INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ-IFCE

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM

Arlem Atanazio dos Santos

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DA FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Fortaleza

2017

Arlem Atanazio dos Santos

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DA FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

Coorientador: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

Área de concentração: Ensino de Matemática

Fortaleza

2017

Catalogação na fonte: Biblioteca Waldyr Diogo de Siqueira

S237e Santos, Arlem Atanazio dos.

Engenharia didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci / Arlem Atanazio dos Santos. - Fortaleza: IFCE, 2017.

162 f.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, 2017.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

1. MATEMÁTICA - DISSERTAÇÃO. 2. ENGENHARIA DIDÁTICA 3. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. 4. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI I. Título.

CDD 510.07

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PGECM

ARLEM ATANAZIO DOS SANTOS

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DA FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 23/02/2017

BANCA EXAMINADORA

___

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves - IFCE (Orientador)

___

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira - UECE (Coorientador)

___

Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos - UFC (1º Avaliador Interno)

___

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira - UNILAB (1º Avaliador Externo)

___

Prof. Dr. Fumikazo Saito - PUC/SP (2º Avaliador Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, por mais esta chance de engrandecimento profissional.

Agradeço aos meus familiares, a meu pai Francisco Assis dos Santos (in memorium), minha irmã Aline Atanazio dos Santos, minha companheira Jaleny Miranda e a nossos filhos Andrey e Ângelo. E maneira especial a minha mãe Maria Atanazio dos Santos, que sempre foi e será a minha principal motivadora.

Agradeço aos professores do Mestrado em ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará-IFCE.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelos princípios de amizade e boa convivência que tivemos durante essa passagem de nossas vidas.

Agradeço de maneira especial, ao grande professor/pesquisador Francisco Regis Vieira Alves, por suas orientações, sugestões e dúvidas, que só foram compreendidas há seu tempo.

Obrigado a todos!

Os números de Fibonacci foram nomeados depois de Leonardo Pisano o qual, em seu Liber Abaci (1202) propôs o famoso problema dos coelhos e, com ele, surgiu a série de inteiros. Por anos, tais números inspiraram a produção intelectual de centenas de artigos matemáticos igualmente tratando com tais números direta ou indiretamente ou em suas múltiplas adaptações e relações. Em Dezembro, 1962, a Associação Fibonacci organizou com o propósito de coletar uma bibliografia fibonaticista, engajando pesquisa e produção para publicação, com o lançamento da revista The Fibonacci Quarterly (ALFRED, 1965, p. 32).

RESUMO

Nesta pesquisa trazemos algumas orientações didático-metodológicas relativas à abordagem de estudo com vistas no ensino, seguindo alguns resultados matemáticos oriundos da História da Matemática. Com destaque para a sequência de Fibonacci (SF) e seus modelos de generalização. Modelos referendados em alguns trabalhos que tratam da exploração de propriedades generalizadas e estendidas da sequência de Fibonacci. Valendo-se disso suscitamos uma discussão sobre a identificação, descrição e exploração de outras propriedades desta sequência, com ênfase para a fórmula de Binet. Como elementos estruturantes desta sistemática, utilizamos as concepções metodológicas da Engenharia Didática (ED) associada à Teoria das Situações Didáticas (TSD), referenciais que permitiram: realizar um recorte do desenvolvimento matemático relativo à generalização da SF, através da fórmula de Binet, descrever algumas situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci, e aplicar tais situações no contexto do ensino, tendo em vista o estabelecimento ou formulação de definições relacionadas com alguns dos modelos elencados. Desta maneira, acreditamos que a sistematização discutida possa ser uma referência ao estudo e ensino de outros tópicos matemáticos, principalmente, a professores em formação inicial da graduação.

Palavras-chave: Engenharia didática. Teoria das situações didáticas. Sequência de Fibonacci. Fórmula de Binet.

ABSTRACT

This research brings some didactic-methodological guidances related to the study approach with a view to the teaching, following a few mathematical results from History of Mathematics. Focusing on the Fibonacci sequence (FS) and its generalization models. Renown models in some papers that deal with generalized and extended properties of Fibonacci sequence, based on it, we raised a discussion about the identification, description and exploration of other properties of this sequence, with emphasis on Binet´s formula. As structurant elements of this systematics, we used the methodological conceptions of Didactic Engineering (DE) associated to Theory of didactic situations (TDS), referentials that permit: achieving a snippet of mathematical development concerning the generalization of FS, through Binet´s formula, describing a few didactic situations involving the generalization model of the Fibonacci sequence, and applying such situations in the context of teaching, having in mind the establishment or formulation of definitions related to some of models mentioned. Thus, we believe that the discussed systematization can be reference to the study and teaching of other mathematical topics, mainly, for teachers in formation.

Keywords: Didactic engineering. Theory of didactic situations. Fibonacci sequence. Binet´s formula.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ED	Engenharia Didática
FTF	Função Tridimensional de Fibonacci
HM	História da Matemática
SF	Sequência de Fibonacci
SGF	Sequência Generalizada de Fibonacci
SHF	Sequência Hiperbólica de Fibonacci
SPF	Sequência Polinomial de Fibonacci
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Reconhecidamente, nos cursos de formação de professores de matemática, ainda registramos entraves, obsolescências e perspectivas cristalizadas há décadas, relativas ao estudo e ensino de matemática. Assim, poderíamos apontar uma profusão de exemplos, que se enquadram num rol de domínio de habilidades específicas, que ainda se mostram aquém do razoável, no que concerne a um caminho para a boa formação inicial de professores.

Não obstante, como mencionamos há pouco, questionamos a grande quantidade de estudos acadêmicos que, em maior ou menor substância, são portadores de uma retórica científica a respeito da formação do professor, em detrimento, da proposição de saberes científicos que indicam roteiros práticos e operacionalizáveis para o contexto de sala de aula.

Diante de um quadro preocupante e persistente, e de indicadores não favoráveis, relativos à formação inicial do professor, a despeito de uma multiplicidade de estudos científicos, que evidenciam esforços, com o escopo de superação de sérios obstáculos, elegemos nesta dissertação a formação inicial do professor e a possibilidade de instrumentalização do mesmo para o estudo e ensino de Matemática.

Sobre a dificuldade suscitada, podemos relatar um pouco de nossas experiências na graduação, especificamente, na disciplina de HM. De fato, na condição de aluno do curso de Licenciatura do Instituto Federal do Ceará – IFCE defrontamos conteúdos, no âmbito da disciplina de História da Matemática, que evidenciaram um caráter retórico, de curiosidade, novelesco e, do ponto de vista temporal, repleto de descontinuidades, dando conta de seu processo evolutivo.

Como caracterizamos, identificamos um algum entrave em proporcionar ao estudante em formação inicial, de um curso de Licenciatura em Matemática, uma concepção adequada sobre um processo de estudo e ensino, em Matemática, de alguns resultados matemáticos, advindos da História da Matemática.

Tal fato, realmente, evidencia uma lacuna na formação inicial do professor. Mas como superar tal entrave? Como já destacamos, devemos proporcionar ao professor os indícios de um pensamento evolutivo, que pressupõe a indicação e exploração de saberes particulares, com uma visão afetada pelo caráter matemático evolutivo.

Assim, devemos nos questionar que abordagem de estudo e ensino devemos utilizar em Matemática, numa perspectiva de instrumentalizar o professor em formação inicial, no sentido, de uma exploração de saberes particulares numa trajetória evolutiva?

A fim de suscitarmos elementos que nos condicionem a tal postura, assinalamos nossas leituras dos artigos de Alves e Borges Neto (2010), Alves, Borges Neto e Maia (2012) dos quais, destacamos suas percepções e orientações relativas ao estudo e ensino de determinado tópico matemático.

Desse modo, sobre o estudo da Matemática, Alves, Borges Neto e Maia (2012, p. 54) enfatizam “a relevância do estudo da Matemática, por meio de sua História e Epistemologia”. Sem se furtar, todavia, dos aspectos filosóficos em qualquer contexto de investigação. Neste sentido, num artigo intitulado História da Matemática: os números figurais 2D e 3D, Alves, Borges Neto e Maia (2012) abordam exemplos de propriedades formais, num decurso de evolução histórica, epistemológica, demarcando perspectivas filosóficas a respeito dos próprios especialistas que depuseram sua atenção no referido tema.

O caráter relevante dessa abordagem de estudo se evidencia, na medida em que, segundo Alves (2016b) de modo não marginal, registramos a abordagem de livros de História da Matemática – HM, que costumam registrar hiatos históricos concernentes a vários casos de definições e objetos matemáticos.

Sendo esses hiatos históricos caracterizados pelo fato de se fazerem presentes determinados traços históricos e a gênese dos conceitos científicos, num contexto de séculos atrás, todavia, não encontramos vestígios explicativos do estágio atual de evolução, generalização e o papel assumido no edifício matemático.

Quanto ao ensino da Matemática, Alves e Borges Neto (2010) destacam que devemos abordar determinado tópico ou conceito matemático numa perspectiva inter-relacional, isto é, este deve ser ensinado numa abordagem que possibilite o maior número de relações conceituais.

Como forma de explicar suas concepções Alves e Borges Neto (2010, 2011) e Alves (2013, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b) apresentam nesse conjunto de trabalhos, uma discussão relativa ao estudo e ensino, de um tópico bastante conhecido da HM, no caso, a sequência de Fibonacci, destacando de modo especial, seu processo de generalização. De modo geral, dos escritos analisados que auxiliaram na constituição de nossa argumentação, distinguimos duas categoriais:

i) trabalhos relacionados ao estudo do modelo generalizado de Fibonacci, em destaque, trabalhos sobre: uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia, Alves (2013); a sequência generalizada de Fibonacci e suas relações com o número de ouro, Alves (2015a); a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci, Alves (2015b).

ii) trabalhos relacionados ao ensino do modelo de generalização da sequência de Fibonacci, em destaque, os trabalhos sobre: a sequência de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequência Fedathi, Alves e Borges Neto (2010); a existência da Sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da sequência Fedathi, Alves e Borges Neto (2011); a construção de definições: o caso da sequência generalizada de Fibonacci, Alves (2016a); uma Engenharia Didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci na disciplina de HM, Alves (2016b).

Numa perspectiva de ampliarmos a discussão suscitada nos estudos de Alves e Borges Neto (2010, 2011) e Alves (2013, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b) relacionados ao processo de generalização da SF; assinalamos como intuito da pesquisa realizarmos um estudo, com vias ao ensino, de outras propriedades de generalização da SF, sendo este, fundado nos aspectos matemáticos, relativos a tais modelos.

Desse modo, abordaremos um percurso que pode fornecer elementos que caracterizam a evolução, derivação, sistematização e generalização do modelo, de apelo biológico, concebido e recordado pelos autores de livros de HM, como modelo da Sequência de Fibonacci.

Assim, optamos por uma trajetória de investigação que não prescinde ainda de um componente de divulgação científica atinente à evolução do modelo fibonacciano, que se mostra indene às modificações do tempo. Tal trajetória descreverá os elementos que, no transcorrer de extensa consulta bibliográfica, se apresentaram como sendo os mais representativos e que detêm o potencial de proporcionar maior impacto na formação do professor.

Por outro lado, proporcionar ao futuro professor os indícios de um pensamento matemático evolutivo, requer a indicação e exploração de saberes particulares. Com este intuito, descreveremos em seções posteriores, o modelo da SF a partir de sua fórmula de generalização, a fórmula de Binet, que permite a descrição de propriedades pouco divulgadas num contexto de graduação de um curso de licenciatura em matemática, embora, várias das propriedades discutidas nestas seções, não envolvem grande e aprofundado conhecimento matemático que extrapola um curso de graduação.

Referendados nos elementos apontados na discussão anterior, elegemos a seguinte questão norteadora do processo de investigação: Como desenvolver um estudo sobre o processo de generalização da sequência de Fibonacci que promova situações didáticas envolvendo a identificação, descrição e exploração de propriedades do seu modelo generalizado e seus aspectos evolutivos?

Ora, tendo em vista a questão norteadora suscitada, apresentamos o seguinte objetivo geral: Descrever elementos de um estudo relativo aos modelos de generalização da sequência de Fibonacci que promovam a identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

Para alcançar nosso objetivo geral, bem como uma consequente resposta à nossa questão norteadora, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

1 Analisar o desenvolvimento matemático dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci.

2 Analisar o desenvolvimento matemático da fórmula de Binet.

3 Descrever situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci, desconsiderados pelos autores de livros de HM.

4 Aplicar uma metodologia de ensino na organização de atividades do modelo de generalização da sequência de Fibonacci voltadas à sala de aula, tendo em vista o estabelecimento ou formulação de definições.

Assim, fundamentados na perspectiva de estudo e ensino, em HM, de Alves e Borges Neto (2010), Alves, Borges Neto e Maia (2012), e tendo como elementos de sistematização, as concepções da Engenharia didática de Almouloud (2007), Artigue (1995) e Pais (2002), em consonância, com a teoria das Situações didáticas de D´Amore (2007), Picelli (2010), Teixeira e Passos (2013), Souza e Lima (2014) referenciais que nos permitiram o desenvolvimento da pesquisa organizada da seguinte maneira:

No capítulo I, apresentamos a problemática e os objetivos do estudo.

No capítulo II realizamos a caracterização da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas como referenciais teóricos e metodológicos.

No capítulo III, indicamos a primeira etapa da pesquisa, que de acordo com a ED, são as análises prévias da pesquisa tendo como fundamento o levantamento bibliográfico que nos permitiu a análise didática e epistemológica necessárias à identificação e descrição do modelo de generalização da sequência de Fibonacci, com destaque para a fórmula de Binet.

No capítulo IV, ainda fundamentados na análise didática e epistemológica realizadas destacamos a identificação e descrição de alguns modelos de generalização e extensão da SF, em outros contextos matemáticos.

No capítulo V, mostramos a segunda etapa da pesquisa, que de acordo com a ED, é a concepção e análise a priori que nos permitiu a partir das propriedades discutidas nos capítulos anteriores, elaborar as atividades didáticas direcionadas à experimentação.

No capítulo VI, expomos o terceiro e quarto momentos da pesquisa, que de acordo com a ED são: a experimentação e a análise a posteriori/validação. Assim, relativo à experimentação, caracterizamos o público alvo e os instrumentais de coleta dos dados utilizados.

Posteriormente, descrevemos a análise a posteriori e apresentamos a análise dos resultados dos momentos de aplicação. Dando continuidade, apresentamos o confronto entre os elementos suscitados a priori e as observações a posteriori numa discussão relativa à validação do estudo. Finalizamos a pesquisa apresentando as considerações finais e perspectivas futuras.

A fim de assegurar uma trajetória planejada, estruturada com amparo de um viés investigativo e rigor científico, no campo de Didática da Matemática, assumiremos determinados elementos característicos de um processo de pesquisa que se apoia na Engenharia Didática (ED) em completude com a Teoria das Situações Didáticas (TSD), como referenciais teórico metodológicos, discussão que apresentaremos no capítulo seguinte.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Desse modo, como destaca Artigue (1995) a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa no Ensino de Matemática teve sua origem na década de 80, na França, tendo como inspiração o trabalho do engenheiro, que fundamentalmente, em sua atividade profissional incorpora referências do conhecimento científico, no enfrentamento de problemas práticos, que em muitas situações apresentam soluções complexas, e somente uma teoria prévia, não é suficiente, a uma compreensão devida dos problemas em análise.

