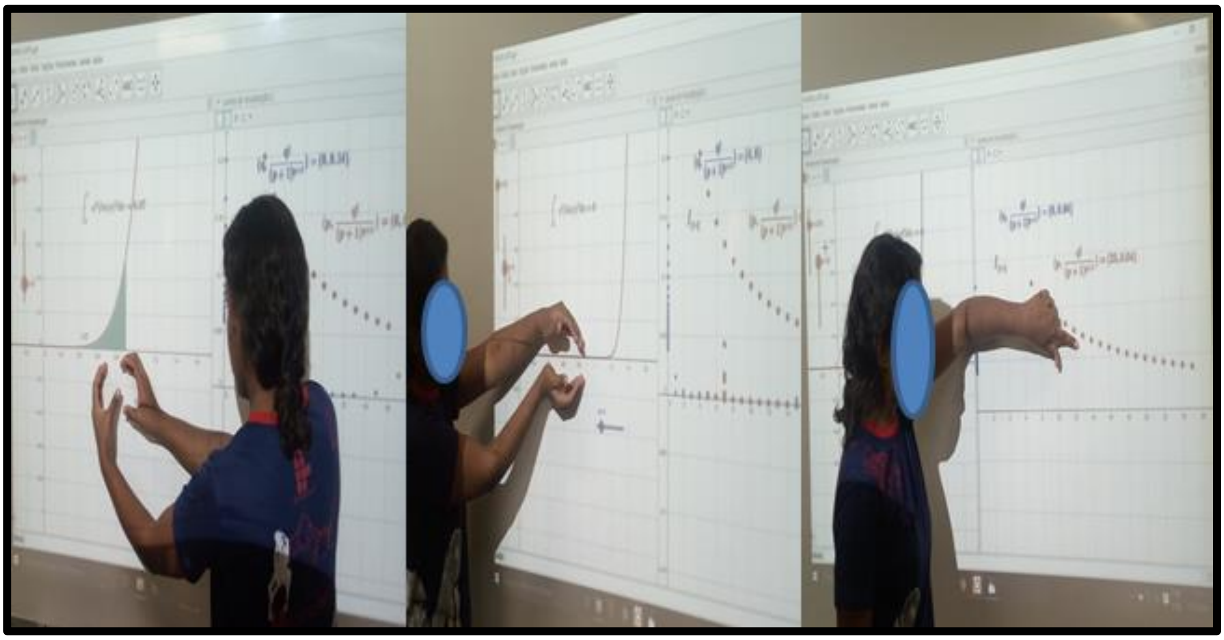
Referente à dialética de institucionalização, retomamos, nessa etapa, os conhecimentos produzidos pelos estudantes e apresentamos a proposição que afirma que para qualquer número natural n, remos $I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$), formalizando as conjecturas levantadas.

6.5 Análise a posteriori da situação didática V

Na atividade V, na dialética de ação, após receberem a situação proposta, os alunos passaram a inspecionar o GeoGebra. Em uma das janelas do *software*, mobilizaram os recursos para analisar as contribuições de áreas para a integral e na segunda janela verificaram o comportamento discreto das coordenadas dos pontos, fazendo variações dos parâmetros p e q, ao considerar valores $x \to 0^+$.

Na Figura 47, a aluna 1, apresenta suas conjecturas acerca do comportamento da integral, após apoiar-se na visualização para criar suas presunções sobre o fenômeno estudado.

Figura 47 - Ações gestuais da aluna 1 que manifestam a compreensão do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada na atividade 5



Fonte: Dados da pesquisa

Na dialética de ação registramos os áudios dos alunos no momento em que exploraram os recursos do GeoGebra. O cenário de manipulação do *software* foi favorável à manifestação de categorias intuitivas por parte dos estudantes. A seguir apresentamos alguns trechos dos registros em áudio dos sujeitos da pesquisa, para posteriormente classificarmos os tipos de intuição que foram identificadas.

Em relação ao comportamento da IDP analisada, em sua representação contínua no GeoGebra, os estudantes 1 e 3 apresentaram as seguintes averbações:

> Aluno 1: Quando q está no valor mínimo que é zero, considerando $p = 1$, nesse caso houve uma divergência para a integral. A contribuição de área e também o valor numérico crescia muito rapidamente pra direita, pra mais infinito. Nos outros casos quando aumentei q, com p pequeno ou grande, o número começou a ficar fixo, tendendo a estacionar ou convergir pra o número zero. No geral ela vai convergir.
>
> Aluno 3: variando os parâmetros p e q para valores bem próximos de zero, você percebe que ela converge porque dá pra ver que a contribuição de área tem um começo e um fim. Já para valores maiores em p e q, bem grandes mesmo, não dá pra ter essa concepção de divergente ou convergente. Visualmente para valores menores em p dá pra perceber que ela diverge. A primeira visão é que ela diverge, mas se a gente analisar com cuidado, vamos perceber que ela vai convergir. O mesmo acontece para valores maiores em q. Valores maiores em q visualmente, a primeira impressão é que ela vai divergir porque você não tá vendo o fim da área, mas porém se prestar um pouco mais de atenção percebe-se que ela converge. Vai chegar um momento que ela vai convergir. Quanto mais próximo de zero o parâmetro menor será a contribuição de área.

Os sujeitos 1 e 3 conseguem verbalizar as suas conclusões e, mesmo apresentando discursos não fundamentados em propriedades formais, apresentam justificativas para as suas inferências. Dessa forma, desenvolvem em seus discursos *intuições conjecturais*.

Já em relação à representação discreta dos pontos, o estudante 2 apresentou o seguinte discurso:

> Os pontos tão se concentrando no eixo x aqui. Eu vejo é que ela converge porque os pontos se concentram no eixo x. Não houve dispersão. É a integral vai convergir para todo valor de p e q e suas variações, tanto na contribuição de área quanto na dispersão dos pontos. È uma situação que sempre converge. (Aluno 2).

Percebemos que em suas ponderações, o estudante 2 também desenvolve *intuições conjecturais.*

Assim como nas situações didáticas anteriores, antecipamos nas análises *a priori* que na dialética de formulação, os sujeitos da pesquisa desenvolveriam as integrais dependentes de parâmetros, recorrendo a técnicas de integração conhecidas. A previsão foi confirmada nessa etapa, como pode ser observado na Figura 48 referente a produção do aluno 2. Os estudantes 1 e 3 também recorreram a técnica de integração por parte para calcular a integral e chegaram à mesma conclusão do sujeito 2. As produções dos sujeitos 1 e 3 ficarão expostas nos apêndices dessa pesquisa.

Figura 48 - Produção do aluno 2, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 5

Agora para p e q não-negativos. Definimos $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$

$u = (\ln x)^q \qquad dv = x^p dx$

$du = q\cdot(\ln x)^{q-1}\cdot \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int x^p dx \Rightarrow V = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

$$\int u\cdot v\,du = u\cdot v - \int v\,du$$

$$I_{p,q} = \underbrace{(\ln x)^q \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot q\cdot(\ln x)^{q-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\int_0^1 x^p(\ln x)^{p-1}\,dx$$

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\cdot I_{p,q-1}$$

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\cdot\left[\frac{-(q-1)}{p+1}\right]\cdot I_{p,q-2}$$

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\cdot\left[\frac{-(q-1)}{p+1}\right]\cdot\left[\frac{-(p-2)}{p+1}\right]\cdot I_{p,q-3}\cdots I_{p,0}$$

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p\cdot(\ln x)^0\,dx = \int_0^1 x^p\,dx$$

$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{p+1} - 0 = \frac{1}{p+1}$$

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q\cdot q}{(p+1)^q}\cdot(q-1)(q-2)\cdots I_{p,0}$$

$$I_{p,q} = (-1)^q\,\frac{q!}{(p+1)^q}\cdot I_{p,0}$$

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q\cdot q!}{(p+1)^q}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q\cdot q!}{(p+1)^{q+1}}$$

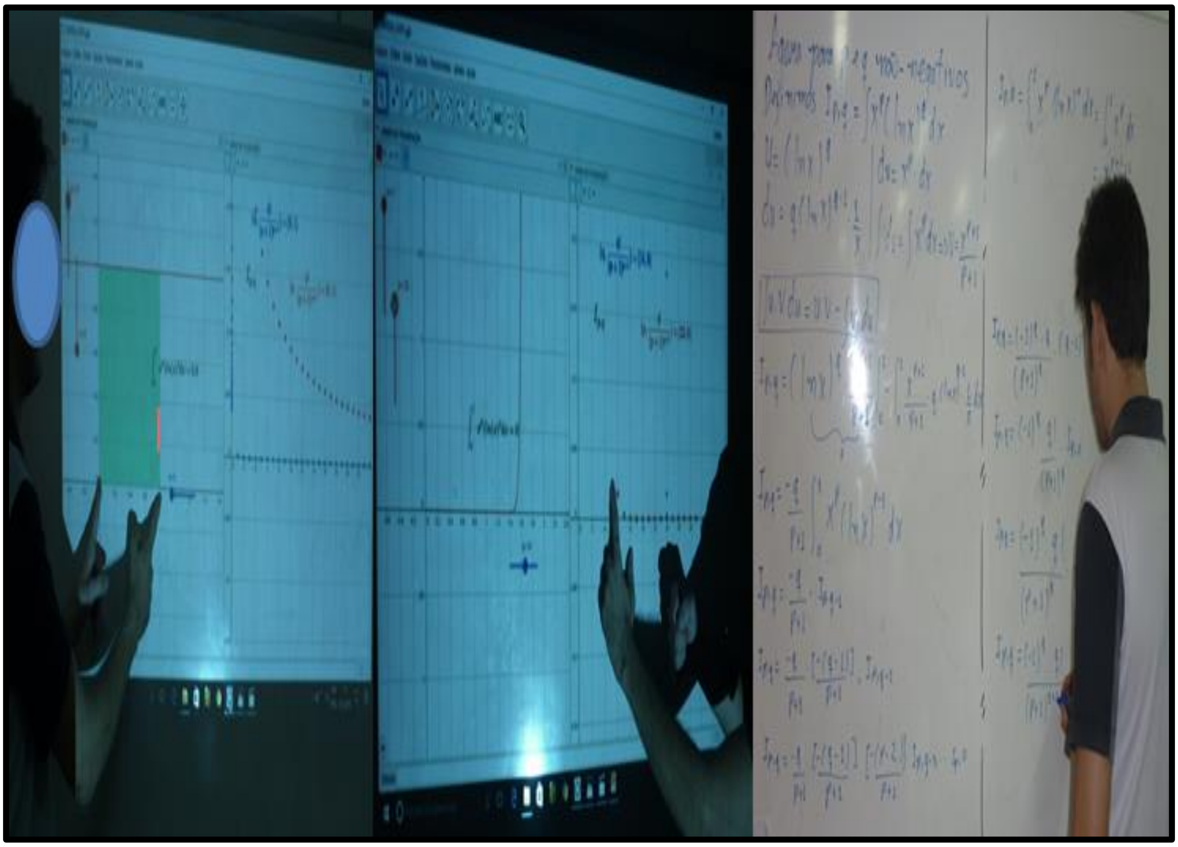
Percebo que convergente porque sempre dará um valor numérico já que, p e q são valores numéricos.