Nesse sentido, devemos considerar todos os meios necessários a essa compreensão, e possível solução das questões identificadas. Sobre essa visão de adaptação durante a atividade prática Pais (2002) ressalta que:

> A engenharia didática caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática. O interesse pelo seu estudo justifica-se pelo fato de se tratar de uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática. (PAIS, 2002, p.99).

Além disso, "como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, que dizer, sobre a concepção, realização, observação e analises de sequencias de ensino." (ARTIGUE, 1995, p.36). Podendo ser caracterizada também "como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori." (ALMOULOUD, 2007, p.171).

Assim, as experiências práticas sob a égide do professor são valorizadas, no sentido de complementar as teorias desenvolvidas fora de sala de aula. Sendo uma metodologia de pesquisa que valoriza as produções do professor, o percebendo como um pesquisador em potencial, e que pode "ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito." (ALMOULOUD, 2007, p.171).

Como destacam Almouloud (2007), Artigue (1995) e Pais (2002) no planejamento de uma ED devemos nos organizar à execução de quatro fases consecutivas, sendo estas: i) análises prévias ou preliminares; ii) concepção e análise a priori; iii) experimentação; iv) análise a posteriori e a validação. A seguir, destacamos cada uma dessas quatro fases da Engenharia Didática.

2.1 Análises Prévias

Na visão de Almouloud (2007) as análises prévias são caracterizadas como o primeiro nível de organização da engenharia didática, tendo por objetivo, a identificação de problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do objeto de estudo. A fim de detectarmos esses problemas devemos fazer de maneira preliminar, um levantamento em referências bibliográficas tais como: artigos, teses, revistas, dissertações, dentre outras fontes.

Artigue (1995) argumenta que nesta análise devemos considerar as seguintes dimensões: a epistemológica, associada ao saber em jogo; a cognitiva relacionada com as características do público ao qual se pretende ensinar; e a didática relacionada às características do sistema de ensino; destacando ainda, que numa "investigação de Engenharia Didática, a fase de concepção se fundamenta não apenas em um quadro didático geral e nos conhecimentos didáticos previamente adquiridos no campo de estudo, mas também num conjunto de análises preliminares*.*" (ARTIGUE, 1995, p. 38).

Sendo este quadro didático geral, de acordo com Artigue (1995), contemplado a partir da análise das seguintes pontos, relativos ao campo de estudo: a epistemológica dos conteúdos de ensino; do ensino tradicional e seus efeitos; das concepções dos estudantes, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; do campo de restrições onde será realizada a ação didática; destacando que tudo deve ser realizado, com vista ao alcance dos objetivos específicos da pesquisa.

Almouloud (2007) destaca que posteriormente a esta análise, devemos fazer um resumo dos principais problemas detectados no ensino e aprendizagem do objeto em estudo, relatando os resultados das pesquisas analisadas sobre o tema, além de destacarmos os problemas de ensino e aprendizagem que serão objeto da investigação, e para os quais se pretende buscar uma solução.

2.2 Concepção e análise a priori

Sobre a análise a priori Almouloud (2007) e Pais (2002) caracterizam essa fase, como a de escolha das variáveis didáticas, sendo estas: as macro didáticas ou globais, relativas à organização da engenharia; ou micro didáticas ou locais, relativas a organização local da engenharia, ou seja, de uma sessão ou fase da pesquisa.

Artigue (1995, p.42) assinala que "nesta fase, o pesquisador tomará a decisão em atuar sobre um número determinado de variáveis do sistema, fixadas por determinadas restrições.

Estas são as variáveis de comando, percebidas como pertinentes com relação ao problema estudado”.

Sobre as variáveis estas podem ser caracterizadas, como: de ordem geral ou dependentes do conteúdo matemático estudado, tendo suas análises em três dimensões: a epistemológica, relativas as características do saber; a cognitiva, relacionadas as dimensões cognitivas dos alunos, sujeitos a aprendizagem; e a didática, associada às características do sistema de ensino, em que os sujeitos estão inseridos.

Tal caracterização é primordial a um alcance mínimo dos objetivos traçados, devido tais escolhas estarem diretamente relacionadas com a construção das situações-problema; nesse sentido, o professor/construtor deve estar atento à escolha das variáveis didáticas que podem provocar as modificações, nos processos de ensino e aprendizagem relativos ao objeto matemático em estudo.

Diante do conjunto de variáveis consideradas, temos que observar dentre estas, quais podemos exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado, com as atividades que os alunos podem desenvolver a uma apreensão dos conceitos em questão, ou seja, controlar os comportamentos dos alunos e explicar seus sentidos. Nessa perspectiva, Almouloud (2007) destaca que:

> A análise *a priori* é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico. (ALMOULOUD, 2007, p.176).

Almouloud (2007) aponta que numa análise a priori devemos proceder da seguinte maneira: inicialmente, devemos descrever nossas escolhas, relativas as variáveis locais, além de uma caracterização da situação adidática que pretendemos desenvolver; analisarmos se a situação proposta tem alguma importância para o aluno, ou seja, se esta permitirá ao aluno agir sobre ela, escolher estratégias de resolução, tomar decisões, demonstrar controle e capacidade de validação.

Sobre a concepção das sequências de ensino Almouloud (2007) aponta que estas devem ser construídas com a finalidade de responder as questões levantadas, e validar ou não as hipóteses de trabalho. Como indica Almouloud (2007) devemos realizar uma análise a priori das situações-problemas, nessa análise, devemos observar duas variantes, a matemática e a didática.

Na análise matemática devemos identificar os métodos e/ou estratégias de resolução em cada situação, caracterizando os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos. Na dimensão didática devemos realizar, a princípio, seguintes considerações: analisarmos se o que está sendo proposto nas situações-problemas são conhecimentos pertinentes, no sentido, de estabelecer uma relação entre os saberes visados e os já constituídos; identificarmos no escopo das situações suas variáveis de comando e escolhermos aquelas necessárias de estudo; estudarmos se as situações escolhidas são consistentes.

Desse modo, devemos verificar se as variáveis escolhidas não possibilitem aos alunos a construção de conhecimentos incompatíveis, mesmo que transitórios; prevermos possíveis dificuldades de resolução por parte dos alunos; identificarmos novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos possam adquirir e prevermos os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução que devemos institucionalizar.

Ademais devemos elaborar e analisar uma sequência de situações-problemas, sendo estas, do tipo; questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, que envolvam um ou vários domínios do saber e conhecimento. Essas situações problema têm por finalidade a discussão de novos objetos matemáticos que se apresentam implícita e explicitamente, através das questões colocadas pelos alunos.

Almouloud (2007) argumenta que as sequências devem ainda ser organizadas de maneira a possibilitar, que os alunos entendam a situação proposta e possam com seus conhecimentos, engajarem-se na resolução e apresentar soluções. Estas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que se pretende explorar, e que o conhecimento esteja inserido.

Sendo os conhecimentos prévios dos alunos relativos ao objeto, em questão, as ferramentas que devem ser mobilizadas à solução da situação. Nesse sentido, as situações propostas devem permitir ao aluno desenvolver certas capacidades e habilidades, tais como: agir, se expressar, refletir e evoluir.

2.3 A TSD na Experimentação

Almouloud (2007) argumenta que esta fase da ED se caracteriza como a etapa de aplicação de todo o dispositivo organizado, as sequências de ensino, caracterizada como “um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.” (PAIS, 2002, p.102).

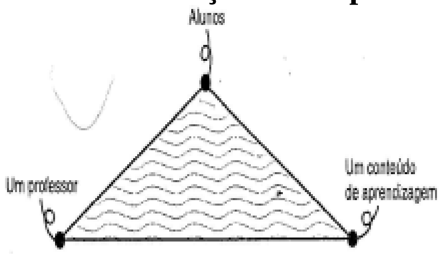
Pais (2002) argumenta que essas aulas, denominadas de seções, são organizadas com objetivos direcionados à pesquisa, desse modo, não seguem a mesma dinâmica de uma aula comum. Isto é, em sua organização e aplicação devemos considerar algumas condições de organização da aula por parte do professor/pesquisador.

Nesse sentido, a organização da aula aos momentos de experimentação, como destaca Almouloud (2007) devem ser fundamentados, em situações didáticas, direcionadas aos momentos de ensino e aprendizagem, tendo sua estruturação voltada a coleta de dados. Assim, destacaremos a Teoria das Situações Didáticas (TSD), como teoria da Didática da Matemática, desenvolvida por Brousseau, proposta a ser:

> Um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.162).

Para Teixeira e Passos (2013) esta teoria tem como objeto principal, a situação didática. Sendo esta, um conjunto de situações reprodutíveis, que permitem a organização do espaço de sala de aula, aos momentos de interação entre: o professor, o aluno e o saber, no meio organizado (*milieu*). Em seu estudo, Souza e Lima (2014) destacam que as relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas, no que denominam de triângulo didático.

Figura 1-Triângulo didático das relações entre professor-aluno-saber



Fonte: Joannert (2002 apud SOUZA; LIMA, 2014, p.35).

Sendo que, a partir dos vértices são estabelecidas as relações entre: professor-saber, saber-aluno, professor-aluno, sendo tais relações, assimétricas e conflituosas. Portanto, “docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.157)

Vale indicar nessa discussão, o papel do meio (*milieu*) na estruturação da situação didática, sendo um fator primordial no contexto de interação dos componentes professor-aluno-saber, de forma a permitir a evolução dos comportamentos e conhecimentos dos alunos, relativos ao saber ensinado. Sobre esse papel D'Amore (2007) destaca:

> Da teoria das situações sabemos que o professor tem que provocar no aluno comportamentos, que o próprio aluno, a fim de manifestar seu conhecimento, teria que adotar autonomamente. Parece um paradoxo. Aliás: é um paradoxo. A única solução consiste em envolver um terceiro elemento, o *milieu*, e fazer com que a resposta do aluno se refira exclusivamente às necessidades do *milieu*, que o professor conhece bem, ou que predispôs para esse fim. A arte do professor está então na organização de uma relação entre aluno e *milieu* (D'AMORE, 2007, p.184).

Observamos até este ponto, que uma situação didática se concretiza nos momentos de interação dos elementos professor-aluno-saber, num meio *(milieu*) organizado. Nesse sentido, Teixeira e Passos (2013) assinalam que deve existir uma preocupação do professor com as condições de apresentação de determinados conteúdos matemáticos, e uma clara intenção em possibilitar aprendizagem. Além disso, Brousseau ressalta que as situações didáticas:

> Devem ser concebidas de maneira a provocar o aparecimento dos conhecimentos que os alunos trazem, em respostas, espontâneas ou não, e em condições apropriadas. Elas devem ser, porém, sem nenhuma relação visível para o aluno, com uma intenção didática desejada e sem qualquer intenção complementar. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.162)

Relativo às argumentações anteriores, suscitamos os seguintes questionamentos: Como organizar tais condições que levem o sujeito a utilizar seus conhecimentos na tomada de decisões, e termos condições de justificarmos tais posturas? A fim de respondermos tais questões nos pautaremos nas condições, nos dispositivos de ensino e em sua utilização, apresentados por Teixeira e Passos (2013).

Inicialmente apresentaremos o que Teixeira e Passos (2013) definem como relação didática, sendo o conjunto de relações entre o professor-aluno-saber; destacando que estas são tradicionalmente fundadas numa transmissão do conhecimento, ou seja, uma comunicação de informações. Sobre tal forma de apresentação dos saberes esta pode ser entendida como o modelo tradicional de ensino. Sobre esta relação didática Brousseau demonstra a seguinte preocupação, que:

> A atividade do professor não pode restringir-se a mera comunicação de um saber. Ao professor cabe a responsabilidade de apresentar um "bom problema", que seria o

> desencadeador para a busca de um novo saber; e, ao aluno, aceitar o desafio da resolução do problema, dando início ao processo de aprendizagem. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.164)

Vale enfatizar do excerto anterior, que o autor aponta como dispositivo de ensino, um problema. Sobre tal recurso Teixeira e Passos (2013) denominam de meio material, salientando que podem ser: peças de um jogo, uma prova, uma ficha, um problema. E que devem fazer parte da ação prática do professor no ensino de um conhecimento, por permitir o controle de suas condições, e ser o elo entre os conhecimentos prévios dos alunos e o saber a ser adquirido.

No mesmo trecho, os autores suscitam outra preocupação, agora relativa ao elemento aluno, retratando o comportamento esperado do aluno perante a situação problema. Para eles, o aluno deve tomar o problema como seu, já que este "foi escolhido para que ele adquirisse um saber novo; percebe que a importância desse saber é justificada pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo, sem recorrer a razões didáticas." (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.164).

Se percebermos os argumentos discutidos até agora, podemos observar o conjunto de orientações de cunho metodológico que a TSD, nos apresenta. Até mesmo, por ser este um dos seus objetivos, o de fornecer "mecanismos que propiciem a melhora nos processos de ensino aprendizagem em matemática e envolvam, em sala de aula e fora dela, o professor, o aluno e o saber – o conhecimento do conteúdo matemático." (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.164). Falaremos mais sobre os aspectos metodológicos da TSD, ilustrando a Tipologia das situações didáticas, que se expressam nas situações: didática. adidática e não didática.

Destacaremos, inicialmente, que "o objetivo da situação didática é a aprendizagem do aluno e a situação adidática é também uma forma de aprendizagem, porém o aluno é parte ativa nesse meio." (PICELLI, 2010, p.25).

Nesse sentido, uma situação didática se caracteriza como "um conjunto de relações que se estabelecem explicitamente e ou implicitamente entre os alunos, um determinado contexto e o sistema educativo." (BROUSSEAU apud SOUZA; LIMA, 2014, p.35).

Desse modo, cabe ao professor buscar problemas que os alunos possam solucionar ou lhes desperte algum conhecimento. Além de orientar os alunos nos momentos em que estes apresentem alguma dificuldade; não que, o professor irá solucionar o problema pelo aluno, deve existir um equilíbrio de ações, sem afetar sua independência.

Sobre esta postura autônoma do aluno, num meio organizado para uma situação de ensino, Teixeira e Passos (2013, p.164) a definem como uma situação adidática, "representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem". É o momento em que o aluno se debruça sobre o problema tentando solucioná-lo, tomando por base seus conhecimentos (prévios).

Finalizando apresentamos uma situação não didática, como sendo "aquelas em que não há uma intencionalidade didática. São situações do cotidiano, fora ou não do contexto escolar, em que o aluno poderá relacionar o que aprendeu na escola e fazer funcionar o conhecimento." (BROUSSEAU apud SOUZA; LIMA, 2014, p.35).

Continuaremos nossa discussão sobre o viés metodológico da TSD, apresentando a Tipologia das situações didáticas, do estudo de Teixeira e Passos (2013), no qual elencam as principais atividades específicas voltadas a aprendizagem em Matemática. Classificando as situações didáticas, em situações (momentos) de: devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

1) Situação de Devolução: momento em que o professor cede a responsabilidade ao aluno por sua aprendizagem, este tem que entrar no jogo e assumir os riscos por seus atos. Nesse sentido, o professor propõe o problema ao aluno e este deve ter condições de agir sobre ele, o aluno vê o problema como um desafio. Assim, o aluno, "primeiro ele tenta resolver o problema com os saberes que já possui. Essa é uma estratégia que logo se mostra falha, pois para resolução do problema é necessário um conhecimento novo, que é justamente o saber em jogo." (PICELLI, 2010, p.260).

Ainda em Picelli (2010), este frisa que pode ocorrer do aluno não apresentar uma devolução ao professor, devido ao problema proposto não ter despertado o interesse do aluno, por ser fácil ou muito difícil. Tal fala, reforça os argumentos sobre as características que o professor deve observar na escolha de um bom problema, e que este principalmente, seja compatível com os conhecimentos dos alunos.

2) Situação de Ação: neste momento, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Como "esta fase é puramente experimental, são soluções que o estudante encontra sem estar preocupado em explicitar ou validar a resposta, ou até mesmo, fazer a relação entre a resposta a alguma teoria de base." (PICELLI, 2010, p.26).

3) Situação de Formulação: se caracteriza pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória. Ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis. Por isso, pode ocorrer nesta fase "ambiguidade, redundância, uso de metáforas,

criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas.” (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165).

4) Situação de Validação: momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova. Vale destacar, antes de apresentarmos a última situação que as fases de devolução, ação, formalização e validação são caracterizadas como situações adidáticas, no sentido de que o professor não intervém diretamente. Desse modo, “o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador.” (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165). Tal intencionalidade, só será revelada na fase de institucionalização, que explicitaremos a seguir.

5) Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto é revelada, o professor “retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio de formalização e da generalização.” (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.166).

Observamos que a tipologias das situações didáticas nos permite a organização dos momentos didáticos (aulas) necessários ao desenvolvimento das situações didáticas (atividades propostas) pelo professor, ou seja, dos momentos de experimentação.

Vale destacarmos, que podemos utilizar como recursos voltados a coleta de dados na experimentação alguns instrumentais, tais como: relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, constituindo o corpus da pesquisa.

2.4 Análise a posteriori e avaliação (validação)

Almouloud (2007) salienta que a partir dos dados recolhidos na fase de experimentação temos que realizar uma exploração desses resultados. Sendo tal aspecto segundo Pais (2002, p.103) o “tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática”. Além de enfatizar que:

> O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. A análise a posteriori tende a enriquecer, quando possível, complementar os dados obtidos por meio de outras técnicas, tais como, questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outras. (PAIS, 2002, p.103).

Os argumentos anteriores reforçam a importância da análise a priori na ED, e os cuidados que devemos ter com a análise dos dados. Sobre a coleta dos dados, esta é realizada por meio de observações das seções de ensino e das produções dos alunos, podendo também "ser obtidos pela observação direta do pesquisador ou da equipe de aplicação da experiência, desde que sejam devidamente registrados, de forma objetiva, nos protocolos da experiência." (PAIS, 2002, p.103).

Sobre a análise dos dados, Almouloud (2007) ressalta que não pode ser desconectada: dos fundamentos organizados na análise a priori, das teorias de análise, das hipóteses, da problemática e dos objetivos do estudo. E como forma de complementar essa coleta, é aconselhável a utilização "de metodologias externas: como questionários, entrevistas individuais ou em grupos, realizadas em diversos momentos do ensino." (ALMOULOUD, 2007, p.176).

Após, a análise a posteriori caracterizada como a devida organização dos dados; devemos realizar a fase de avaliação (validação) da ED, que, como destaca Pais (2002) caracteriza-se pelo confronto entre os dados da análise a priori e a posteriori, com o intuito de verificarmos as hipóteses levantadas.

Assim, após o confronto entre as hipóteses levantadas e a atividade prática, temos elementos para realizarmos uma análise sobre a produtividade ou não da engenharia proposta, além de levantarmos possíveis questionamentos voltados à futuras pesquisas. Tal processo ocorre mediante a verificação, reformulação ou mesmo refutação da(s) hipótese(s) levantada(s), e dos argumentos construídos durante o processo de validação interna da engenharia.

No capítulo em destaque, assinalamos os elementos relativos à ED e à TSD que pretendemos explorar nos capítulos subsequentes. Nesse sentido, mostraremos no capítulo seguinte, um extenso percurso evolutivo, que proporcionará vislumbrarmos o cenário do nascedouro da sequência de Fibonacci e seus modelos teóricos, e de modo concomitante, discutirmos algumas ligações conceituais da sequência de Fibonacci, com outros ramos da Matemática.

3 O ESTUDO DO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

3.1 Análises prévias

Nesta etapa, como destaca a ED, devemos realizar a análise do conteúdo de estudo em três dimensões: a epistemológica, a didática e a cognitiva. Vale destacarmos que na análise constituída nesta etapa, focaremos apenas nas dimensões didática e epistemológica. Assim, preliminarmente realizamos um levantamento bibliográfico em livros de HM e artigos que trouxessem elementos relativos à evolução histórica, epistemológica e matemática, dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci.

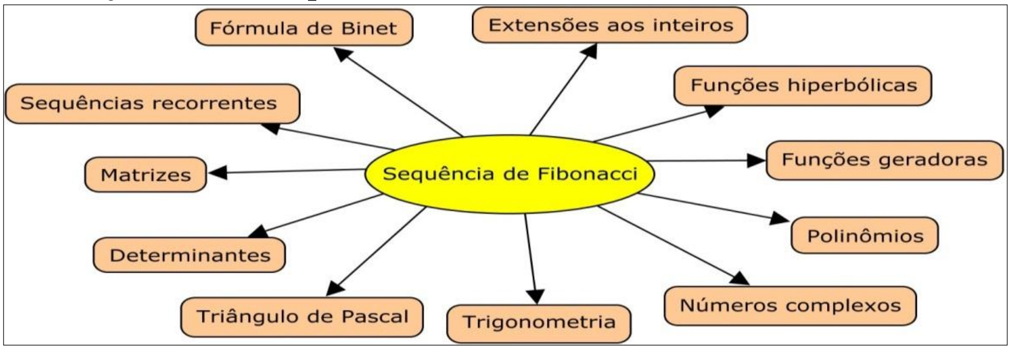
Desse levantamento, destacamos como referências iniciais, obras que discutem a sequência de Fibonacci, numa perspectiva histórica e matemática, donde destacamos os estudos de: Lívio (2002), Stillwell (1989), Wells (2005), Alfred (1965), Dunlap (1997), Hoggat (1969), Posamentier e Lehmann (2007), Huntley (1985), Koshy (2011), Vorobiov (1974), Grimaldi (2012), Sthakov (2009), dentre outros.

Sobre o estudo realizado, salientamos que este nos permitiu a caracterização dos aspectos históricos da sequência de Fibonacci, principalmente os personagens ligados a sua origem e processo de generalização. Além de realizarmos, numa perspectiva de complementar a abordagem histórica, uma discussão de elementos, com caráter mais específico, que nos permitissem a caracterização da evolução matemática do modelo de Fibonacci, através de sua generalização progressiva.

Ainda, do levantamento realizado, vale destacarmos que tratamos de propriedades elementares da sequência de Fibonacci, e que tal estudo nos permitiu suscitar uma gama de relações entre a sequência de Fibonacci e outros conteúdos matemáticos, numa perspectiva de estudo semelhante a Santos e Alves (2016).

Sobre as relações conceituais observadas destacamos que estas perpassam por conteúdos tanto do nível básico, quanto superior, sendo estes perfeitamente discutíveis num contexto de graduação. Vale destacarmos desse contexto, a importância da fórmula de Binet e suas derivações, como modelo matemático de generalização e extensão da sequência de Fibonacci, a outros contextos matemáticos, caracterização que apresentamos na figura 2 a seguir, e que discutiremos de maneira mais específica, nas seções seguintes.

Figura 2- Relações entre a sequência de Fibonacci e outros conteúdos matemáticos



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 A Fórmula de Binet como modelo de generalização da Sequência de Fibonacci

Iniciamos nossa discussão relativa ao processo de generalização da sequência de Fibonacci destacando os modelos obtidos a partir da resolução do problema dos coelhos, caracterizados como implícitos, tendo como fundamento o princípio da recursividade. Continuando, apresentaremos a fórmula de Binet, caracterizada como modelo de obtenção da sequência de Fibonacci, não mais recursiva, e sim explícita; resultado que nos permite a discussão de algumas generalizações e extensões do modelo fibonacciano.

3.2.1 A Sequência Fibonacci e seu modelo generalizado à fórmula de Binet

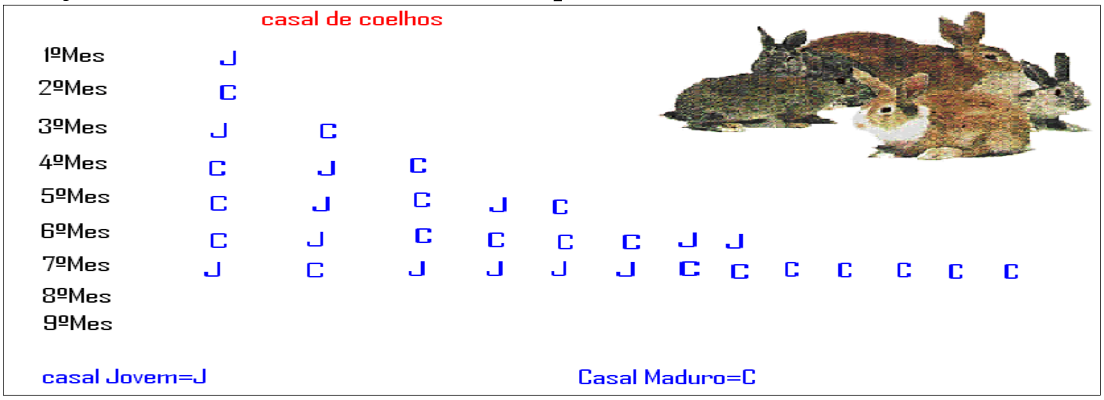
De modo tradicional, os livros de História da Matemática – HM definem a seguinte sequência recursiva indicada por $\{f_n\}_{n\in N}$ e descrita do seguinte modo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $n > 2$. Por outro lado, a mesma sequência pode ainda ser expressa por $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n > 1$. Sabemos que uma sequência em R é definida por $\begin{array}{c} x_n : N \to R \\ n \mapsto x_n \end{array}$. De modo particular, definimos a seguinte sequência descrita de modo recursivo, caracterizada por $(f_n)_{n\in N} : (1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233;377;.....)(*)$.

Tal sequência é chamada de sequência de Fibonacci. O termo Fibonacci é a abreviação de filho de Bonaccio, seu pai, como explica Dunlap (1997). Posamentier e Lehmann (2007, p. 22) comentam que “Fibonacci acumulou experiência nos campo da Aritmética e da Álgebra, a partir das viagens que realizou na Europa”, entretanto, apesar de ter desenvolvido vários trabalhos nestes campos da Matemática, Leonardo de Pisa é lembrado geralmente em razão do seu problema, que descreve “a reprodução dos coelhos imortais.” (WELLS, 2005, p. 101).

Gulberg (1997, p.287) argumenta que “nós não temos nenhuma evidência adicional de que Fibonacci explorou a sequência, tendo seu nome ligado a ele até o século 19”.

Domingues (1991, p. 74) explica que, “provavelmente, para amenizar leitura do Livro do Ábaco, ou torná-la mais interessante”, Fibonacci incluiu no livro alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais, um veio a se tornar especial: um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês? Sobre tal problema, na figura 3, apresentamos um esquema que modeliza a situação. Vejamos:

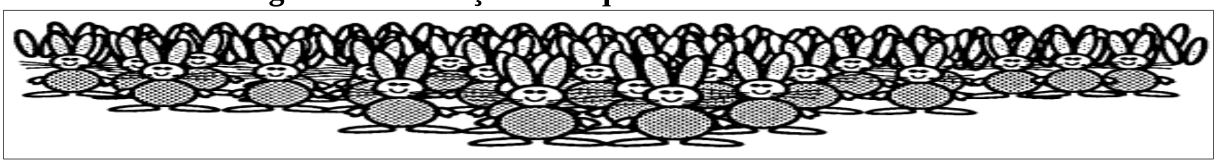
Figura 3 - Esquema mnemônico que demonstra a descrição e modelização da reprodução de coelhos relacionada com a sequência de Fibonacci



Fonte: Alves (2013, p.3).

Analisando, o esquema da figura 3, observamos que no primeiro mês, teremos apenas um casal de coelhos jovem, que não atingiu a maturidade. No segundo mês, ainda teremos um único casal, sendo este maduro, e que pode ser reproduzir. No terceiro mês, o casal maduro do mês anterior, se reproduz e gera um casal jovem, obtendo-se neste período, dois casais, um jovem e um maduro. No quarto mês, enquanto o casal jovem do mês anterior atinge a maturidade, o casal maduro se reproduz, obtendo-se neste período três casais. Seguindo essa dinâmica de maturação e reprodução, o processo de produção de casais coelhos continua indefinidamente. Como representado, na figura 4, a seguir:

Figura 4 - Descrição da sequência de coelhos imortais



Fonte: Gullberg (1997, p.286).

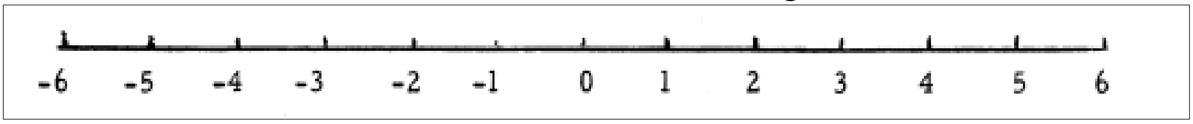
Ao escrevermos, em notação matemática, os resultados descritos anteriormente, tomando n como unidade temporal, e f_n como as filiações relacionadas ao tempo, estabelecemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow f_1 = 1 \\ n=2 \rightarrow f_2 = 1 \\ n=3 \rightarrow f_3 = 2 = f_1 + f_2 \\ n=4 \rightarrow f_4 = 3 = f_2 + f_3 \\ n=5 \rightarrow f_5 = 5 = f_3 + f_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n=n \rightarrow f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

Notemos, que o resultado geral obtido é um dos modelos matemáticos apresentados, no início da seção, da sequência de Fibonacci, no caso, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $n > 2$ .Sobre esse resultado Hefez (2003, p.27) ressalta que a sequência de Fibonacci por ser "uma recorrência do tipo $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois anteriores, etc". Argumentos, já apresentados na discussão da figura 3.

Por outro lado, seguindo a perspectiva de Alfred (1965) mostrada na figura 5, a seguir, de obtenção através da recursividade, de valores com índices negativos para a sequência de Fibonacci.

Figura 5 - Esquema mnemônico envolvendo a possibilidade da generalização do modelo de Fibonacci, no sentido, de termos valores com índices negativos.



Fonte: Alfred (1965, p.2).