Fonte: Dados da pesquisa

No fragmento destacado, na Figura 48, identificamos que o estudante desenvolveu uma *intuição antecipatória*. A resposta encontrada para o problema veio como resultado do emprego de estratégias por parte do aluno que empenhou esforços para obter a solução da integral. Dessa forma, conforme Fischbein (1987), o sujeito desenvolveu uma *intuição antecipatória*.

Na dialética de validação da situação didática, os estudantes fizeram a exposição de suas compreensões acerca do comportamento de convergência/divergência da IDP estudada. Os sujeitos confrontaram os resultados obtidos na dialética de ação com a resposta encontrada na dialética de formulação. Na Figura 49 apresentamos as imagens do aluno 2, registradas nessa fase da TSD.

Figura 49 - Estudante 2 no cenário da dialética de validação da atividade 5



Fonte: Dados da pesquisa

Após comparar os resultados analíticos com os dados encontrados com a exploração gráfico-geométrica no GeoGebra, os estudantes comprovaram que as informações coincidiram e puderam confirmar o caráter de convergência da IDP analisada. Dessa forma, concluíram com sucesso a atividade 5, fazendo com que os objetivos dessa situação didática fossem alcançados.

Posteriormente, para finalizar a situação didática, apresentamos a proposição atinente ao assunto estudado e, dessa forma, executamos a institucionalização, etapa final da TSD.

6.6 Validação do estudo

Para validar o aparato conceitual adquirido no percurso da nossa inquirição, ressaltamos a necessidade de confrontar os dados coligidos nas seções apresentadas com os dados compilados de modo empírico na investigação. Para tanto, apoiamo-nos na perspectiva de Laborde (1997) que distingue dois tipos de validação, a saber: validação interna e validação externa.

Para Laborde (1997) a validação interna é posta a efeito em relação às condutas observadas de professores e estudantes e compõe alguns elementos tais como:

> (1) descrição do aluno genérico, da classe e das condutas e os tipos majoritários da classe, estudo se sua evolução ao decurso da experimentação e adequação tendo em vista os estudantes; (2) escolha de situações particulares julgadas significativas na sequência, relativamente as quais as produções dos estudantes são produzidas; (3) seguir diacronicamente algum ou alguns estudantes durante longo tempo, a fim de observar a regularidade das concepções e habilidades adquiridas. (LABORDE 1997, p. 105, tradução nossa).

Já em relação à validação externa, Laborde (1997, p.105, tradução nossa) esclarece que esta compreende dois elementos, que são: “(1) comparação dos estudantes antes e depois da aplicação da sequência, por meio de entrevistas ou questionários; (2) comparação com as produções de estudantes externos ao tipo de experimentos e sequencia estruturada”.

Esclarecemos que, em consonância com Laborde (1997), em nossa investigação, trabalhamos tanto com a validação interna quanto com a externa, porém optamos por realizar apenas os itens (1) e (2) do primeiro tipo de validação e a parte (1) da validação externa.

A escolha pelos itens (1) e (2) da validação interna se justifica pelo fato de não dispormos de um tempo mais extenso a fim de proporcionar o acompanhamento dos alunos participantes da pesquisa por um período prolongado. Mas no que se refere ao item (1) da validação interna, no decorrer da inquirição, buscamos proporcionar aos estudantes situações de ensino que o levassem a assumir uma postura de pesquisador ante as situações-problema propostas. Estivemos atentos às suas condutas e podemos perceber que os mesmos assumiram seus papéis no contrato didático, estando aptos a executar e buscar soluções para as questões apresentadas. Dessa forma, os sujeitos da pesquisa, por meio da visualização proporcionada pelas construções do *software* GeoGebra, puderam criar conjecturas e levantar hipóteses atinentes ao comportamento de convergência ou divergência das integrais estudadas. Ademais, as situações didáticas amparadas na visualização, proporcionaram aos estudantes manifestar categorias intuitivas no contexto de aprendizagem das Integrais Generalizadas e Integrais Dependentes de Parâmetros.

No que diz respeito ao item (b) da validação interna, procuramos identificar os *elementos de transição* e *elementos de ruptura* na passagem do contexto das Integrais Generalizadas para o contexto das IDPs, uma vez que esses elementos podem atuar como um obstáculo à aprendizagem do estudante, no caso dos *elementos de ruptura*, ou mesmo impulsionar a evolução do aluno frente à aquisição de conteúdos, no caso dos *elementos de transição*.

Nesse contexto, constatamos em nossa inspeção aos livros didáticos, a identificação de *elementos de transição*, no que concerne à manutenção das simbologias e compreensão de conceitos semelhantes no campo de abordagem das IGs e das IDPs. Também identificamos um *elemento de ruptura* que trata da existência do parâmetro presente no contexto das IDPs e ausente na abordagem das IGs.

Também buscamos promover, por meio da visualização, um cenário que incitasse o aluno a conjecturar e impulsionasse a manifestação de categorias intuitivas nas relações entre o estudante e o conhecimento matemático, o que foi constatado nas análises *a posteriori* de nossa Engenharia Didática.

No que concerne à validação externa, o elemento a ser considerado nesse caso se resume ao item (1), uma vez que trabalhamos apenas com as análises das produções dos alunos de uma turma da disciplina Cálculo II, na própria instituição de ensino, uma vez que o curso de Licenciatura em Matemática do IFCE – *Campus* Cedro dispõe de um grupo pequeno de estudantes na referida disciplina. Referente a este quesito, em nossa inquirição na parte (1) da validação externa não aplicamos questionários antes e depois da aplicação da experimentação vivenciada pelos estudantes, porém por meio dos dados coligidos em vídeos, imagens e registros escritos, constatamos que a visualização explorada com os recursos do *software* GeoGebra permitiu aos estudantes adquirir um conhecimento que não seria possível de ser assimilado em um espaço em sala de aula que privilegiasse a abordagem apenas analítica e algébrica do conteúdo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta investigação, apresentamos uma proposta metodológica com etapas previstas por um *design* de investigação influenciada pela vertente da matemática francesa, amparada no uso da tecnologia (tendo em vista sua experimentação) que proporcionou aos estudantes da disciplina de Cálculo II um ambiente propício à aquisição de conhecimentos atinentes a critérios de convergência/divergência de Integrais Dependentes de Parâmetros. A intenção era, de acordo com Brousseau (1986) *apud* Almouloud (2007), criar situações de ensino que modificassem um conjunto de comportamento dos alunos quando estes passassem a adquirir um conjunto de conhecimentos relacionados ao objeto matemático em estudo. O meio munido de intensões didáticas, promoveu aos sujeitos participantes da investigação criar conjecturas, levantar hipóteses e, por sua vez, apropriar-se dos conceitos relacionados às IDPs.

Ademais, em nossa inquirição, apoiamo-nos na Engenharia Didática - ED como metodologia de pesquisa ou *design* de investigação, que nos proporcionou conceber, descrever, organizar e sistematizar as respectivas etapas da presente investigação. A ED aliada a TSD permitiu ainda conceber e delinear as situações didáticas de ensino sobre IDPs, executar a experimentação, fazer a coleta de dados e analisar as sequências de ensino ocorridas em sala de aula, com origem em um confronto ou movimento clássico previsto, envolvendo os dados das análises *a priori* com os dados da experimentação.

Ao perpassar pela primeira fase da ED, as análises preliminares, constatamos no levantamento do referencial bibliográfico, que existem diversos trabalhos relativos ao ensino e aprendizagem da Integral Definida. Já em relação às Integrais Generalizadas, deparamo-nos com uma produção representativa sobre IGs, mas no que se refere às Integrais Dependentes de Parâmetros, identificamos uma escassez de trabalhos. Encontramos, apenas uma pequena profusão de pesquisas produzidas no exterior.

A constatação da escassez de trabalhos relacionados ao ensino de IDPs foi um dos fatores que nos motivou a trabalhar com esse objeto matemático nessa investigação, principalmente por apontar em nosso trabalho um viés diferenciado de abordagem desse conteúdo, ao tratar a visualização como um caminho que pode promover a compreensão de determinados conceitos relacionados aos critérios de convergência/divergência de IDPs.

Acreditamos que as situações de ensino previamente elaboradas e executadas na fase de experimentação proporcionaram, aos sujeitos da pesquisa, mobilizar conhecimentos acerca das IGs e IDPs. Isso foi evidenciado pelas condutas dos estudantes que formularam conjecturas tácitas e intuitivas e validaram os conceitos em aquisição ao decurso da TSD. Ademais, a representação geométrica proporcionada pelo *software* GeoGebra auxiliou a percepção do comportamento dinâmico de convergência/divergência de IGs, no primeiro momento e IDPs, em um segundo momento, o que facilitou a formulação de conjecturas e a correspondente elaboração de hipóteses manifestadas nas apreensões discursivas pelos estudantes.