Passaremos, pois, influenciados pela perspectiva de Alfred (1965), ao cálculo aritmético e algébrico, destes possíveis valores. Nesse sentido, podemos avaliar, na primeira fórmula, que: $n=1 \therefore f_1 = f_0 + f_{-1}$. Daí, poderemos ainda obter que $f_{-1} = f_1 - f_0$, todavia, não conhecemos ainda os valores numéricos correspondentes aos termos indicados por f_0 e f_{-1}.

Seguindo o mesmo raciocínio, escreveremos $n=2 \therefore f_2 = f_1 + f_0$ e, dai, inferimos a seguinte expressão algébrica $f_0 = f_2 - f_1$.Agora, com origem nos valores indicados em (*), poderemos escrever ainda que $f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$, o que nos parece natural, numa situação em que os coelhos ainda não existem. Entretanto, continuando o processo anterior, escrevemos $n=0 \therefore f_1 = f_0 + f_{-1}$, o que conduz ao valor $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1-0=1$, isto é, obtemos o valor de $f_{-1} = 1$. Neste momento, assinalamos uma possibilidade de distanciamento do modelo teórico da produção de coelhos. De fato, que significado cognoscível poderíamos fazer relacionar ao termo $f_{-1} = 1$?

Continuando, nossa atitude será no sentido de avançar com o raciocínio e, um pouco mais adiante, retomaremos alguns dos detalhes que necessitam ainda ser bem compreendidos no processo anterior. Dessa forma, podemos avaliar: $\begin{cases} f_{-3} = 2 = f_{-1} - f_{-2} \\ f_{-4} = -3 = f_{-2} - f_{-3} \\ f_{-5} = 5 = f_{-3} - f_{-4} \\ f_{-6} = -8 = f_{-4} - f_{-5} \\ f_{-7} = 13 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$. No entanto, podemos relacionar os resultados do seguinte modo: $\begin{cases} f_{-1} = 1 = f_1 \\ f_{-2} = -1 = -f_2 \\ f_{-3} = 2 = f_3 \\ f_{-4} = -3 = -f_4 \\ f_{-5} = 5 = f_5 \\ f_{-6} = -8 = -f_6 \\ f_{-7} = 13 = f_7 \end{cases}$. Além de inferirmos que:

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \text{ para n=1} \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \text{ para n=2} \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \text{ para n=3} \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \text{ para n=3} \\ f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\ f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\ f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \end{cases}$$

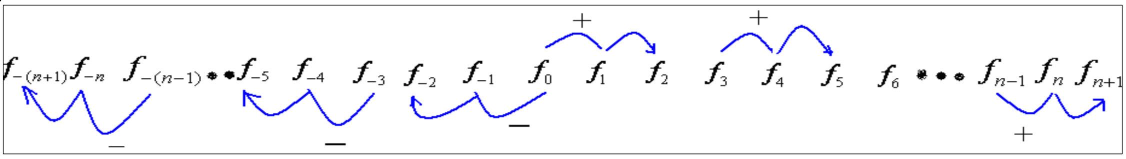
A partir das relações estabelecidas acima, conjecturamos a seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, comentada por Hoggat (1969), Zeckendorf (1972), Vorobiov (1974), Dunlap (1997), Alves e Borges Neto (2011), dentre outros estudos.

Sobre a propriedade e sua obtenção, é válido destacarmos que na discussão anterior, constituímos uma investigação envolvendo a identificação de termos com índices negativos, para a sequência de Fibonacci. Nessa, explicitamos relações aritmético-algébricas de uma nova entidade conceitual, que denotamos por $(f_{-n})_{n \in N}$, caracterizada pela relação

$f_{-n} - f_{-(n+1)} = f_{-(n+2)}$ ou $f_{-n} = f_{-(n+1)} + f_{-(n+2)}$, para $n \in N$; numa discussão semelhante a Alves e Borges Neto (2011, p. 140) que definem tal modelo como a "sequência extendida de Fibonacci".

Observemos que a partir da conhecida definição da sequência de Fibonacci, para valores $n > 0$, Alves e Borges Neto (2011) apresenta o diagrama mnemônico, descrito na figura 6. Explicitando, ainda, sua descrição dinâmica para valores $n \leq 0$.

Figura 6 - Descrição da sequência de Fibonacci para valores à direita de zero e à esquerda



Fonte: Alves e Borges Neto (2011, p.138).

Vale destacar que o esquema proposto por Alves e Borges Neto (2011) não descreve formalismo algum, é apenas, uma maneira de significar e transmitir ao estudante um modo de construção da sequência. Denotá-la-emos, doravante, por $(f_n)_{n\in Z}$.

Cabe observar, a possibilidade de generalização do modelo recursivo anterior. Nesse sentido, assinalamos o trabalho de Koshy (2011), quando toma a seguinte sequência, em que $\begin{cases} G_1 = a, G_2 = b, a, b \in IR \\ G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$. Facilmente, inferimos que: $(a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \ldots, \ldots)$ .Koshy (2011) chama-a de Sequência Generalizada de Fibonacci (*Generalized Fibonacci Sequence* – GFS) que, doravante, abreviaremos apenas por SGF. Com origem em $(G_n)_{n\in IN}$, indicamos o seguinte teorema.

Teorema 1: Dada a sequência $\{G_n\}_{n\in IN}$, então $G_n = a\cdot F_{n-2} + b\cdot F_{n-1}$, para $n \geq 3$.

Demonstração: Por indução, escrevemos $G_3 = a + b = a\cdot F_1 + b\cdot F_2$. Vamos admitir que o resultado é válido para $G_k = a\cdot F_{k-2} + b\cdot F_{k-1}$, $n = k$. Em seguida, vejamos que $G_{k+1} = G_k + G_{k-1} = (a\cdot F_{k-2} + b\cdot F_{k-1}) + (a\cdot F_{k-3} + b\cdot F_{k-2}) = a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) = a\cdot F_{k-1} + b\cdot F_k$ (cqd).

Na figura 7, trazemos um diagrama proposto por Koshy (2011, p. 110) aplicado ao estudo de uma colônia de abelhas. De fato, o autor inicia considerando como 'a' um macho (zangão) e 'b' uma abelha fêmea. Na figura abaixo, podemos antever o crescimento genealógico discutido e que se apoia nos coeficientes da sequência $(f_n)_{n\in N}$.

Figura 7 - Generalização e significação do modelo da sequência $(G_n)_{n\in N}$

Generation	1	2	3	4	5
Number of female bees	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$
Number of male bees	a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$
Total number of bees	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$

Fonte: Koshy (2011, p.110)

Ainda podemos distinguir outras propriedades relacionadas com a SF ou mesmo com a SGF descritas em vários artigos da década de 60 e 70, tais como: Adler (1971); Azevedo (1979); Brousseau, B. (1967, 1969, 1972); Chakerian (1973); Ferguson (1966); Feinberg (1963); Fisher e Kohlbeccker (1972); Pruit (1967); Zeckendorf (1972); Yalavigi, (1972) e Waddill (1992).

De fato, a partir da fórmula de recursividade indicada nos parágrafos anteriores, sabemos que: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \therefore \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$. Seguindo um raciocínio semelhante ao que encontramos em Koshy (2011, p. 240), conjecturamos o comportamento de convergência dos quocientes do tipo $\frac{f_{n+1}}{f_n} > 0$. Desse modo, estabelecemos ainda que: $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \leftrightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{f_n / f_{n-1}}$. Ora chamando $x_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, e determinamos a seguinte equação $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, e passando o limite, escrevemos ainda que: $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n} \therefore x = 1 + \frac{1}{x} \leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Hoggat (1969) destaca que as raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$ são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Além disso, Koshy (2011) declara o fato conhecido nos livros de História da Matemática que, a raiz positiva dessa equação, fornece justamente, o número de ouro, que é expresso por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e satisfaz a relação $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$; e como destaca Chakerian (1973) representa aproximações racionais da SF. Grimaldi (2012) relata que entre as muitas propriedades satisfeitas por α e β, podemos destacar: $\alpha^2 = \alpha + 1$; $\alpha\beta = -1$; $\alpha - \beta = \sqrt{5}$; $\alpha^{-1} = -\beta$; $\alpha^2 + \beta^2 = 3$; $\beta^2 = \beta + 1$; $\beta^{-1} = -\alpha$; $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$.

Huntley (1985, p. 63) argumenta que a "ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série. Trata-se da fórmula de Binet". Sobre tal formulação Stillwell (1989) destaca que:

> Tal formulação só foi descoberta mais de 500 anos mais tarde, por De Moivre [1730], e ao fazê-lo De Moivre introduzia uma nova e poderosa aplicação de séries infinitas, o método de geração de funções. Este método, que é de grande importância na análise combinatória, probabilidade e teoria dos números, será ilustrado usando a sequência de Fibonacci em si. (STILLWELL,1989, p.126, tradução nossa)

Koshy (2011, p. 79) comenta que "a fórmula explícita de Binet, nomeada assim em virtude de seu descobridor, o matemático Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856), em 1843". Tattersall (2005, p. 30) comenta que "a primeira prova foi fornecida em 1728, pelo sobrinho de Johann Bernoulli. E, em 1843, de modo independente por Binet. Um ano depois, 1844, também pelo matemático Gabriel Lamé". De modo sucinto, descrevemos o seguinte teorema.

Teorema 2: Dada ϕ a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, e sua raiz negativa ϕ', teremos que $f_n = \dfrac{\phi^n - \phi'^n}{\phi - \phi'}$, onde $n \geq 1$.Vale assinalar, antes de discutirmos sua demonstração que, em Hoggat (1969) declara a validade da fórmula anterior, para valores $n \leq 0$. O mesmo teorema pode ser expresso da forma abaixo, sendo a fórmula de Binet ou Lamé.

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 0,1,2,3,...$$

Sobre esta formulação, Lívio (2002, p. 108) destaca que "num primeiro momento, essa formidável e desconcertante fórmula, desde que não parece óbvio, que a partir da substituição de seus índices, a mesma produz números inteiros". Além disso, Huntley (1985, p. 63) argumenta que "não são necessários cálculos demorados para demonstrar que esta formula produz os primeiros termos inteiros da série". Burton (2007) ressalta que esta fórmula é obtida considerando-se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

Dando continuidade, como as raízes desta equação devem satisfazer a $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Se fizermos a primeira destas relações multiplicada por α^n, e a segunda por β^n, teremos: $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ (i) e $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$ (ii). E ao subtrairmos a segunda equação da primeira, e dividirmos ambas por $\alpha - \beta$, encontramos:

$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}$ (iii).Se colocarmos $H_n=(\alpha^n-\beta^n)/\alpha^n-\beta^n$. A equação anterior pode ser representada de forma mais concisa como: $H_{n+2}=H_{n+1}+H_n, n\geq 1$.

Notemos que, anteriormente, apresentamos alguns resultados relativos à α e β, tais como: $\alpha+\beta=1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ e $\alpha\beta=-1$.Consequentemente, obtemos: $H_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$, $H_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$ e $H_3=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha-\beta}=2$.Com isto, os resultados $H_1, H_2, H_{3,}$....., representam a Sequência de Fibonacci, com $f_n=\frac{\phi^n-\phi'^n}{\phi-\phi'}$, onde $n\geq 1$.

Portanto, a fórmula de Binet apresenta a possibilidade de obtenção dos termos inteiros da sequência de Fibonacci, de maneira explicita, sem utilizarmos a ideia da recursividade, sendo assim, um modelo de generalização da sequência de Fibonacci. Na seção seguinte, continuaremos tratando da fórmula de Binet, discutindo suas relações com as sequências recorrentes.

3.2.2 Sequências recursivas lineares e a fórmula de Binet

Vejamos agora, outros tipos de demonstrações da fórmula de Binet, nesse sentido, utilizaremos a noção de sequências lineares recursivas homogêneas. Koshy (2011) discute a seguinte equação $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ka_{n-k}$, com $c_1, c_2, c_3+...+c_k \in IR, c_k\neq 0$. O autor explicar o significado de "linear", na medida em que, todos os termos no lado direito comparecem, apenas, potências de grau um, dos termos antecedentes $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$. Parker (1964, p.67) comenta que "da teoria das equações homogêneas de diferenças lineares assegura que uma solução mais geral pode ser expressa por $f(n)=c_1x_1^{\ n}+c_2x_2^{\ n}$, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias".

Demonstraremos os argumentos de Koshy (2011) e de Parker (1964), sobre a obtenção da solução geral de uma sequência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesse sentido, utilizaremos os argumentos de Lima et al. (1998) sobre como determinar a solução geral de uma relação recorrente de segunda ordem, sendo a sequência de Fibonacci um exemplo de aplicação de tal modelo matemático.

Assim, iniciaremos apresentando que Lima et al. (1998) define este tipo sequência da seguinte da forma: $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, com p e q constantes, e $q\neq 0$. Note que, caso tenhamos $q=0$ a recorrência torna-se de primeira ordem. Lembrando ainda que a "cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2+pr+q=0$, denominada de equação característica." (LIMA et al.,1998, p.74).

Antes de continuarmos, justificaremos a associação existente, entre a relação de recorrência e uma equação do segundo grau da forma $r^2-r-1=0$(equação característica).

Desse modo, se tivéssemos a equação $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, com q=0. Teríamos $x_{n+2}=-p.x_{n+1}$, tornando-se uma relação de recorrência de primeira ordem, que tem como solução geral uma progressão geométrica da forma $x_n=r^n$. Logo, uma ideia inicial considerável será observar se alguma progressão geométrica da forma $x_n=r^n$, satisfaz a equação $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$. Assim, $r^{n+2}+pr^{n+1}+qr^n=0\rightarrow r^n(r^2+pr+q)=0,\forall n$, sendo $r^2+pr+q=0$ (equação característica da recorrência). Sendo as soluções de $r^2+pr+q=0$, soluções da relação de recorrência.

Outra questão, evidenciada por Lima et al. (1998) é de como obter uma solução geral para uma recorrência linear de segunda ordem, homogênea, com coeficientes constantes do tipo $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$. Nesse sentido, Lima et al. (1998, p.74-75) apresenta dois teoremas que respondem a questão levantada, teoremas que enunciamos e demonstramos a seguir:

Teorema 3: Se as raízes de $r^2+pr+q=0$, são r_1 e r_2 então $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração: Admitindo que $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ seja solução geral de $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, com r_1 e r_2 raízes. Logo,

$$C_1r_1^{n+2}+C_2r_2^{n+2}+p\left(C_1r_1^{n+1}+C_2r_2^{n+1}\right)+q\left(C_1r_1^n+C_2r_2^n\right)=0$$
$$\rightarrow C_1r_1^n\left(r_1^2+pr_1+p\right)+C_2r_2^n\left(r_2^2+pr_2+p\right)=0\rightarrow C_1r_1^n\left(0\right)+C_2r_2^n\left(0\right)=0,(cqd)$$

Teorema 4: Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2, com $r_1\neq r_2$, então todas as soluções de recorrência $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, são da forma $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Seja y_n uma solução de $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, temos que $C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_n$ Tomando dois casos particulares y_1 e y_2. Devemos provar que $\forall n\geq 0$, teremos

$C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_n$, onde C_1 e C_2, são soluções do sistema $\begin{cases} C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_1 \\ C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_2 \end{cases}$.

Demonstraremos o teorema anterior por indução. Com isto: I) assumiremos inicialmente que a expressão é válida para $n=1$ e $n=2$. Logo, temos que obter C_1 e C_2, na resolução do sistema a seguir. Resolvendo temos que:

$$\begin{cases} C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_1 \\ C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_2 \end{cases} \rightarrow C_1 = \frac{r_2^{\,2}y_1 - r_2y_2}{r_1r_2(r_2 - r_1)} \quad e \quad C_2 = \frac{r_1y_2 - r_1^{\,2}y_1}{r_1r_2(r_2 - r_1)}$$

Quando tivermos $r_1 \neq r_2, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$. O sistema pode ser classificado como SPD, caracterizando a solução para $n=1$ e $n=2$. Dando prosseguimento: II) Suponhamos que a expressão seja válida para n e $n+1$, devemos mostrar que a mesma é válida para $n+2$. Nesse sentido, partiremos da igualdade $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ (i), e como x_{n+1} e x_n são soluções de (i), estas assumem as seguintes formas: $x_{n+1} = C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}$ e $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$. Ao substituirmos, esses resultados em (i), encontramos:

$$\begin{aligned}
&x_{n+2} + p(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) + q(C_1r_1^n + C_2r_2^n) = 0 \\
&x_{n+2} + C_1r_1^n(?+ pr_1 + q) + C_2r_2^n(?+ pr_2 + q) = 0 \\
&x_{n+2} + C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2}
\end{aligned}$$

Como são r_1 e r_2 são raízes, temos que: $x_{n+2} = C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2}$ (cqd). A partir dos teoremas caracterizados temos condições de obter soluções gerais de equações recorrentes lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes.

Fundamentados nos resultados dos teoremas 3 e 4, discutidos anteriormente, a seguir apresentamos **outras demonstrações da Fórmula de Binet**. Vejamos:

Demonstração1: Sabemos que a relação de recorrência de Fibonacci é definida por: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, com $n \geq 0$ e $f_0 = f_1 = 1$, e que esta terá como equação característica $r^2 = r + 1$, com raízes $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.Então $f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (I). Para determinarmos os valores de C_1 e C_2, devemos utilizar as condições $f_0 = f_1 = 1$, a partir daí, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$, resolvendo o sistema, temos: $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ Logo, retomando (I), encontramos:

$$f_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], n \in N$$

Demonstração 2 : Em Vorob´ev (1961) discute uma demonstração dividida em etapas. Assim, enunciamos os seguintes lemas.

Lema 1: Seja uma solução $(a_1, a_2, a_3, ...)$ da equação recorrente $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Então, dado o número $c \in IR$, temos que $(ca_1, ca_2, ca_3, ..., ca_n, ...)$é solução para a fórmula recorrente.

Demonstração: Consideremos uma solução $(a_1, a_2, a_3, ...)$, isto é, vale que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \therefore c \cdot a_{n+2} = c \cdot a_{n+1} + c \cdot a_n$ descreve a sequência $(ca_1, ca_2, ca_3, ..., ca_n, ...)$.

Lema 2: Sejam duas soluções quaisquer para a descrição $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, por exemplo, $(a_1, a_2, a_3, ...)$ e $(b_1, b_2, b_3, ...)$. Então, teremos ainda que $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, ..., a_n + b_n, ...)$ constitui uma solução.

Demonstração: De imediato, escrevemos $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ e $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Segue que $(a_{n+2} + b_{n+2}) = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n)$ é outra sequência que satisfaz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Diante dos fatos expostos, Vorob´ev (1961) comenta que uma solução qualquer da SF pode ser descrita por $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$ também será solução. Vale destacarmos dos resultados dos lemas 1 e 2, que estes demonstram que soluções da fórmula recorrente $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ constituem um espaço vetorial.

Lema 3: Se duas soluções quaisquer são não proporcionais, então vale $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$.

Demonstração: De fato, se ocorressem duas soluções, digamos $(a_1, a_2, a_3, ...)$ e $(b_1, b_2, b_3, ...)$, e tivéssemos $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Daí, tendo em vista algumas propriedades, garantimos que: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_2}{b_2}$. Portanto, obtemos $\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_2}{b_2} \therefore \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2}$. Repetindo o argumento, vemos $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 + a_3}{b_2 + b_3} = \frac{a_3}{b_3} \therefore \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_3}{b_3}$. Por indução, teremos:

$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_n}{b_{n-1} + b_n} = \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$, isto é, vale $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... \frac{a_n}{b_n} = ...$, para $n \geq 1$.

Para concluir, Vorobe´v (1961) recorda que uma solução da fórmula recursiva ficará completamente determinada, na medida em que, fixamos os dois primeiros elementos. Daí, tomando outra solução $(d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots)$, buscaremos encontrar as constantes $c_1, c_2 \in IR$ de modo que: $\begin{cases} c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot b_1 = d_1 \\ c_1 \cdot a_2 + c_2 \cdot b_2 = d_2 \end{cases}$. Ora, podemos obter os coeficientes do sistema anterior, indicados por: $c_1 = \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ e $c_2 = \dfrac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$. É fácil verificar a necessidade de que $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$. Ora, o próximo argumento consiste em descrever todas as soluções do tipo $\left(\dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right) \cdot a_1 + \left(\dfrac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\right) \cdot b_2$ e, com isto, "obtemos a descrição de todas as soluções da equação recorrente $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$" (VOROBE´V, 1961, p. 23).

Demonstração 3: Brousseau, B. (1969, p. 99) comenta que "qualquer termo da sequência de Fibonacci pode ser escrito como $f_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, onde 'a' e 'b' são constantes adequadas". A fim de verificar sua assertiva, o autor escolhe $f_1 = 2, f_2 = 5$ o que resultará nas condições $\begin{cases} ar + bs = 2 \\ ar^2 + bs^2 = 5 \end{cases}$. E podemos solucionar tal sistema em termos das incógnitas 'a' e 'b'. Com efeito, temos: $a = \dfrac{2 - bs}{r} \therefore \left(\dfrac{2 - bs}{r}\right) r^2 + bs^2 = 5 \leftrightarrow 2r^2 - br^2 s + brs^2 = 5r$. Donde, encontramos

$$2r^2 - br^2 s + brs^2 = 5r \leftrightarrow 2r^2 + br - bs = 5r \leftrightarrow 2r^2 + br + b \cdot \frac{1}{r} = 5r \leftrightarrow 2r^3 + br^2 + b = 5r^2.$$

Por outro lado, recordamos as relações $r + s = 1, r \cdot s = -1, r^2 = r + 1$. Daí teremos que $b(r^2 + 1) = 5r^2 - 2r^3 \leftrightarrow b = \dfrac{5r^2 - 2r^3}{(r^2 + 1)} = \dfrac{5r^2 - 2(r^2 + r)}{(r^2 + 1)} = \dfrac{3r^2 - 2r}{(r^2 + 1)} = \dfrac{3r + 3 - 2r}{(r^2 + 1)} = \dfrac{r + 3}{r + 2}$. Por fim encontramos que: $b = \dfrac{r + 3}{r + 2}$, $a = \dfrac{2 - bs}{r}$. Como $r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $s = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, desenvolvendo a e b, encontramos: $a = \dfrac{15 + \sqrt{5}}{10}$ e $b = \dfrac{15 - \sqrt{5}}{10}$, E ao substituirmos a e b, em $f_n = ar^n + bs^n$, temos: $f_n = \left(\dfrac{15 + \sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{15 - \sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$ (cqd).

Assim, destacamos nesta seção algumas relações existentes entre sequências recorrentes lineares e a fórmula de Binet, trazendo algumas demonstrações de Binet a partir dos fundamentos das sequências recorrentes lineares homogêneas, no caso, de segunda ordem. Continuando a discussão sobre a modelo de Binet, na seção seguinte abordamos sua relação com as funções geradoras.

3.2.3 Funções Geradoras e a fórmula de Binet

Após a caracterização das sequências recursivas lineares homogêneas de segunda ordem, como modelo matemático, intrinsicamente relacionado com a sequência de Fibonacci e como elemento de obtenção da fórmula de Binet, destacaremos agora, a noção de funções geradoras que segundo Koshy (2011) são funções que constituem uma poderosa ferramenta de resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes. Com isto, nas demonstrações seguintes, destacamos as funções geradoras como elementos essenciais na obtenção da fórmula de Binet.

Demonstração 4: Usaremos a noção de função geradora, relativamente à expressão $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $f_1 = 1 = f_2$. E, assumindo que $f_0 = 0$, e tomando a função geradora correspondente a sequência de Fibonacci: $g(\mathrm{x}) = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots + f_nx^n +$ destacado em Renault (1996). Em seguida, Koshy (2011, p. 220) comenta que “desde que as ordens dos coeficientes de f_{n-1} e f_{n-2} são de 1 e 2 menores do que f_n, respectivamente, encontramos: $x \cdot g(x), \mathrm{x}^2 \cdot g(x)$: $\begin{cases} g(\mathrm{x}) = f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots + f_nx^n + \cdots \\ x \cdot g(\mathrm{x}) = f_1x^2 + f_2x^3 + f_3x^4 + \cdots + f_{n-1}x^n + \cdots \\ x^2 \cdot g(\mathrm{x}) = f_1x^3 + f_2x^4 + f_3x^5 + \cdots + f_{n-2}x^n + \cdots \end{cases}$, o que nos conduz a seguinte expressão:

$$g(x) - x \cdot g(x) - \mathrm{x}^2 \cdot g(x) = f_1x^1 + (f_2 - f_1) \cdot x^2 + (f_3 - f_2 - f_1)x^3 + \cdots + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n + \cdots$$

Recordando que $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$, com $f_1 = 1 = f_2$, determinamos: $g(x) - x \cdot g(x) - \mathrm{x}^2 \cdot g(x) = x \leftrightarrow g(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{1}{1-\phi x} - \dfrac{1}{1-\phi' x}\right]$. Em seguida escrevemos: $\sqrt{5}g(x) = \left[\dfrac{1}{1-\phi x} - \dfrac{1}{1-\phi' x}\right] = \sum_0^\infty (\phi x)^n - \sum_0^\infty (\phi' x)^n = \sum_0^\infty \left(\phi^n - \phi'^n\right)x^n$ e obtemos que: $g(x) = \sum_0^\infty \dfrac{\left(\phi^n - \phi'^n\right)}{\sqrt{5}} x^n$, sendo a função geradora dos números de Fibonacci.

Ideia semelhante é identificada na obra de Stillwell (1989, p. 127), quando acentua que “o fato inconteste que consiste tornar explícita a sequência $(f_n)_{n \in IN}$, e não mais recursiva, quando expressa em termos do número ϕ, é devido a simplicidade da função geradora $g(x)$ que esconde toda sequência". Passaremos, pois, a apresentação de outras ideias de demonstração, ainda relacionadas com funções geradoras e a sequência de Fibonacci.

Dessa forma, como destaca Huntley (1985 p.144-145) "os números de Fibonacci aparecem de novo em um contexto totalmente diverso". O autor argumenta que ao determinarmos alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$ através de divisão direta, forma a série de Fibonacci. A seguir, na figura 8, apresentamos a caracterização dos argumentos de Huntley (1985), através do desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$ no *software Máxima*.

Figura 8 - Desenvolvimento da função geradora da sequência de Fibonacci

```
(%i1) x/(1-x-x^2);
```

(%o1) $\dfrac{x}{-x^2-x+1}$

```
(%i4) taylor(x/(-x^2-x+1), x, 0, 70);
```

(%o4) $x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+21x^8+34x^9+55x^{10}+89x^{11}+144x^{12}+233x^{13}+377x^{14}+610x^{15}+987x^{16}+1597x^{17}+2584x^{18}+4181x^{19}+6765x^{20}+10946x^{21}+17711x^{22}+28657x^{23}+46368x^{24}+75025x^{25}+121393x^{26}+196418x^{27}+317811x^{28}+514229x^{29}+832040x^{30}+1346269x^{31}+2178309x^{32}+3524578x^{33}+5702887x^{34}+9227465x^{35}+14930352x^{36}+24157817x^{37}+39088169x^{38}+63245986x^{39}+102334155x^{40}+165580141x^{41}+267914296x^{42}+433494437x^{43}+701408733x^{44}+1134903170x^{45}+1836311903x^{46}+2971215073x^{47}+4807526976x^{48}+7778742049x^{49}+12586269025x^{50}+20365011074x^{51}+32951280099x^{52}+53316291173x^{53}+86267571272x^{54}+139583862445x^{55}+225851433717x^{56}+365435296162x^{57}+591286729879x^{58}+956722026041x^{59}+1548008755920x^{60}+2504730781961x^{61}+4052739537881x^{62}+6557470319842x^{63}+10610209857723x^{64}+17167680177565x^{65}+27777890035288x^{66}+44945570212853x^{67}+72723460248141x^{68}+117669030460994x^{69}+190392490709135x^{70}+\ldots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Notemos que a partir dos resultados anteriores, percebemos a relação discutida em Huntley (1985), sobre a relação entre a função geradora $x/(1-x-x^2)$ e a fórmula de Binet.

Dando continuidade, argumentaremos sobre a possibilidade apresentada por Huntley (1985) de determinarmos o valor do coeficiente de x^n no desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$, sendo u_n este resultado, que é representado por:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \geq 0 \text{ (Fórmula de Binet)}$$

Vale destacarmos, que o resultado anterior, mostra a relação discutida em Huntley (1985) entre a fórmula de Binet e sua função geradora, sobre a verificação desse resultado, a expressamos, no apêndice A.

Nesta seção, estabelecemos a relação entre as funções geradoras e a fórmula de Binet, como destaque para a demonstração do modelo de Binet através das funções geradoras. Na seção seguinte continuaremos destacando o modelo de Binet, discutindo outras extensões e generalizações.

3.2.4 A fórmula de Binet estendida a índices inteiros e outras generalizações

Ainda nesse sentido de discutirmos possíveis relações entre funções geradoras e a fórmula de Binet, apresentamos agora, a possibilidade de termos números de Fibonacci com índices negativos, resultados já caracterizados, pela seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$. Desse modo, tomaremos como referência, a demonstração de tal propriedade, os argumentos de Hoggat (1969) que para demonstrá-la, escreve simplesmente:

Demonstração 5: Utilizando a formula de Binet, $f_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta}$. Em seguida, observa que $\alpha\beta = -1 \therefore f_{-n} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$. Com isto, concluímos que $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n\,(cqd)$.

Ainda sobre tal perspectiva, mostraremos a seguir outros argumentos que também caracterizam tal propriedade de Fibonacci, assim utilizaremos a noção de função geradora discutida em Koshy (2011).

Demonstração 6: Tomando a função geradora dos números de Fibonacci Koshy (2011) $g(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + ... + f_nx^n + ...$, e de acordo com os argumentos de Vorobiov (1974, p.33), destacando o fato de que “a simples expressão $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, permite reduzir todos os problemas relacionados com os números de Fibonacci de índice inteiro qualquer a problemas em que podemos utilizar a sequência de Fibonacci com índices naturais”.