Em relação à fundamentação teórica e metodológica de nossa pesquisa, ressaltamos que a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau foi oportuna à nossa investigação. Embora os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE - CEDRO estejam habituados a aulas com predomínio do caráter analítico dos conteúdos, as sequências didáticas de ensino atreladas ao uso da tecnologia, proporcionaram aos sujeitos mobilizar conhecimentos de forma intuitiva e construir por si mesmo a aprendizagem de conceitos atinentes aos objetos matemáticos estudados nessa inquirição. A visualização, proporcionada pelo *software*, auxiliou os estudantes a perceberem propriedades e compreenderem conceitos que seriam difíceis de assimilar com uma abordagem tácita e analítica do conteúdo.

Além do mais, a abordagem didática promovida pelas sequências de ensino, amparadas na percepção e visualização, facilitou à manifestação de raciocínios intuitivos por parte dos alunos, uma vez que em suas ações, formulações e validações foram identificadas categorias intuitivas que de acordo com Fischbein (1987) foram categorizadas em intuições *afirmativas*, intuições *conjecturais* e intuições *antecipatórias*.

Assim, retomando as hipóteses levantadas para essa investigação, podemos constatar após as análises *a priori* da ED, feita nessa pesquisa, que a primeira presunção da investigação foi validada, uma vez que podemos confirmar que elementos intuitivos que se manifestam no contexto da convergência de IGs proporcionam uma readaptação e tornam a se manifestar em uma conjuntura de aprendizagem das IDPs.

Apreendemos ainda, após as análises dos dados coletados nesta pesquisa, que a segunda e terceira hipóteses levantadas para essa inquirição também podem ser validadas, uma vez que a exploração dos recursos computacionais proporcionou a mobilização de um conhecimento atinente a IDPs que ultrapassou o caráter formal e analítico predominante no meio acadêmico e, em particular, nas abordagens dos conteúdos de cálculo integral e diferencial.

A exploração do GeoGebra e a visualização proporcionada por seus recursos gráficos e geométricos foram imprescindíveis para a manifestação de categorias intuitivas no desenvolvimento das situações didáticas em torno das IDPs, por proporcionar aos sujeitos da pesquisa produzir intuições e comparar a compreensão geométrica do objeto matemático com o desenvolvimento analítico e operatório das IDPs.

Outro ponto que podemos evidenciar ainda em nossas considerações, está relacionado à transição Interna do Cálculo. Nas análises de alguns livros didáticos que servem como referencial didático na disciplina de Cálculo II, podemos identificar *elementos de transição* e *elementos de ruptura* no contexto de Integrais Generalizadas que tendem a se manifestar no ensino de Integrais Dependentes de Parâmetros.

Evidenciamos a ocorrência de elementos de *transição* na passagem da noção de IGs para a noção de IDPs nas definições expostas pelos autores das obras discutidas, uma vez que a noção formal do comportamento de convergência/divergência do primeiro tipo de integral possui sentido semelhante no contexto das IDPs. Embora, o conceito de convergência/divergência seja explorado com significados semelhantes no plano de estudo das IGs e IDPs, constatamos a existência de um elemento de *ruptura* que pode atuar como um entrave a aprendizagem dos estudantes de cálculo integral na passagem do contexto das IGs para as IDPs. Tal elemento trata da existência do parâmetro em funções integrantes na classe das IDPs.

Enfatizamos também em nossas ressalvas, a ausência da abordagem das Integrais Dependentes de Parâmetros nos livros didáticos. No processo de transição interna do cálculo integral, após estudarem as integrais generalizadas/impróprias, os estudantes adentram no plano de estudo de integrais de funções de mais de uma variável, uma vez que a abordagem das IDPs é negligenciada.

Acreditamos que a ausência do trato das IDPs no plano de estudo das integrais possa promover um entrave na aprendizagem de integrais de funções de mais de uma variável na disciplina de Cálculo III, porém esta é uma problemática que foge do contexto de nossa investigação, mas que pode ser investigada em pesquisas posteriores, entretanto, não nos furtamos de empregar a perspectiva inaugurada pela TINC, a fim de considerar um longo e nem sempre automático percurso de estudos dos aprendizes, no transcorrer das disciplinas de Cálculo I, II e III.

Temos como uma das perspectivas futuras investigar a problemática apresentada no parágrafo anterior e prosseguir com investigações atinentes a outras IDPs, explorando os recursos computacionais por meio da visualização e trabalhando com a elaboração e execução de sequência de ensino em sala de aula. Uma vez que, no Brasil ainda observamos a inexistência de uma pesquisa sistemática de certos assuntos da teoria das funções em várias variáveis e, o assunto IDP é um deles.

Pretendemos, ainda, em investigações futuras continuar com o aporte teórico da TSD e manter o delineamento da investigação seguindo as etapas propostas pela metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, tendo em vista que, ao decurso de um percurso histórico de desenvolvimento de mais de 30 anos, a constituição e definição de um campo de estudos sistemáticos, com origem na vertente francesa, permitiu uma ação investigativa que prescinde do emprego de corpus teóricos emprestados e “exportados” de outros campos epistêmicos que não possuem a aderência esperada, no sentido de explicar os reais problemas e fenômenos de ensino e aprendizagem em Matemática e, de modo particular, explicar os entraves vinculados com a noção de integral de Riemann.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.** 2011. 497 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Faculdade de Educação – Faced, Universidade Federal do Ceará,, Fortaleza, 2011. Disponível em: <www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3166/1/2011_Tese_ FRVALVES.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2016.

ALVES, Francisco Régis; BORGES NETO, Hermínio. A contribuição de Efrain Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. Conexões, Ciência e Tecnologia, p.38-54, 2011. Disponível em: <http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/441>. Acesso em: 25 jul. 2015.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Visualização de integrais impróprias em um parâmetro com o auxílio do GeoGebra. **Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia,** Canoas, v. 3, n. 1, p.1-15, 2014a. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/download/1821/1423>. Acesso em: 30 jun. 2017.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Transição interna do cálculo: o caso das integrais impróprias em um parâmetro.** Sinergia**,** São Paulo, v. 15, n. 2, p.138-148, jun. 2014b.

ALVES, Francisco, R. V. & Lopes, M, A. Métodos de integração: uma discussão do seu ensino com o apoio no software GeoGebra. In: *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 5, nº 1, 5 – 21, 2013.

ALVES, Francisco, R. V. Transição Interna do Cálculo: o caso das integrais impróprias em um parâmetro. In: *Revista Sinergia* – IFSP, v. 15, nº 1, 138 – 148, 2014. Disponível em: http://www2.ifsp.edu.br/edu/prp/sinergia/complemento/sinergia_2014_n2/pdf_s/artigos_sinergia_2014_n2.htm

ARTIGUE, Michelle**. Ingénierie Didactique**. Recherches em Didactique des Mathématiques, vol.9/3, p.281-308. Grenoble, La pensée Sauvage Édtions.

BERMÚDEZ, EliÉcer Aldana. **Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría “APOE”.** 2011. 431 f. Tese (Doutorado) Departamento de DidÁctica de La MatemÁtica y DidÁctica de Las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca Facultad de EducaciÓn, Salamanca, 2011. Disponível em:

<https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/83204/1/DDMCE_AldanaBerm%C3%BAdez_El%C3%A9cer_Comprensi%C3%B3n.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática.** 3. ed. São Paulo: Bluscher, 2010.

BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral.** São Paulo: Pearson Makron Books, 1999. 1 v.

BROUSSEAU, Guy. **Theorisation des phenomenes d'enseignement des mathematiques.** 1986. 906 f. Tese (Doutorado) - L'univers ItÉ de Bordeaux I, Bordeaux, 1986. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/509225/filename/TheseetAnnexesGBA.pdf>. Acesso em: 13 set. 2015.

CARGNIN, Claudete. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real:** possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 416 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Para A Ciência e A Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/642>. Acesso em: 30 jun. 2015.

COOPER, Leon. **A new interpretation of Problem 10 of the Moscow Mathematical Papyrus.Historia Mathematica**. Historia Mathematica**,** Dere, n. 37, p.11-27, 2010. Disponível em: <main.pdf?_tid=b326a21c-2a4b-11e6-8263->. Acesso em: 25 maio 2016.

DANA-PICARD, Thierry. **Technology-assisted discovery of conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic**. In: *Proceedings of CERME 4,* 1 – 9, 2005a. Disponível em: < http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/9/Dana-Picard.pdf >. Acesso em: 17 set. 2015.

DANA-PICARD, Thierry. **Sequences of Definite Integrals, Factorials and Double Factorials**. In: *Journal of Integer Sequences*. v. 8, 2005b. Disponível em: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Dana-Picard/dana23.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2015.

DANA-PICARD, Thierry. **Integral presentations of Catalan Numbers. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.** v. 41, nº 1, January, 63 – 138, 2010. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00207390902971973>. Acesso em: 12 ago. 2015.

DANA-PICARD, Thierry; Zeitoun, Dabid. G. **Parametric improper integrals, Wallis formula and Catalan numbers**. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. v. 43, nº 4, June, 515 – 520, 2011. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/0020739X.2011.599877>. Acesso em: 12 ago. 2015.

DANA-PICARD, Thierry; Zeitoun, Dabid. G. **Sequences of definite integrals, infinite series and Stirling numbers**. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. v. 43, nº 4, June, 515 – 520, 2012.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. 9 v.

ESCARLATE, Allan de Castro. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral**. 2008. 154 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino em Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/09 Allan Escarlate.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in Science and Mathematics:** An Educational Approach. 5. ed. Springer Netherlands, 1987.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S.; CAMACHO, Matías**. Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. the case of the improper integral. Proceedings Of The 28th Conference Of The International,** Canary Islands, v. 2, p.479-486, 2004. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/237261819_LEGITIMIZATION_OF_THE_GRAPHIC_REGISTER_IN_PROBLEM_SOLVING_AT_THE_UNDERGRADUATE_LEVEL_THE_CASE_OF_THE_IMPROPER_INTEGRAL>. Acesso em: 14 fev. 2016.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro Santiago. **La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.** 2005. 498 f. Tese (Doutorado), Universidad de La Laguna, Laguna, 2005.