Dessa forma, podemos reescrever a função geradora do seguinte modo: $g'(x) = f_1x - f_2x^2 + f_3x^3 - ...... + (-1)^{n+1} f_nx^n + ...$. Procedendo como em Koshy (2011), fazemos:
$$\begin{cases} g'(x) = f_1x - f_2x^2 + f_3x^3 - ...... + (-1)^{n+1} f_nx^n + ... \\ -xg'(x) = f_1x^2 - f_2x^3 + f_3x^4 + ... - (-1)^{n+1} f_nx^{n+1} + ... \\ x^2g'(x) = f_1x^3 - f_2x^4 + f_3x^5 - ...... + (-1)^{n+1} f_nx^{n+2} + ... \end{cases}$$

Realizando os cálculos, obtemos a expressão: $g'(x)+xg'(x)-x^2g'(x)=$ $= f_1x+(-f_2+f_1)x^2+(f_3-f_2-f_1)x^3+....+(-1)^{n+1}(f_n-f_{n-1}-f_{n-2})x^n+....$ Dando continuidade, como, $f_1=f_2=1$; $(-f_2+f_1)=0$; $(f_3-f_2-f_1)=0$ e $(f_n-f_{n-1}-f_{n-2})=0$, temos:

$$g'(x)(1+x-x^2)=1x+(0)x^2+(0)x^3+....+(-1)^{n+1}(0)x^n+....\rightarrow g'(x)=\frac{x}{1+x-x^2}$$

Desse modo, obtemos a função geradora dos números de Fibonacci com índices negativos.

Continuando, como destaca Huntley (1985 p. 144-145) “os primeiros coeficientes do desenvolvimento de $x/(1+x-x^2)$ são os mesmos, a não ser pelo fato de serem alternadamente positivos e negativos”, sendo $(1,-1,2,-3,5,-8,13,-21\ldots)$. Fato que caracterizamos no desenvolvimento na figura 9, a seguir.

Figura 9 - Desenvolvimento da função geradora dos números de Fibonacci com índices negativos.

```
(%i2) x/(1+x-x^2);
```

(%o2) $\frac{x}{-x^2+x+1}$

```
(%i4) taylor(x/(-x^2+x+1), x, 0, 50);
```

(%o4) $x-x^2+2x^3-3x^4+5x^5-8x^6+13x^7-21x^8+34x^9-55x^{10}+89x^{11}-144x^{12}+233x^{13}-377x^{14}+610x^{15}-987x^{16}+1597x^{17}-2584x^{18}+4181x^{19}-6765x^{20}+10946x^{21}-17711x^{22}+28657x^{23}-46368x^{24}+75025x^{25}-121393x^{26}+196418x^{27}-317811x^{28}+514229x^{29}-832040x^{30}+1346269x^{31}-2178309x^{32}+3524578x^{33}-5702887x^{34}+9227465x^{35}-14930352x^{36}+24157817x^{37}-39088169x^{38}+63245986x^{39}-102334155x^{40}+165580141x^{41}-267914296x^{42}+433494437x^{43}-701408733x^{44}+1134903170x^{45}-1836311903x^{46}+2971215073x^{47}-4807526976x^{48}+7778742049x^{49}-12586269025x^{50}+...$

Fonte: Elaborado pelo autor.

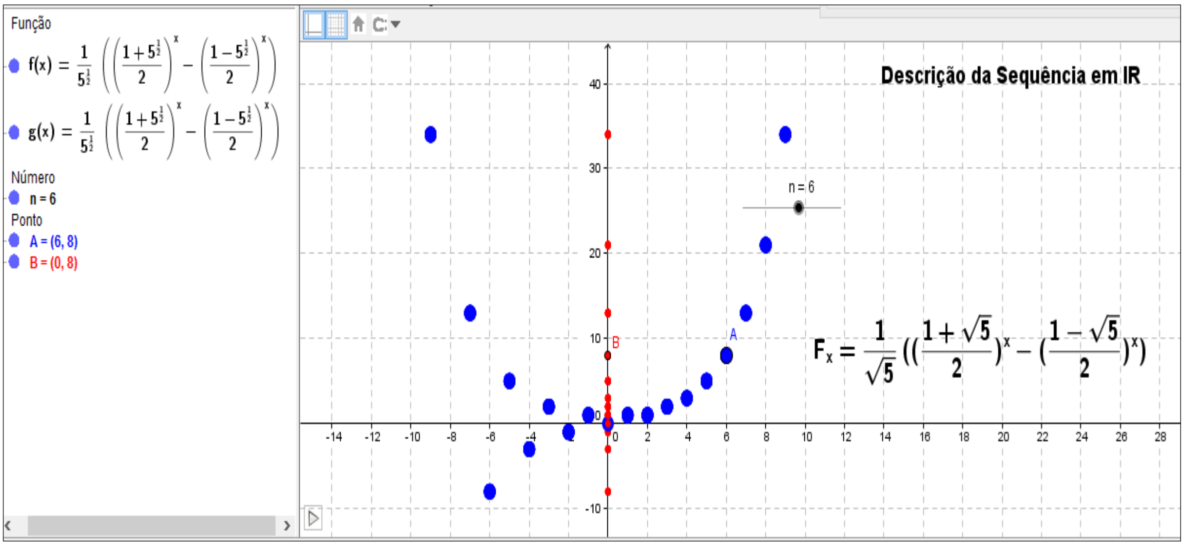
Além disso, Huntley (1985) apresenta uma forma de determinarmos o valor do coeficiente de x^n no desenvolvimento de $x/(1+x-x^2)$, que é u_{-n}, correspondendo ao termo geral da sequência de Fibonacci com índices negativos. Fato que apresenta o seguinte resultado:

$$u_{-n}=(-1)^{n+1}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]\rightarrow u_{-n}=(-1)^{n+1}.u_n \text{ (Fórmula de Binet com índices inteiros).}$$

Propriedade já discutida, que caracteriza $x/(1+x-x^2)$ como a função geradora de extensão dos números de Fibonacci aos inteiros, demonstração que apresentamos no apêndice B.

A seguir, descrevemos a função $f_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1}$, com $x \in IR$, que representa a extensão da sequência de Fibonacci, para índices inteiros. E com o *software GeoGebra*, colocamos em destaque, seus valores assumidos no campo dos inteiros. Caracterização realizada na figura 10, a seguir:

Figura 10 - Visualização da sequência de Fibonacci para valores à esquerda e à direita de zero.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos, ainda, a simetria de alguns valores da sequência com relação ao eixo das ordenadas, sendo estes valores de índices inteiros pares da referida sequência, como demonstrado em parágrafos anteriores. Gráfico semelhante é discutido por Elmore (1967) e constitui a generalização da descrição do Teorema de Binet ou Lamé.

Finalizaremos a seção, apresentando outros modelos generalizados da fórmula de Binet. Nesse sentido, no manuscrito de Horadam (1965) encontramos a definição da sequência recursiva mais geral $(w_n)_{n \in IN}$, definida pelas seguintes condições: $w_n = w_n(a,b,p,q), w_0 = a, w_1 = b, w_n = p \cdot w_{n-1} - q \cdot w_{n-2}$, com $n \geq 2, a,b,p,q \in Z$. Associando ao polinômio $x^2 - px + q = 0$, na condição em que $p^2 - 4q \neq 0$, Horadam (1965) indica o seguinte termo geral $w_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}, A = b - a\beta, Bb - a\alpha$. Morgado (1991, p. 423) declara que "a sequência $(w_n)_{n \in IN}$ envolvendo a generalização da sequência de Fibonacci", uma vez que constata novamente, a fórmula de Binet.Expressa por:

$$f_n = w_n(0,1,1,-1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Maynard (2008) discute também certas propriedades da Sequência Generalizada de Fibonacci. Nesse sentido, define a relação: $f_0^* = 0, f_1^* = 1, f_n^* = a \cdot f_{n-1}^* + b \cdot f_{n-2}^*, n \geq 2$. O autor observa que, no caso particular $a = b = 1$ teremos a sequência original de Fibonacci. Com origem nesta definição de SGF, ele apresenta o seguinte teorema, o qual, pode ser descrito como uma fórmula de Binet para a SGF.

Teorema 5: Dados $a,b \in IR^+$. Então, poderemos escrever $f_n^* = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b+a^2}}$, aonde $\alpha = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}, \beta = \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}$.

Demonstração: Maynard (2008) considera de modo preliminar, a seguinte equação $x^2 = ax + b$ e suas raízes designadas por α,β. De imediato, depreendemos que: $f_0^* = \dfrac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{4b+a^2}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{4b+a^2}} = 0$ e que $f_1^* = \dfrac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{4b+a^2}} = \dfrac{\sqrt{4b+a^2}}{\sqrt{4b+a^2}} = 1$. Em seguida, assumindo por indução $f_n^* = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b+a^2}}$, escrevemos:

$$f_{n+1}^* = a \cdot f_n^* + b \cdot f_{n-1}^* = a \cdot \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b+a^2}}\right) + b \cdot \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{4b+a^2}}\right) = \left(\frac{a\alpha^n - a\beta^n + b\alpha^{n-1} - b\beta^{n-1}}{\sqrt{4b+a^2}}\right) =$$
$$= \left(\frac{\alpha^{n-1}(a\alpha + b) - \beta^{n-1}(a\beta + b)}{\sqrt{4b+a^2}}\right) = \left(\frac{\alpha^{n-1} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2}{\sqrt{4b+a^2}}\right) = \left(\frac{\alpha^{n`+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{4b+a^2}}\right) \therefore f_{n+1}^* = \left(\frac{\alpha^{n`+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{4b+a^2}}\right)$$

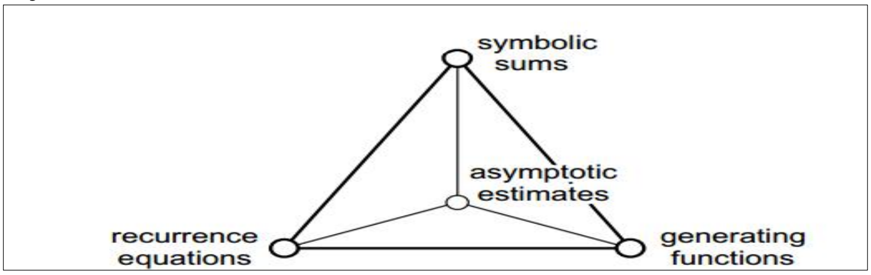
O último resultado evidencia o caráter atual evolutivo do modelo de Fibonacci. Nesse caso, vimos uma descrição correlata à fórmula de Binet. Acentuamos que o teor da demonstração passada se mostra compatível com um nível de conhecimento de um curso de graduação em Matemática, todavia, tal resultado carece de maior divulgação no lócus acadêmico.

Na seção subsequente, acentuaremos uma perspectiva propugnada por Kauers e Paule (2011), que acentuam as relações conceituais e possibilidades promovidas pelo o uso e exploração da noção de função geradora.

3.2.5 Comportamento assintótico, funções geradoras, somatórios, relações de recorrência e o modelo de Fibonacci.

Nesta seção buscaremos relacionar o estudo do modelo de generalização de Fibonacci à fórmula de Binet, como elemento de obtenção e discussão de algumas identidades clássicas de Fibonacci, sendo estas obtidas a partir da relação entre função geradora, relação de recorrência, somas simbólicas e comportamento assintótico da série de Fibonacci. seguindo a perspectiva discutida em Kauers e Paule (2011) de uma relação compreensiva entre esses conceitos. Relações destacadas, na figura 11, a seguir.

Figura 11 – Discussão de uma abordagem compreensiva envolvendo a noção de funções geradoras, equações recorrentes, somas simbólicas e estimativas assintóticas



Fonte: Kauers e Paule (2011, p.14).

De maneira, a contemplarmos a abordagem discutida em Kaures e Paule (2011) demonstraremos algumas propriedades de Fibonacci relacionando função geradora, somatórios, relações de recorrência e comportamento assintótico. Nesse sentido, iniciaremos tal discussão ilustrando a questão do comportamento assintótico da série de Fibonacci, ou seja, observar o que ocorre com a série quando esta assume valores elevados de n. Como assinala Huntley (1985), ao ressaltar que:

> Resultado interessante que surge é que, à medida que os termos da série aumentam a sequência de Fibonacci aproxima-se cada vez mais de uma progressão geométrica, não sendo outra a razão da série a razão áurea, fi. Estes resultados agradáveis se confirmam quando nos deparamos com a fórmula de Binet para o termo geral da série de Fibonacci. Veremos que, para valores elevados de n, (HUNTLEY 1985, p.143)

Com isto, Huntley (1985) enuncia que a fórmula de Binet, assume a seguinte forma $u_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, de onde teremos, $log\, u_n \cong 0{,}21n - 0{,}35$.Sobre tal propriedade, em Vorobiov (1974) encontramos o seguinte resultado:

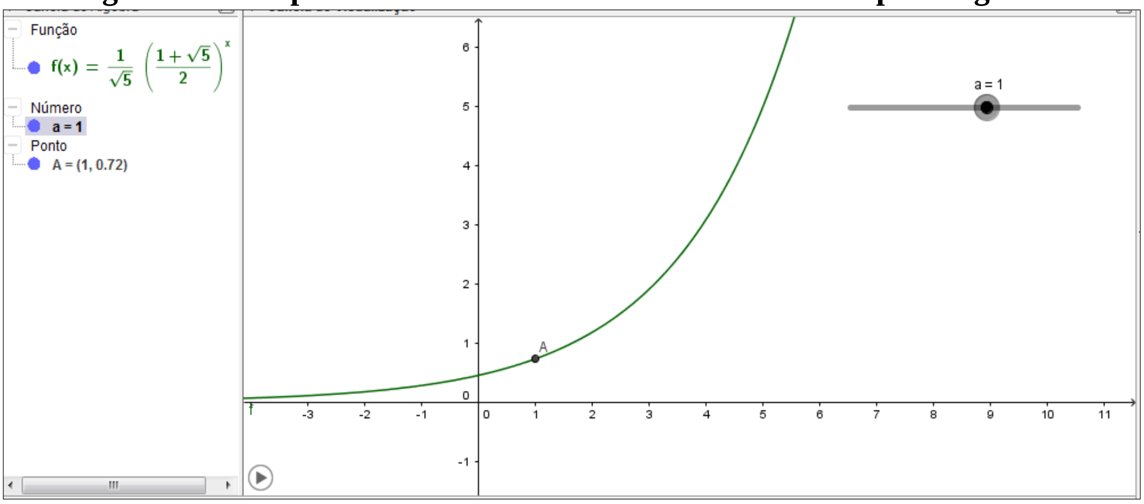
Teorema 6: O número de Fibonacci f_n é o inteiro mais próximo do número $\alpha^n/\sqrt{5}$, ou seja, é o inteiro mais próximo ao enésimo termo a_n da progressão geométrica cujo primeiro termo é $\alpha^n/\sqrt{5}$, e cuja razão é α. Isto é: $f_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \to f_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$.

Demonstremos o teorema anterior, utilizando os argumentos de Koshy (2011), e a partir de Binet, obtemos: $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \to F_n = \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]$, como $|\beta| < |\alpha|$ e $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$, quando $n \to 0$. Daí teremos que, para n elevado: $F_n \cong \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta} \to F_n \cong \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ (cqd).

Dando continuidade, Huntley (1985, p.64) afirma que “a fórmula de Binet para termos distintos da série de Fibonacci pode ser considerada uma função continua quando n é grande. Ela pode ser escrita: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 0,4472x(1,6180)^x$. Para todos os fins práticos, os números de Fibonacci, acham-se, nesta curva”.

Notemos que o comportamento expresso na figura 12, caracteriza uma mudança de comportamento gráfico relativo à fórmula de Binet, que como mostramos na figura 10, apresenta graficamente um comportamento discreto para a fórmula de Binet, quando esta assume valores pequenos de n. E como caracterizamos na figura 12, na medida em que tais valores são elevados esse comportamento se modifica, sendo agora um comportamento contínuo.

Figura 12- Comportamento contínuo da Fórmula de Binet para n grande



Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuaremos destacando, ainda, a relação entre funções geradoras e os números de Fibonacci, apresentando algumas identidades da sequência obtidas a partir de funções geradoras, somatórios e relações de recorrência.

Desse modo, iniciaremos destacando as considerações de Dickson (1919) que assinala grande quantidade de matemáticos, ao longo dos tempos, que contribuíram no que ele denomina de Teoria Algébrica de Séries Recorrentes. Dentre eles, Dickson destaca: J. D. Cassini, A. De Moivre, L. Euler, J. Lagrange, Pietro Paoli, J. B, Fourier, D. André, C. A. Laissant, etc. Muitos deles exploraram a noção de função geradora no sentido da obtenção de certos resultados.

Nesse sentido, Koshy (2011) desenvolve interesse na determinação de funções geradoras correspondentes às sequências definidas por $\left(f_{3n}\right)_{n\in IN}$ e $\left(f_n^{\,3}\right)_{n\in IN}$ ou ainda $\left(f_{n+m}\right)_{n,m\in IN}$, sendo estas identidades de Fibonacci. Vejamos no caso de $\left(f_{3n}\right)_{n\in IN}$, escrevemos: $g(x)=f_0+f_3x+f_6x^2+f_9x^3+\cdots+f_{3n}x^n+\cdots$. Em seguida, Koshy (2011) escreve: $\begin{cases} g(x)=f_0+f_3x+f_6x^2+f_9x^3+\cdots+f_{3n}x^n+\cdots \\ 4xg(x)=4f_0x+4f_3x^2+4f_6x^3+4f_9x^4+\cdots+4f_{3n}x^{n+1}+\cdots \\ x^2g(x)=f_0x^2+f_3x^3+f_6x^4+f_9x^5+\cdots+f_{3n}x^{n+2}+\cdots \end{cases}$. Por outro lado, podemos inferir, por meio de Indução Matemática, que $f_{3n}=4f_{3n-3}+f_{3n-6}$. Com efeito, vejamos que: $n=1\therefore f_3-4f_0+f_{-3}=0$, para $n=k\therefore f_{3k}-4f_{3k-3}-f_{3k-6}=0$, devemos verificar se propriedade é válida para $n=k+1\therefore f_{3(k+1)}-4f_{3(k+1)-3}-f_{3(k+1)-6}=0$. Daí temos que: $f_{3(k+1)}-4f_{3(k+1)-3}-f_{3(k+1)-6}=0\to f_{3k+3}-4f_{3k}-f_{3k-3}=0\to f_{(3k+3)-3}-4f_{(3k)-3}-f_{(3k-3)-3}$ $=0\to f_{3k}-4f_{3k-3}-f_{3k-6}=0\to 0=0$ (cqd). Com origem na relação anterior, finalmente, teremos: $g(x)-4xg(x)-x^2g(x)=2x+0+0+\cdots$ e, por fim, indica a seguinte função geradora $g(x)=\dfrac{2x}{1-4x-x^2}$, relativamente à sequência $\left(f_{3n}\right)_{n\in IN}$.

Vejamos, agora, a função geradora da seguinte sequência $\left(f_n^{\,3}\right)_{n\in IN}$. Nesse caso, consideraremos a seguinte série de potências $g(x)=f_0^{\,3}+f_1^{\,3}x+f_2^{\,3}x^2+f_3^{\,3}x^3+\cdots+f_n^{\,3}x^n+\cdots$. E, em seguida, emprega o seguinte procedimento:

$$\begin{cases} g(x) = f_0^{\,3} + f_1^{\,3}x + f_2^{\,3}x^2 + f_3^{\,3}x^3 + \cdots + f_n^{\,3}x^n + \cdots \\ 3xg(x) = 3f_0^{\,3}x + 3f_1^{\,3}x^2 + 3f_2^{\,3}x^3 + 3f_3^{\,3}x^4 + \cdots + 3f_n^{\,3}x^{n+1} + \cdots \\ 6x^2g(x) = 6f_0^{\,3}x^2 + 6f_1^{\,3}x^3 + 6f_2^{\,3}x^4 + 6f_3^{\,3}x^5 + \cdots + 6f_n^{\,3}x^{n+2} + \cdots \\ 3x^3g(x) = 3f_0^{\,3}x^3 + 3f_1^{\,3}x^4 + 3f_2^{\,3}x^5 + 3f_3^{\,3}x^6 + \cdots + 3f_n^{\,3}x^{n+3} + \cdots \\ x^4g(x) = f_0^{\,3}x^4 + f_1^{\,3}x^5 + f_2^{\,3}x^6 + f_3^{\,3}x^7 + \cdots + f_n^{\,3}x^{n+4} + \cdots \end{cases}$$

.Reparemos que, a extensa listagem envolve o emprego de uma identidade, que neste caso, é descrita por $f_{n+4}^3 - 3f_{n+3}^3 - 6f_{n+2}^3 + 3f_{n+1}^3 + f_n^3 = 0$ e encontrada, como desafio, proposto ao leitor, em Verner e Hoggat (1963). Outras referências a esta e outras identidades, que viabilizam a determinação de funções geradoras, podem ser consultadas em Azarian (2012).

Koshy (2011) comenta a demonstração de identidades clássicas de Fibonacci, do tipo $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$, que como destaca Vorobe´v (1961) é verificada, de modo *standard*, por meio de Indução Matemática ou certas manipulações algébricas. Por outro lado, Koshy (2011) comenta o argumento explorado por J. Ginzburg, em 1948. Neste sentido, considera a seguinte soma parcial $s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ e, é fácil ver que $s_0 = f_0 = 0$. Koshy (2011) define ainda, a seguinte série de potência $g(x) = s_0 + s_1x^1 + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots + s_nx^n + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} s_nx^n$. Além de avaliar que: $2xg(x) = \sum_{1}^{+\infty} 2s_{n-1}x^n$ e $x^3g(x) = \sum_{1}^{+\infty} s_{n-3}x^n$. Dando continuidade, observa que: $s_n - 2s_{n-1} + s_{n-3} = 0$, o que pode ser verificado por Indução Matemática. Com efeito, vejamos que $n = 3 \therefore s_3 - 2s_2 + s_0 = 0 \leftrightarrow (f_0 + f_1 + f_2 + f_3) - 2(f_0 + f_1 + f_2) + f_0 = f_3 - f_2 - f_1 = 0$

Em seguida, verificamos ainda que: $n = 4 \therefore s_4 - 2s_3 + s_1 = 0$, donde encontramos: $(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4) - 2(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) + f_0 + f_1 = f_4 - f_3 - f_2 = 0$. Admitindo o passo indutivo, examinaremos o comportamento da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &s_{n+1} - 2s_n + s_{n-2} = 0 \leftrightarrow s_n + f_{n+1} - 2s_{n-1} - 2f_n + s_{n-3} + f_{n-2} = (s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2}) + \\ &(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-2}) = 0 + (f_n + f_{n-1} - 2f_n + f_{n-2}) = (-f_n + f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &= (-f_{n-1} - f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-2}) = 0 \end{aligned}$$

Continuando, escreve: $(1 - 2x + x^3)g(x) = x \therefore g(x) = \dfrac{x}{(1 - 2x + x^3)}$. Sendo esta, a (função geradora da soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci).

Vimos anteriormente, que Koshy (2011) apresenta um método de obtenção de funções geradoras de identidades clássicas de Fibonacci, tal como $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$. Desse modo, Hoggat e Lind (1973) também apresenta um método de demonstração da função geradora, de $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$. Para tal fim, utiliza algumas funções geradoras preestabelecidas e através de manipulações algébricas, obtêm a função geradora desejada, considerando as seguintes condições inicias $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. Método de demonstração que apresentaremos, a seguir:

Na sequência, admitiremos inicialmente que: $\sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ e $\sum_{0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$ resultados já conhecidos. E ao fazermos, $\left(\sum_{0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} F_n x^n\right)$. Encontramos:

$\left(\sum_{0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} F_n x^n\right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x-x^2} \rightarrow \sum_{0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} F_j\right) x^n = \frac{x}{1-2x+x^3}$. Com as condições inicias $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, temos que $\sum_{j=0}^{\infty} F_j = F_{n+2} - 1$. Daí, concluímos que: $g(x) = \frac{x}{1-2x+x^3} = \sum_{0}^{\infty} (F_{n+2} - 1) x^n$, sendo a função geradora de $F_{n+2} - 1 = \sum_{j=0}^{\infty} F_j$, propriedade que como já destacamos, nos informa a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci. Resultados que apresentamos na figura13, a seguir:

Figura 13- Desenvolvimento da função geradora da soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci

```
(%i14) G(x)= x/(1-2*x+x^3);
```

(%o14) $G(x) = \frac{x}{x^3 - 2x + 1}$

```
(%i15) taylor(x/(x^3-2*x+1), x, 0, 70);
```

(%o15) $x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 12x^5 + 20x^6 + 33x^7 + 54x^8 + 88x^9 + 143x^{10} + 232x^{11} + 376x^{12} + 609x^{13} + 986x^{14} + 1596x^{15} + 2583x^{16} + 4180x^{17} + 6764x^{18} + 10945x^{19} + 17710x^{20} + 28656x^{21} + 46367x^{22} + 75024x^{23} + 121392x^{24} + 196417x^{25} + 317810x^{26} + 514228x^{27} + 832039x^{28} + 1346268x^{29} + 2178308x^{30} + 3524577x^{31} + 5702886x^{32} + 9227464x^{33} + 14930351x^{34} + 24157816x^{35} + 39088168x^{36} + 63245985x^{37} + 102334154x^{38} + 165580140x^{39} + 267914295x^{40} + 433494436x^{41} + 701408732x^{42} + 1134903169x^{43} + 1836311902x^{44} + 2971215072x^{45} + 4807526975x^{46} + 7778742048x^{47} + 12586269024x^{48} + 20365011073x^{49} + 32951280098x^{50} + 53316291172x^{51} + 86267571271x^{52} + 139583862444x^{53} + 225851433716x^{54} + 365435296161x^{55} + 591286729878x^{56} + 956722026040x^{57} + 1548008755919x^{58} + 2504730781960x^{59} + 4052739537880x^{60} + 6557470319841x^{61} + 10610209857722x^{62} + 17167680177564x^{63} + 27777890035287x^{64} + 44945570212852x^{65} + 72723460248140x^{66} + 117669030460993x^{67} + 190392490709134x^{68} + 308061521170128x^{69} + 498454011879263x^{70} + \ldots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Prosseguindo, e como já mostramos, Huntley (1985) argumenta que o desenvolvimento de $x/(1+x-x^2)$ fornece os seguintes coeficientes $(1,-1,2,-3,5,-8,13,-21,..)$, resultados mostrados na figura 9. A fim de comprovarmos tal assertiva, utilizamos os argumentos de Hoggat (1969), Hoggat e Lind 1973) apresentados anteriormente. Com isto iniciaremos considerando:

$F_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \rightarrow F_{-n} = \dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta}$, como $\alpha\beta = -1$, temos $\dfrac{1}{\alpha} = -\beta$ e $\dfrac{1}{\beta} = -\alpha$. Donde encontramos: $F_{-n} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta}$. E ao aplicarmos somatório nos lados da equação anterior, temos: $\sum_0^\infty F_{-n}x^n = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\left(\sum_0^\infty (-\beta)^n x^n - \sum_0^\infty (-\alpha)^n x^n\right)$, como $\sum_0^\infty a^n x^n = \dfrac{1}{1-ax}$. Daí encontramos: $\sum_0^\infty F_{-n}x^n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{1+\beta x} - \dfrac{1}{1-\alpha x}\right) = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\left(\dfrac{(\alpha-\beta)x}{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2}\right)$, como $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha\beta = -1$, temos: $\sum_0^\infty F_{-n}x^n = \dfrac{x}{1+x-x^2}$, sendo tal resultado a (função geradora dos números de Fibonacci estendido a índices negativos).

Tendo por base obtenção de funções geradoras de identidades clássicas de Fibonacci realizada anteriormente, vemos a possibilidade de obtermos funções geradoras de outras propriedades de Fibonacci. Isto é, realizar uma extensão de algumas propriedades clássicas de Fibonacci a índices negativos.

Com este fim, iniciamos tal discussão obtendo as leis de formação de algumas propriedades clássicas de Fibonacci estendidas a índices negativos. Referendar-nos-emos em Koshy (2011) que demonstra as identidades clássicas de Fibonacci, utilizando sua lei de recorrência e nos argumentos de Alves e Borges Neto (2011) sobre a possibilidade de extensão dos números de Fibonacci aos inteiros. Dando continuidade, temos que, a partir da lei de recorrência da sequência de Fibonacci, podemos escrever: $\begin{cases} f_0 = f_2 - f_1 \\ f_{-1} = f_1 - f_0 \\ f_{-2} = f_0 - f_{-1} \\ f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{-n} = f_{-(n-2)} - f_{-(n-1)} \end{cases}$. E ao somarmos, os lados esquerdo e direito das recorrências, obtemos, do lado esquerdo

$f_0 + f_{-1} + f_{-2} + f_{-3} + ... + f_{-n}$; e do lado direito, ao realizarmos as devidas eliminações obtemos $f_2 - f_{-(n-1)}$.Como $f_2 = 1$. Obtemos como resultado a seguinte identidade: $\sum_{-i,i=0}^{-n} f_{-i} = -f_{-(n-1)} + 1 \rightarrow \sum_{-i,i=0}^{-n} f_{-i} = -f_{(-n+1)} + 1$, que nos fornece (a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices negativos).

Continuando, utilizaremos o método de Hoggat e Lind (1973) para obtermos a função geradora da identidade $-f_{(-n+1)} + 1$. Iniciaremos com $\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ e $\sum_0^{\infty} F_{-n} x^n = \frac{x}{1+x-x^2}$, e ao fazermos, $\left(\sum_0^{\infty} x^n\right)\left(\sum_0^{\infty} F_{-n} x^n\right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{1+x-x^2} \rightarrow \sum_0^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} F_{-j}\right) x^n = \frac{x}{1-2x^2+x^3}$.