GONZÁLEZ-MARTIN, Alejandro, S. & Camacho, Machin. M. Sobre la conprensión en estudiantes de matemáticas del concept de integral impropria, algunas dificuldades, obstáculos e errores. In: *Enseñaza de las Ciencias*. v. 23, nº 1, 81 – 96, 2005a.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2014. 2v.

HSIA, Yuk. Wah. **A utilização do livro didático por parte do aluno ao estudar integral** (dissertação de mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade de São Paulo. 2006. 87f. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-05-08T09:50:22Z-3063/Publico/EDM%20-%20Yuk%20Wah%20Hsia.pdf.>. Acesso em: 12 jul. 2015.

LABORDE, Colette. **Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives**. Didaskalia, 10, p.97-112, 1997. Disponível em: <http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/23800/DIDASKALIA_1997_10_97.pdf?sequence=1>. Acesso em: 13 nov. 2016.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com Geometria Analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.1 v.

MILANOVIC, Marina; Takaci, Durdika, & Milajic, Aleksandar. **Multimedia approach in teaching mathematics – example of lesson about the definite integral application for determining an área**. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. v. 42, nº 2, March, 175 – 187, 2011. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/0020739X.2010.519800>. Acesso em: 12 jul. 2015.
.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a idéia de Situações Didática**. In: SEMA-SEMINÁRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA/FEUSP, 2008, Seminário**.**2008. Disponível em: <www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2015.

RIBEIRO, Marcos Vinicius. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas.** 2010. 324 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91053/ribeiro_mv_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 25 jul. 2015.

SEVIMLI, Eyup. & Delice, Alice. **The influence of teacher candidates' spatial visualization ability on the use of multiple representations in problem solving of definite**

integrals: a qualitative analysis. In: *Research in Mathematics Education*, v. 13, nº 1, December, 93 – 94, 2011. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14794802.2011.550750>. Acesso em: 12 jul. 2015.

SEVIMLI, Eyup. & Delice, Alice. **The relationship between students' mathematical thinking types and representation preferences in definite integral problems**. In: *Research in Mathematics Education*, v. 14, nº 3, December, 295 – 296, 2012. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14794802.2012.734988>. Acesso em: 12 jul. 2015.

SIMMONS, George F.. **Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. 1 v.

STEWART, James. **Cálculo.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 1 v.

TOMÉ, Mario. T. **Integral definida, cálculo mental Y nuevas tecnologias**. (tesis doctoral). Valladolid: Universidad de Valladolid, 2011. 1114f. Disponível em: <file:///C:/Users/usuario/Downloads/TESIS%20164-120510.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2015.

VANINSKY, Alexander. **Integral definition of the logarithmic function and the derivative of the exponential function in calculus**. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. v. 46, nº 3, 450 – 456. November, 2014. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/0020739X.2014.982732>. Acesso em: 12 jul. 2015.

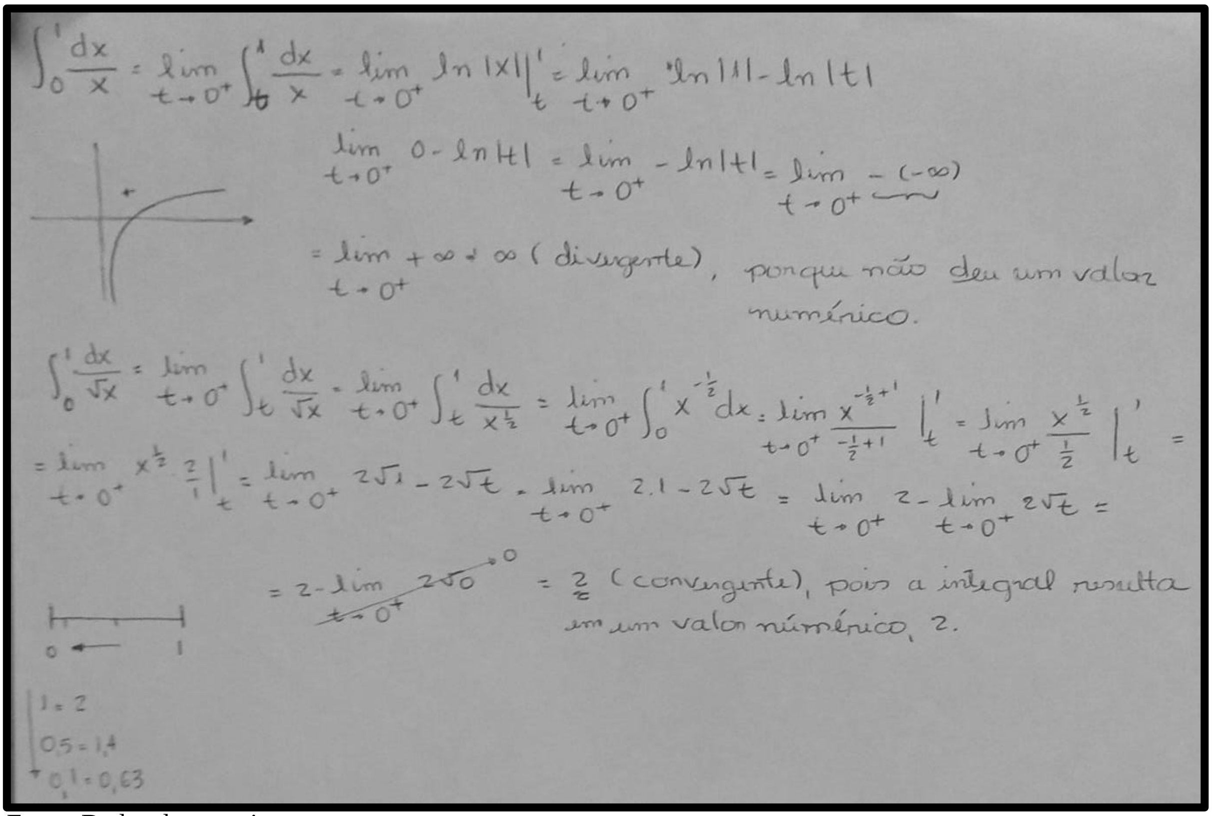
APÊNDICES

APÊNDICE A – Outros dados empíricos relacionados as análises cognitivas

As figuras seguintes apresentam o desenvolvimento analítico das integrais solucionadas pelos alunos na fase de formulação. Os estudantes recorreram a técnicas de integração aprendidas na disciplina de Cálculo II para desenvolver as integrais propostas nas sequencias de ensino.

Inicialmente, os sujeitos da pesquisa resolveram duas situações problemas referentes a Integrais Generalizadas e posteriormente resolveram três problemas referentes ao caso das Integrais Dependentes de Parâmetros. Alguns dos extratos dos registros analíticos foram apresentados no corpo do texto dessa investigação. Os registros aqui apresentados correspondem a outros dados empíricos coligidos e que não foram expostos diretamente nas análises.

Figura 50 - Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência das IGs da atividade 1



$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \ln|1| - \ln|t|$$

$$\lim_{t\to 0^+} 0 - \ln|t| = \lim_{t\to 0^+} -\ln|t| = \lim_{t\to 0^+} -(-\infty)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} +\infty = \infty$$ (divergente), porque não deu um valor numérico.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{1}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t} = \lim_{t\to 0^+} 2.1 - 2\sqrt{t} = \lim_{t\to 0^+} 2 - \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{t} =$$

$$= 2 - \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{0} = 2$$ (convergente), pois a integral resulta em um valor numérico, 2.

0 1

1 = 2

0,5 = 1,4

0,1 = 0,63

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 51 - Produção do aluno 3, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência das IGs da atividade 1

Decidir o caráter de congência/divergência das integrais $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.   V

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Solução: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} [\ln|x|] \Big|_t^1 =$

$\lim_{t\to 0^+} (\ln|1| - \ln|t|) = \lim_{t\to 0^+} (-\ln|t|) = +\infty$

Se atribuirmos valores a $t \to 0^+$. Temos por exemplo se t for $\frac{1}{2}$, temos que $\lim_{t\to 0^+} (-\ln(\frac{1}{2})) = \lim_{t\to 0^+} (-(\ln 1 - \ln 2))$
$= \lim_{t\to 0^+} (\ln 2) \cong 0{,}7$ será sempre Positivo.

Logo a integral diverge.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Solução. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-1/2} dx$

$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left[2x^{1/2}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{t}\right]$

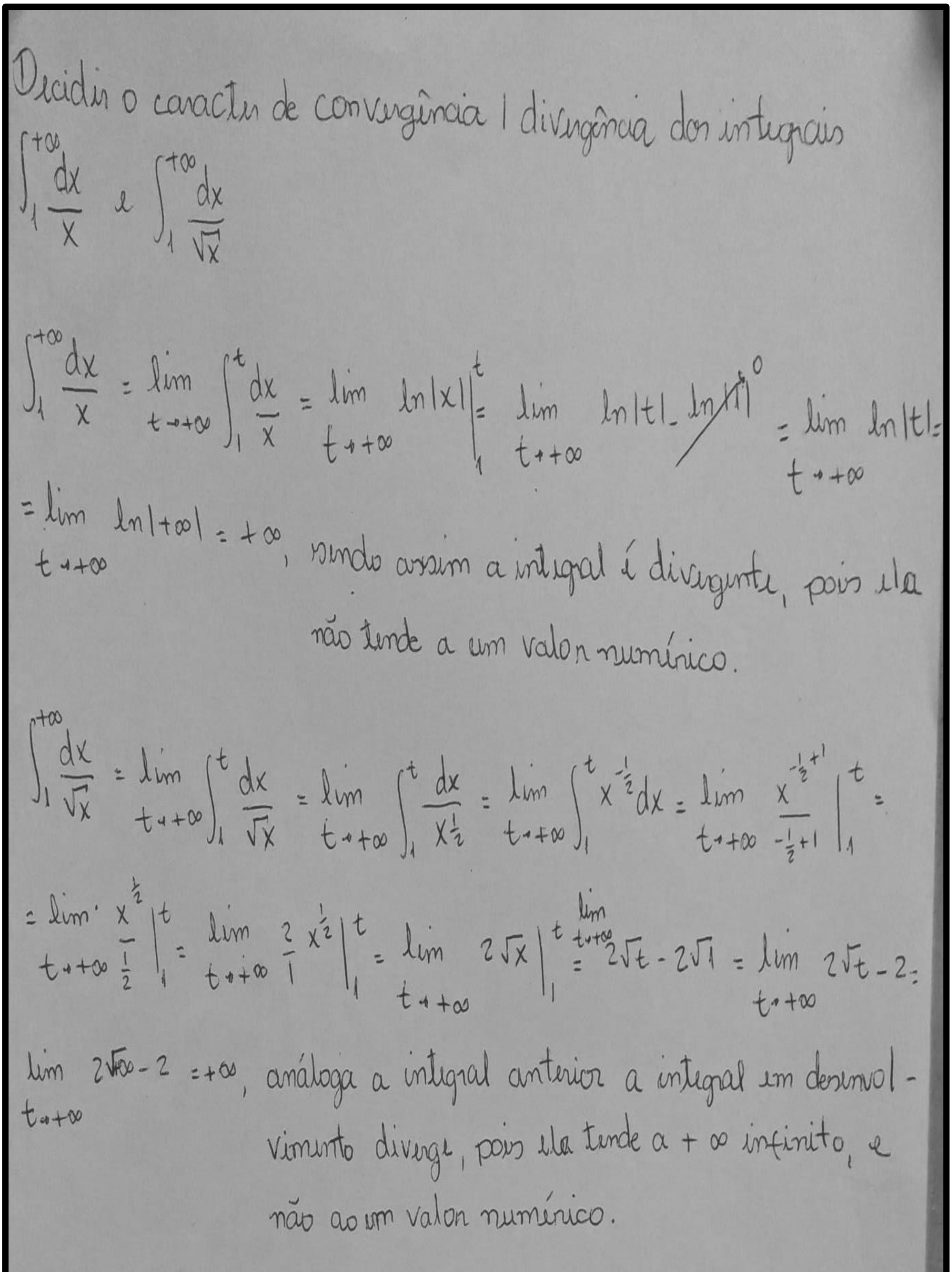
$= \lim_{t\to 0^+} \left[2(1 - \sqrt{t})\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[2 - \infty\right] = +\infty$

Como 2 é uma constante temos que o limite em questão tenderá para $+\infty$.

Logo a integral é divergente.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 52 - Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência das IGs da atividade 2



Decidir o caracter de convergência / divergência das integrais $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln|t| - \cancel{\ln|1|}^{0} = \lim_{t\to+\infty}\ln|t| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\ln|+\infty| = +\infty$$

, sendo assim a integral é divergente, pois ela não tende a um valor numérico.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}2\sqrt{t} - 2\sqrt{1} = \lim_{t\to+\infty}2\sqrt{t} - 2 =$$

$$\lim_{t\to+\infty}2\sqrt{+\infty} - 2 = +\infty$$

, análoga a integral anterior a integral em desenvolvimento diverge, pois ela tende a $+\infty$ infinito, e não ao um valor numérico.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 53 - Produção do aluno 2, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência das IGs da atividade 2

Decidir o caráter de convergência/divergência das integrais

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} = \lim_{t \to +\infty} \cancelto{+\infty}{\ln|t|} - \cancelto{0}{\ln|1|}$$

$$= \boxed{+\infty}$$

Assim, concluimos que a integral é divergente.

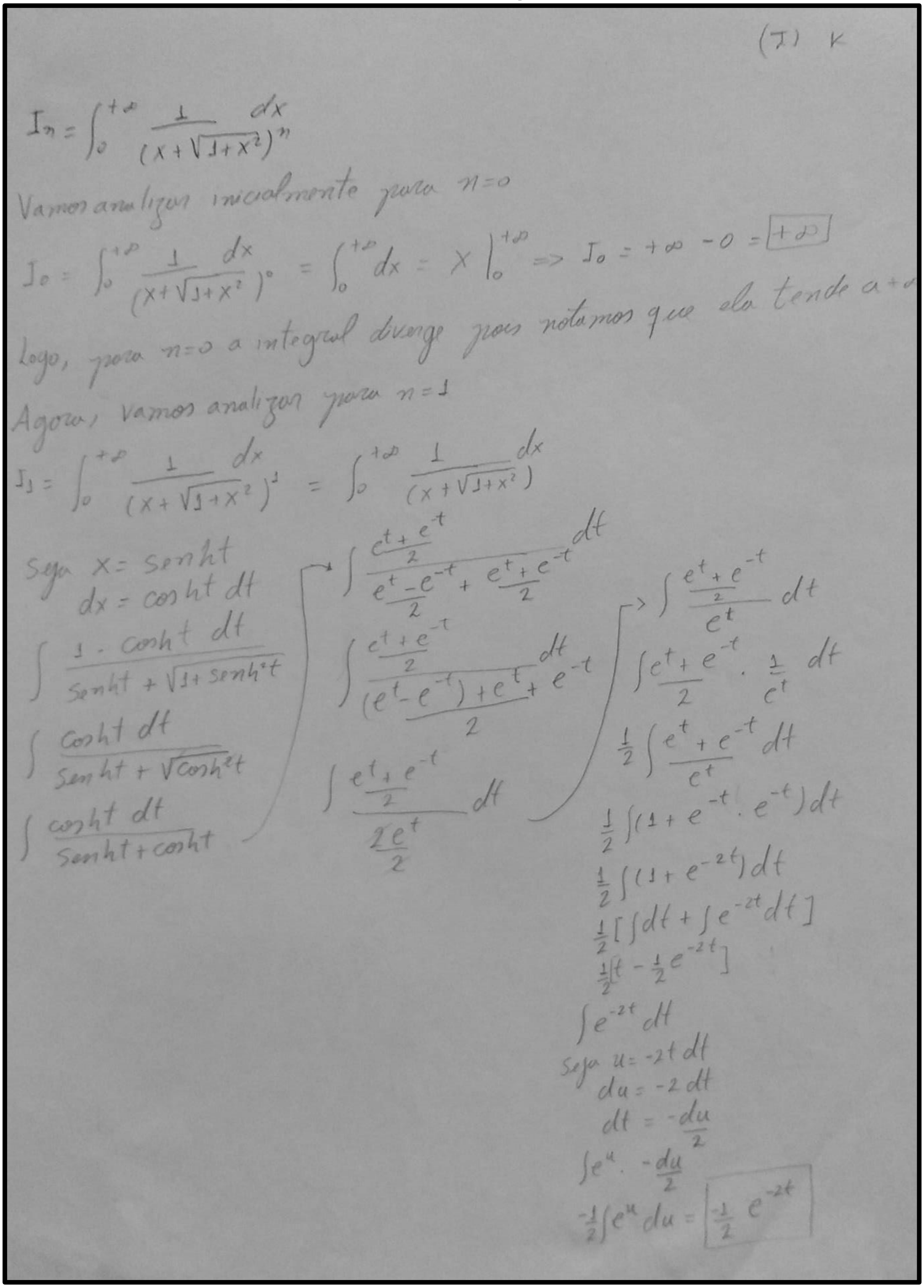
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-1/2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_1^t = \lim_{t \to +\infty} 2x^{1/2} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} 2\sqrt{t} - 2\sqrt{1} = \lim_{t \to +\infty} 2\sqrt{t} - 2 =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \cancelto{+\infty}{2\sqrt{t}} - 2 = \boxed{+\infty}$$ Assim, vemos que diverge, pois, temos como resultado $+\infty$.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 54 – Parte I da produção do aluno 2, na fase de formulação, referente a descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3



(I) K

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}\,dx$$

Vamos analizar inicialmente para $n=0$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^0}\,dx = \int_0^{+\infty} dx = x\Big|_0^{+\infty} \Rightarrow I_0 = +\infty - 0 = \boxed{+\infty}$$

Logo, para $n=0$ a integral diverge pois notamos que ela tende a $+\infty$

Agora, vamos analizar para $n=1$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}\,dx$$

Seja $x = \operatorname{senh} t$

$dx = \cosh t\, dt$

$$\int \frac{1 \cdot \cosh t\, dt}{\operatorname{senh} t + \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}}$$

$$\int \frac{\cosh t\, dt}{\operatorname{senh} t + \sqrt{\cosh^2 t}}$$

$$\int \frac{\cosh t\, dt}{\operatorname{senh} t + \cosh t}$$

$$\int \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}}\,dt$$

$$\int \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{(e^t-e^{-t})+e^t+e^{-t}}{2}}\,dt$$

$$\int \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{2e^t}{2}}\,dt$$

$$\int \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{e^t}\,dt$$

$$\int \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{1}{e^t}\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{e^t+e^{-t}}{e^t}\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int (1+e^{-t}\cdot e^{-t})\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int (1+e^{-2t})\,dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\int dt + \int e^{-2t}\,dt\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]$$

$$\int e^{-2t}\,dt$$

Seja $u = -2t\,dt$

$du = -2\,dt$

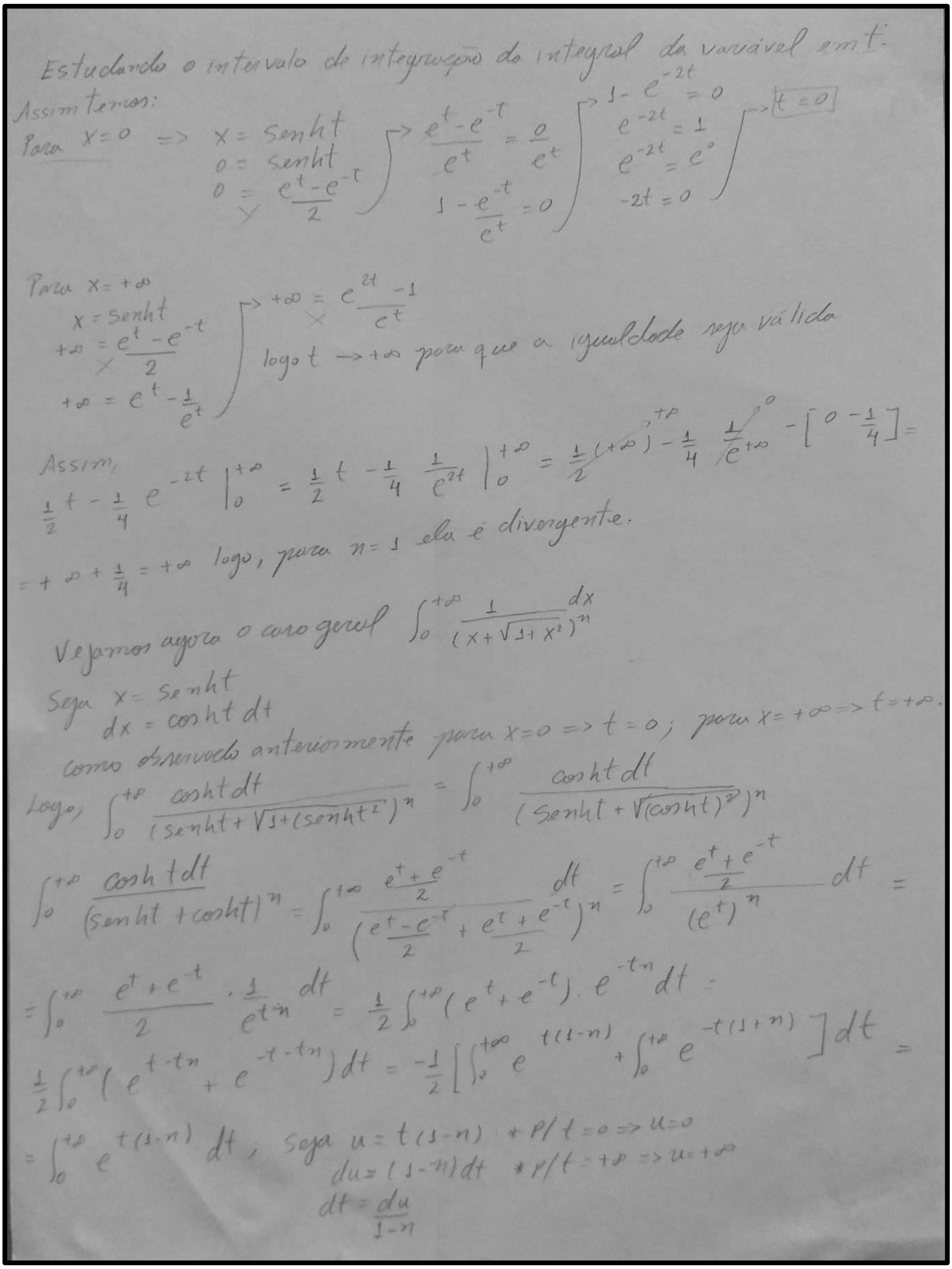
$dt = -\frac{du}{2}$

$$\int e^u \cdot -\frac{du}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int e^u\,du = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-2t}}$$

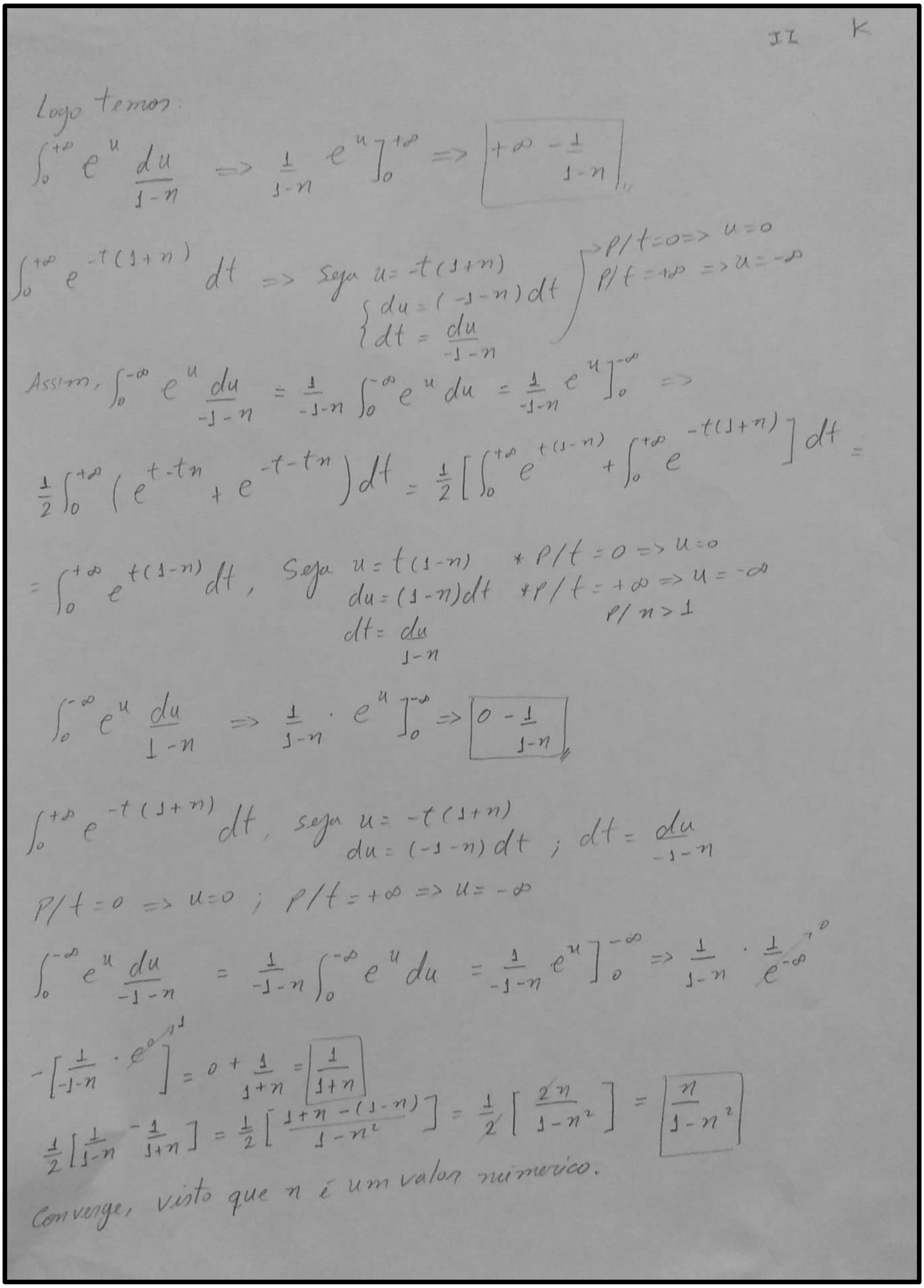
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 55 – Parte II da produção do aluno 2, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 56 – Parte III da produção do aluno 2, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 3



II K

Logo temos:

$\int_0^{+\infty} e^u \frac{du}{1-n} \Rightarrow \frac{1}{1-n} e^u \Big]_0^{+\infty} \Rightarrow \boxed{+\infty - \frac{1}{1-n}}$

$\int_0^{+\infty} e^{-t(1+n)} dt \Rightarrow$ Seja $u=-t(1+n)$; $du=(-1-n)dt$; $dt=\frac{du}{-1-n}$ $\Rightarrow$ p/ $t=0 \Rightarrow u=0$; p/ $t=+\infty \Rightarrow u=-\infty$

Assim, $\int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{-1-n} = \frac{1}{-1-n}\int_0^{-\infty} e^u\, du = \frac{1}{-1-n} e^u\Big]_0^{-\infty} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{t-tn}+e^{-t-tn}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{t(1-n)} + \int_0^{+\infty} e^{-t(1+n)}\right]dt =$

$= \int_0^{+\infty} e^{t(1-n)}dt$, Seja $u=t(1-n)$; $du=(1-n)dt$; $dt=\frac{du}{1-n}$ * p/ $t=0 \Rightarrow u=0$; * p/ $t=+\infty \Rightarrow u=-\infty$ p/ $n>1$

$\int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{1-n} \Rightarrow \frac{1}{1-n}\cdot e^u\Big]_0^{-\infty} \Rightarrow \boxed{0-\frac{1}{1-n}}$

$\int_0^{+\infty} e^{-t(1+n)}dt$, seja $u=-t(1+n)$; $du=(-1-n)dt$; $dt=\frac{du}{-1-n}$

p/ $t=0 \Rightarrow u=0$; p/ $t=+\infty \Rightarrow u=-\infty$

$\int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{-1-n} = \frac{1}{-1-n}\int_0^{-\infty} e^u\, du = \frac{1}{-1-n} e^u\Big]_0^{-\infty} \Rightarrow \frac{1}{1-n}\cdot\cancel{\frac{1}{e^{-\infty}}}^{\,0}$

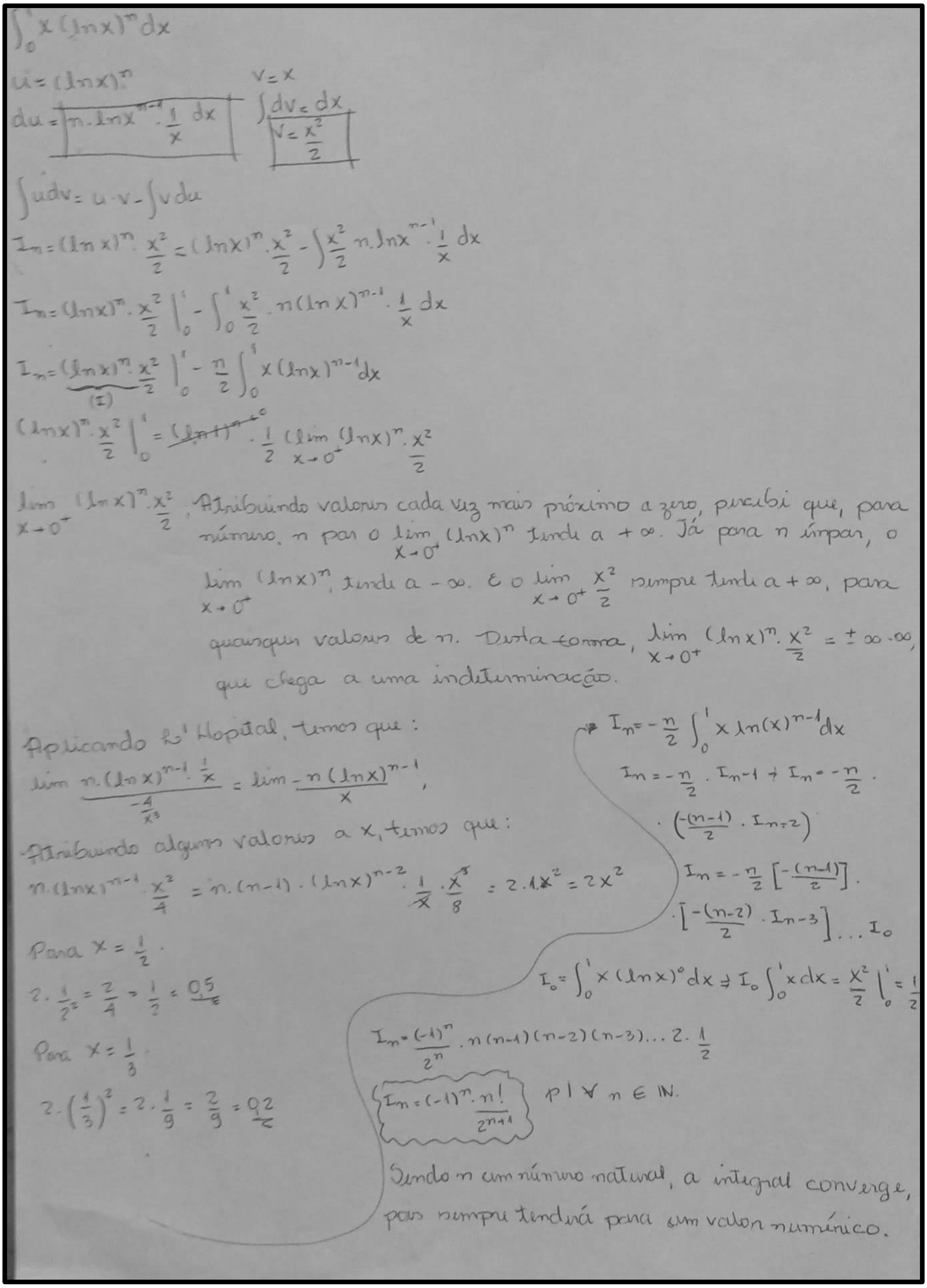
$-\left[\frac{1}{-1-n}\cdot \overset{1}{e^0}\right] = 0 + \frac{1}{1+n} = \boxed{\frac{1}{1+n}}$

$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1+n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+n-(1-n)}{1-n^2}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}n}{1-n^2}\right] = \boxed{\frac{n}{1-n^2}}$

Converge, visto que n é um valor numérico.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 57 – Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 4



$\int_0^1 x(\ln x)^n dx$

$u=(\ln x)^n$ $\quad v=x$

$du = \boxed{n.\ln x^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx}$ $\quad \int dv = dx$ $\quad \boxed{v=\frac{x^2}{2}}$

$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$I_n = (\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2} = (\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\, n.\ln x^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$I_n = (\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$I_n = \underbrace{(\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2}}_{(I)}\Big|_0^1 - \frac{n}{2}\int_0^1 x(\ln x)^{n-1}dx$

$(\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \cancel{(\ln 1)^n}^{0}\cdot\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0^+}(\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2}\right)$

$\lim_{x\to0^+}(\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2}$, Atribuindo valores cada vez mais próximo a zero, percebi que, para número n par o $\lim_{x\to0^+}(\ln x)^n$ tende a $+\infty$. Já para n ímpar, o $\lim_{x\to0^+}(\ln x)^n$, tende a $-\infty$. E o $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}$ sempre tende a $+\infty$, para quaisquer valores de n. Desta forma, $\lim_{x\to0^+}(\ln x)^n\cdot\frac{x^2}{2} = \pm\infty\cdot\infty$, que chega a uma indeterminação.

Aplicando L'Hopital, temos que:

$\lim \frac{n.(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{4}{x^3}} = \lim -\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$,

Atribuindo alguns valores a x, temos que:

$n.(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{x^2}{4} = n.(n-1)\cdot(\ln x)^{n-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{8} = 2.1.x^2 = 2x^2$

Para $x=\frac{1}{2}$.

$2\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Para $x=\frac{1}{3}$.

$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9} = 0{,}2$

$I_n = -\frac{n}{2}\int_0^1 x\ln(x)^{n-1}dx$

$I_n = -\frac{n}{2}\cdot I_{n-1} + I_n = -\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{(n-1)}{2}\cdot I_{n-2}\right)$

$I_n = -\frac{n}{2}\left[-\frac{(n-1)}{2}\right]\cdot\left[-\frac{(n-2)}{2}\cdot I_{n-3}\right]\ldots I_0$

$I_0 = \int_0^1 x(\ln x)^0 dx \Rightarrow I_0\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

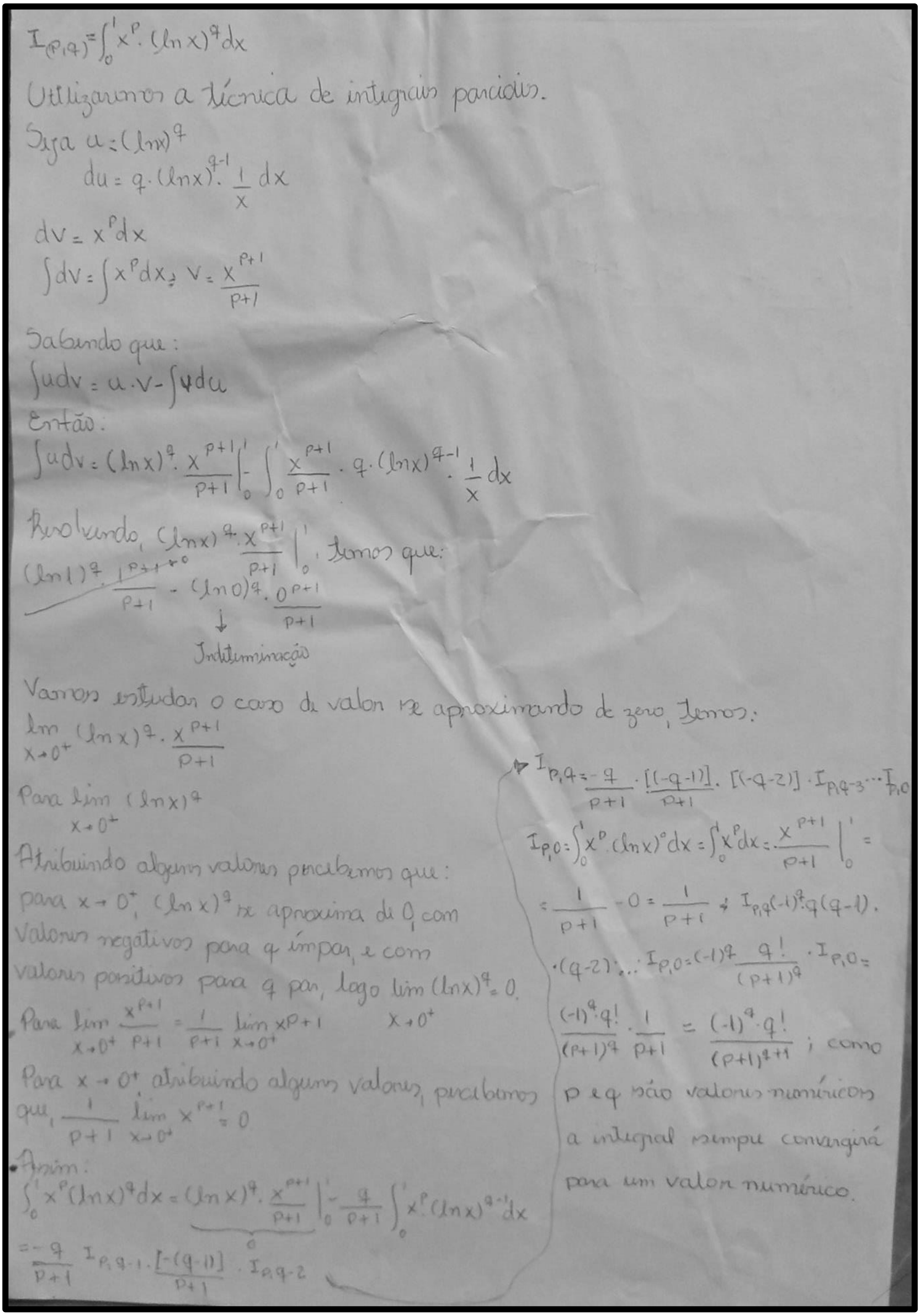
$I_n = \frac{(-1)^n}{2^n}\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.\frac{1}{2}$

$\boxed{I_n = (-1)^n\cdot\frac{n!}{2^{n+1}}}$ p/ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sendo n um número natural, a integral converge, pois sempre tenderá para um valor numérico.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 58 – Produção da aluna 1, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 5



$I_{(p,q)} = \int_0^1 x^p \cdot (\ln x)^q dx$

Utilizaremos a técnica de integrais parciais.

Seja $u = (\ln x)^q$

$du = q \cdot (\ln x)^{q-1} \cdot \frac{1}{x} dx$

$dv = x^p dx$

$\int dv = \int x^p dx ; v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

Sabendo que:

$\int u dv = u \cdot v - \int v du$

Então:

$\int u dv = (\ln x)^q \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \cdot q \cdot (\ln x)^{q-1} \cdot \frac{1}{x} dx$

Resolvendo, $(\ln x)^q \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1$, temos que:

~~$(\ln 1)^q \cdot \frac{1^{p+1}}{p+1} - (\ln 0)^q \cdot \frac{0^{p+1}}{p+1}$~~

↓

Indeterminação

Vamos estudar o caso de valor se aproximando de zero, temos:

$\lim_{x \to 0^+} (\ln x)^q \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1}$

Para $\lim_{x \to 0^+} (\ln x)^q$

Atribuindo alguns valores percebemos que:

para $x \to 0^+$, $(\ln x)^q$ se aproxima de 0, com valores negativos para q ímpar, e com valores positivos para q par, logo $\lim (\ln x)^q = 0$.

Para $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1} \lim_{x \to 0^+} x^{p+1}$ $x \to 0^+$

Para $x \to 0^+$ atribuindo alguns valores, percebemos que, $\frac{1}{p+1} \lim_{x \to 0^+} x^{p+1} = 0$

Assim:

$\int_0^1 x^p (\ln x)^q dx = \underbrace{(\ln x)^q \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1}_{0} - \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^p (\ln x)^{q-1} dx$

$= \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1} \cdot \frac{[-(q-1)]}{p+1} \cdot I_{p,q-2}$

$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} \cdot \frac{[(-q-1)]}{p+1} \cdot [(-q-2)] \cdot I_{p,q-3} \cdots I_{p,0}$

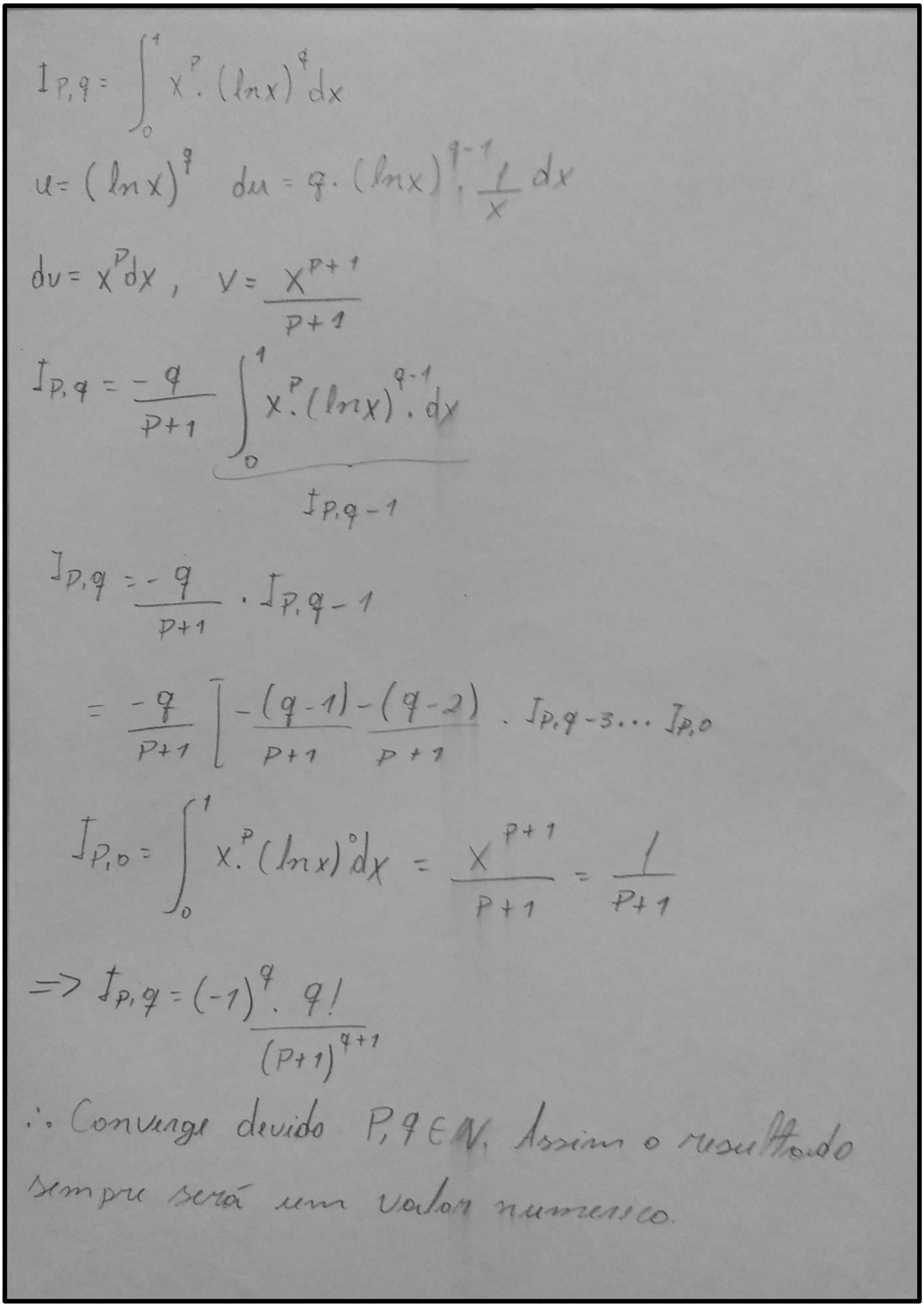
$I_{p,0} = \int_0^1 x^p (\ln x)^0 dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{p+1} - 0 = \frac{1}{p+1} ; I_{p,q} (-1)^q \cdot q (q-1) \cdot (q-2) \cdot \ldots \cdot I_{p,0} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} \cdot I_{p,0} =$

$\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^q \cdot q!}{(p+1)^{q+1}}$; como p e q são valores numéricos a integral sempre convergirá para um valor numérico.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 59 – Produção do aluno 3, na fase de formulação, referente à descrição analítica do comportamento de convergência da IDP da atividade 5



$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p.(\ln x)^q dx$$

$$u = (\ln x)^q \qquad du = q.(\ln x)^{q-1}.\frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^p dx, \quad v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\underbrace{\int_0^1 x^p.(\ln x)^{q-1}.dx}_{I_{p,q-1}}$$

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}.I_{p,q-1}$$

$$= \frac{-q}{p+1}\left[-\frac{(q-1)}{p+1}\frac{-(q-2)}{p+1}\right. . I_{p,q-3}\dots I_{p,0}$$

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p(\ln x)^0 dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

$$\Rightarrow I_{p,q} = (-1)^q.\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

∴ Converge devido $p,q \in \mathbb{N}$. Assim o resultado sempre será um valor numerico.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos pelos extrato expostos nas figuras, que os solucionadores em suas resoluções tiveram como arrimo o emprego de técnicas de integração e se apropriaram de conceitos de integrais generalizadas para decidirem pelo comportamento de convergência ou divergências das IGs e IDPs.

O trato analítico do objeto matemático na fase de formulação exige do solucionador a mobilização de conhecimentos prévios atinentes a métodos de integração e também a compreensão e emprego dos conceitos de integrais generalizadas estudadas em sala de aula em um momento anterior as aplicações das sequencias de ensino.

ANEXOS

ANEXO A – Ementa da disciplina Cálculo II

Tabela 4 – PUD da disciplina Cálculo II

DISCIPLINA: Psicologia do Desenvolvimento	
Código:	CAL2
Carga Horária:	80
Número de Créditos:	04
Código pré-requisito:	3-CAL1
Semestre:	4
Nível:	Graduação
EMENTA	
Integração; Métodos de integração; Aplicação das integrais; Coordenadas Polares; Formas indeterminadas e integrais impróprias.	
OBJETIVO	
• Estar apto, através das definições de limites e derivadas de funções, a resolver problemas da vida real para os quais o Cálculo é uma ferramenta poderosa.	
PROGRAMA	
Unidade I Introdução à Integração: Propriedades da integral indefinida; tabelas de integrais imediatas; método da substituição; método da integração por partes; área, integral definida; teorema fundamental do Cálculo. **Unidade II** Métodos de Integração: Integração de funções trigonométricas; fórmulas de redução e/ou recorrência; integração por substituição trigonométrica; integração de funções racionais por frações parciais; integrais envolvendo expressões da forma a ≠ 0. **Unidade III** Aplicações da Integral Definida: Comprimento do arco de uma curva (usando a equação cartesiana); área de região plana; volume de um sólido de revolução: métodos do disco circular, anel circular, invólucro cilíndrico e do corte. **Unidade IV**	

METODOLOGIA DE ENSINO E AVALIAÇÃO
• Aula expositiva dialogada; • Trabalho em grupo e resolução de situações-problema. • Avaliação diagnóstica individual e coletiva; • Apresentação de Seminários; • Avaliação escrita com questões objetivas e subjetivas.
BIBLIOGRAFIA BÁSICA
LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Vol. 1. SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. Vol. 1. **Bibliografia complementar** STEWART, James. Cálculo. 5ed. São Paulo: Cengage Learning, 2005. v.1. BOULOS, Paulo. Cálculo Diferencial e Integral. São Paulo: Makron Books, 1999. v.1. SPIEGEL, Murray R; WREDE, Robert C. Cálculo Avançado. 2ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

Fonte: (PROJETO PEGADÓGICO, IFCE – *Campus* Cedro, p. 133 – 134)

ANEXO B – Termo de compromisso dos alunos da disciplina Cálculo II

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PGECM

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo deixar explícitos os procedimentos da nossa investigação e as intenções referentes ao uso dos dados coligidos durante a pesquisa.

Os dados coletados, durante a experimentação, em gravações em áudios, registros escritos e imagens serão utilizados para nos auxiliar nas análises e compreensão do problema investigado em nossa pesquisa. Enfatizamos que os resultados provenientes das análises do material coligido poderá ser divulgados em nosso trabalho de dissertação de mestrado, bem como em publicações futuras e em eventos científicos. Porém deixamos esclarecido que a identidade dos participartes serão preservadas.

Fortaleza – CE, Outubro de 2016

____
Prof. Dr. Francisco Régis Veira Alves

____
Maria Vanísa Mendonça de Lima

____
Aluno participante da pesquisa