Como: $\sum_{j=0}^{\infty} F_{-j} = -F_{(-n+1)} + 1$. Obtemos $\sum_0^{\infty}\left(-F_{(-n+1)} + 1\right) x^n = \frac{x}{1-2x^2+x^3}$ (cqd). Sendo a função geradora da soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices negativos. Fato que caracterizamos na figura 14, a seguir:

Figura 14 - Função Geradora da Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices negativos

```
(%i7) x/(1-2*x^2+x^3);
(%o7) x/(x^3-2*x^2+1)

(%i9) taylor(x/(x^3-2*x^2+1), x, 0, 70);
(%o9) x+2*x^3-x^4+4*x^5-4*x^6+9*x^7-12*x^8+22*x^9-33*x^10+56*x^11-88*x^12+145*x^13-232*x^14+378*x^15-609*x^16+
988*x^17-1596*x^18+2585*x^19-4180*x^20+6766*x^21-10945*x^22+17712*x^23-28656*x^24+46369*x^25-75024*x^26+
121394*x^27-196417*x^28+317812*x^29-514228*x^30+832041*x^31-1346268*x^32+2178310*x^33-3524577*x^34+5702888
*x^35-9227464*x^36+14930353*x^37-24157816*x^38+39088170*x^39-63245985*x^40+102334156*x^41-165580140*x^42+
267914297*x^43-433494436*x^44+701408734*x^45-1134903169*x^46+1836311904*x^47-2971215072*x^48+4807526977
*x^49-7778742048*x^50+12586269026*x^51-20365011073*x^52+32951280100*x^53-53316291172*x^54+86267571273
*x^55-139583862444*x^56+225851433718*x^57-365435296161*x^58+591286729880*x^59-956722026040*x^60+
1548008755921*x^61-2504730781960*x^62+4052739537882*x^63-6557470319841*x^64+10610209857724*x^65-
17167680177564*x^66+27777890035289*x^67-44945570212852*x^68+72723460248142*x^69-117669030460993*x^70+
...
```

Fonte: Elaboração do autor.

Fundamentados nos argumentos de Hoggat e Lind (1973), Alves e Borges Neto (2011) podemos estabelecer algumas funções geradoras de identidades clássicas dos números de Fibonacci, com índices inteiros. Sendo estas estabelecidas a partir da relação existente entre funções geradoras e somatórios. Fundamentos que seguimos à obtenção de algumas dessas funções geradoras, resultados catalogados na tabela 1, a seguir.

Tabela 1: Funções Geradoras de algumas identidades clássicas de Fibonacci nos inteiros

Propriedade de Fibonacci	Funções Geradoras
1-Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares[1]	$c(x)=\frac{x}{1-3x+x^2}=\sum_0^\infty (F_{2n})x^n$
2-Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares	$e(x)=\frac{x}{1-4x+4x^2-x^3}=\sum_0^\infty (F_{2n+1}-1)x^n$
3-Os n primeiros termos ao quadrado da sequência de Fibonacci	$g(x)=\frac{x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}=\sum_0^\infty F_n^{\,2}x^n$
4-Soma dos n primeiros números ao quadrado de Fibonacci.	$i(x)=\frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}=\sum_0^\infty (F_nF_{n+1})x^n$
5-Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares negativos[2]	$k(x)=\frac{x}{1-3x+x^2}=\sum_0^\infty (-F_{-2n})x^n$
6-Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares negativos	$n(x)=\frac{-x}{1-4x+4x^2-x^3}=\sum_0^\infty \left(F_{-(2n+1)}-1\right)x^n$
7-Soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com índices negativos.	$t(x)=\frac{x}{1-2x^2+x^3}=\sum_0^\infty \left(-F_{(-n+1)}+1\right)x^n$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale destacarmos que as demonstrações relativas aos resultados de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 estão expressos, respectivamente, nos apêndices C, E, G, I, K e M, e que seus respectivos desenvolvimentos em série de potências, estão caracterizados nos apêndices D, F, H, J, L e M. Outras funções geradoras de identidades de Fibonacci podem ser encontradas em Hoggat e Lind (1973), nas páginas 62 a 64 e em Koshy (2011), nas páginas 230 e 231.

Portanto, nas seções apresentadas, buscamos discutir algumas generalizações e extensões da sequência de Fibonacci, com destaque para o modelo de Binet e as funções geradoras. No capítulo seguinte trazemos algumas relações conceituais da sequência de Fibonacci como outros conceitos matemáticos.

[1,2] Notemos que os resultados das funções geradoras das propriedades em destaque, são coincidentes, caracterização que evidenciamos nos apêndices C e K, respectivamente.

4 OUTRAS GENERALIZAÇÕES E EXTENSÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dando continuidade, ressaltaremos neste capítulo outros modelos de generalização e extensão da sequência de Fibonacci em outros contextos matemáticos, em destaque: a sequência de Lucas, as matrizes, os determinantes, o triângulo de Pascal, a trigonometria, os números complexos, os polinômios, as equações polinomiais e as funções hiperbólicas.

4.1 Fibonacci e os números de Lucas

Hoggat (1969) argumenta que a sequência de Lucas, nomeada assim em homenagem ao matemático francês do século dezenove François Eduard Anatole Lucas (1841-1891). O autor salienta que Lucas realizou muitos trabalhos com sequências recorrentes e deu nome à sequência de Fibonacci. Sobre esta relação Gulberg (1997, p.287) aponta que houve "o melhor de nosso conhecimento, em um artigo pelo matemático francês Edouard Lucas em uma publicação dedicada à matemática recreativa". Sobre tal fato Williams, ressalta que:

> Lucas foi um gênio para perceber e mostrar em um longo artigo publicado em 1878, que os números de Fibonacci eram relacionados com uma riqueza de problemas, incluindo, como ele escreveu, "a teoria de determinantes, combinações, frações contínuas, divisibilidade,divisores de formas quadráticas . . . resíduos quadráticos , decomposição de grandes números em seus fatores primos , etc. " (WILLIAMS, apud WELLS, 2005, p.144, tradução nossa).

Conway e Guy (1999) relatam que os números de Lucas L_n, relacionam-se com os números de Fibonacci de várias maneiras, tendo sua mesma lei de recorrência, contudo, com termos iniciais diferentes. Sobre tal fato, Koshy (2011) ressalta que ao usarmos a relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 3$, tomando as seguintes condições iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 2$, temos como resultado: $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...$ (Sequência de Lucas). Como estabelecemos a sequência de Fibonacci relaciona-se intrinsicamente com a de Lucas. Desse modo Parker (1964, p. 67) apresenta um modelo geral de obtenção dos números de Lucas, a partir do modelo de Fibonacci, vejamos:

Inicialmente, o autor parte da forma generalizada da equação de recorrência $F(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, com c_1 e c_2 são constantes quaisquer, admitindo as seguintes condições iniciais $F(0) = 2, F(1) = 1$.Daí, obtém o sistema: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = 1 \end{cases}$, aonde considera

$x_1 = \alpha = {}^{1+\sqrt{5}}\!\diagup_2$, $x_2 = \beta = {}^{1-\sqrt{5}}\!\diagup_2 \therefore x_1 - x_2 = \sqrt{5}$ e $x_1 + x_2 = 1$. Ora, fazendo as contas, vemos $c_1x_1 + (2-c_1)x_2 = 1 \therefore c_1x_1 + 2x_2 - c_1x_2 = 1 \leftrightarrow c_1(x_1 - x_2) = 1 - 2x_2$. Segue que: $c_1 = \dfrac{1-2x_2}{(x_1 - x_2)} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ e, para o outro valor, devemos encontrar $c_2 = 1$, assim como indica Parker (1964). Por fim, Parker estabelece $F(n) = c_1\left(1+\sqrt{5}\diagup 2\right)^n + c_2\left(1-\sqrt{5}\diagup 2\right)^n = \left(1+\sqrt{5}\diagup 2\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\diagup 2\right)^n$

Resultado que também pode ser expresso como: $L_n = \alpha^n + \beta^n, n = 1,2,3,.....$ (Fórmula de Binet para a sequência de Lucas).

Na figura 15, a seguir Hoggat (1969) traz os resultados dos números de Fibonacci e Lucas. Podemos, a partir desse quadro comparativo, estabelecermos algumas relações preliminares entre estes números, discussão que mostraremos, a seguir:

Figura 15-Comparativo de resultados entre os números de Fibonacci e Lucas

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	...

Fonte: Hoggat (1969, p.27).

Prosseguindo, notemos na figura que ao fazermos: $F_1 + F_3 = L_2$, $F_2 + F_4 = L_3$, este resultado de modo geral é dado por: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, n > 1$ (lei de recorrência dos números de Lucas).

Demostraremos resultado anterior, utilizando a fórmula de Binet. Com isto, faremos: $F_{n-1} = \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$ e $F_{n-1} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, e ao somarmos os resultados, temos:

$$\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{-1}.\alpha^n - \beta^{-1}.\beta^n + \alpha.\alpha^n - \beta.\beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^n(\alpha^{-1} + \alpha) - \beta^n.(\beta^{-1} + \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n.(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n = L_n(c.q.d)$$

Ainda nessa perspectiva de discussão de propriedades relativas aos números de Fibonacci e Lucas em Hoggat (1969) o autor apresentada a possibilidade de relacionarmos F_n e L_n, em temos de α^n e β^n. Sendo sua recíproca verdadeira. Assim, utilizaremos $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, e reescreveremos as formas de Binet para Fibonacci e Lucas das seguintes formas: $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \rightarrow \alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n(I)$ e $L_n = \alpha^n + \beta^n(II)$. Ao adicionarmos I e II,

temos: $\begin{cases} \alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n \\ \alpha^n + \beta^n = L_n \end{cases} \rightarrow 2\alpha^n = \sqrt{5}F_n + L_n \therefore \alpha^n = \dfrac{\sqrt{5}F_n + L_n}{2}$. Ao subtrairmos I e II,

temos: $\begin{cases} \alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n \\ \alpha^n + \beta^n = L_n \end{cases} \rightarrow -2\alpha^n = \sqrt{5}F_n - L_n \therefore \beta^n = \dfrac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$.

Na figura 16 seguinte, Hoggat (1969) apresenta resultados dos números de Fibonacci e Lucas com valores de inteiros de n, ou seja, apresenta a possibilidade de termos os números de Lucas estendidos a índices inteiros, propriedade já discutida para os números de Fibonacci.

Figura 16- Possibilidade de extensão dos números de Lucas a índices inteiros

...	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	...
...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	...
...	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	...
...	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	...

Fonte: Hoggat (1969, p.28).

Dos argumentos anteriores, caracterizamos a existência do seguinte resultado: $L_{-n} = (-1)^n.L_n$. Demonstraremos esse resultado fundamentados nos argumentos de Hoggat (1969), que demonstra a propriedade para Fibonacci mudando a variável na fórmula de Binet de n para –n e procede do seguinte modo:

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\alpha^n\beta^n} = \frac{\alpha^n + \beta^n}{(-1)^n} = (-1)^n(\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n.L_n \text{ (cqd)}$$

Como estamos mostrando, os números de Lucas relacionam-se de maneira visceral com os números de Fibonacci através de propriedades comuns, dando continuidade nessa discussão apresentaremos e demonstraremos outras duas identidades. Desse modo, iniciaremos pela identidade: $F_{2n} = F_n.L_n, n \geq 1$. Realizaremos a demonstração dessa identidade utilizando a fórmula de Binet. Assim, escrevemos:

$F_{2n} = \dfrac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = \dfrac{(\alpha^n)^2 - (\beta^n)^2}{\alpha - \beta} = \dfrac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} = F_n.L_n$ (cqd). Na sequência temos a seguinte identidade: $L_n^{\,2} = L_{2n} - 2(-1)^n$. Em sua demonstração faremos:

$$L_n^{\,2} = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n = L_{2n} + 2(-1)^n \text{ (cqd).}$$

Vale destacarmos que esta discussão em termos de identidades que relacionam os números de Fibonacci e Lucas é ampla e foge um pouco do escopo do estudo. Além disso, sugerimos ao leitor os trabalhos de Hoggat (1969) nas páginas 59 e 60, e Koshy (2011) nas páginas 87 a 93, que trazem um conjunto extenso de identidades envolvendo os números de Fibonacci e Lucas.

Finalizaremos a seção apresentando outro ponto de consonância entre os números de Lucas e Fibonacci as funções geradoras. Desse modo apresentaremos algumas funções geradoras dos números de Lucas referendadas nos estudos de Hoggat e Lind (1973) e em Koshy (2011). Iniciaremos apresentando a função geradora dos números de Lucas caracterizada por: $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$.

Na demonstração dessa função geradora utilizamos o raciocínio empregado por Koshy (2011) que adaptamos ao caso da sequência de Lucas. Para tanto, escrevemos: $g(\mathrm{x}) = L_0 + L_1x^1 + L_2x^2 + L_3x^3 + \cdots + L_nx^n +$. Em seguida Koshy (2011, p. 220) comenta que “desde que as ordens dos coeficientes de f_{n-1} e f_{n-2} são de 1 e 2 menores do que f_n, respectivamente, encontramos os termos correspondentes $x \cdot g(x), \mathrm{x}^2 \cdot g(x)$”. Ou seja, adaptando ao nosso interesse, estabelecemos que:

$$\begin{cases} g(\mathrm{x}) = L_0 + L_1x^1 + L_2x^2 + L_3x^3 + \cdots + L_nx^n + \cdots \\ x \cdot g(\mathrm{x}) = L_0x^1 + L_1x^2 + L_2x^3 + L_3x^4 + \cdots + L_{n-1}x^n + L_nx^{n+1} + \cdots \\ x^2 \cdot g(\mathrm{x}) = L_0x^2 + L_1x^3 + L_2x^4 + L_3x^5 + \cdots + L_{n-2}x^n + L_{n-1}x^{n+1} + L_nx^{n+2} \cdots \end{cases}$$

. Em seguida recordando que $L_n - L_{n-1} - L_{n-2} = 0$, vem que:

$$g(x) - x \cdot g(x) - \mathrm{x}^2 \cdot g(x) = 2 - x + x^3(L_3 - L_2 - L_1) + x^4(L_4 - L_3 - L_2) + \cdots + x^n(L_n - L_{n-1} - L_{n-2}) + \cdots$$

O que resulta em:

$$g(x)(1 - x - \mathrm{x}^2) = 2 - x + 0 \leftrightarrow g(x) = \frac{2-x}{1-x-\mathrm{x}^2}$$

. Expressão indicada por Koshy (2011), como a função geradora dos números de Lucas.

Demonstraremos o mesmo resultado utilizando os argumentos apresentados em Hoggat e Bicknell (1977), já discutidos em seções anteriores. Com isto, partiremos da formula de Binet para os números de Lucas: $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Semelhante a Hoggat e Lind (1973), aplicamos somatórios em ambos os lados da expressão $L_n = \alpha^n + \beta^n$, e encontramos:

$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n + \beta^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n$, como $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1}{1-\beta x} = \frac{(1-\beta x)+(1-\alpha x)}{(1-\beta x)(1-\alpha x)} = \frac{(1-\beta x)+(1-\alpha x)}{(1-\beta x)(1-\alpha x)} =$$
$$= \frac{2-x(\alpha+\beta)}{1-x(\alpha+\beta)+x^2(\alpha\beta)} \underset{\alpha\beta=-1}{\overset{\alpha+\beta=1}{=}} \frac{2-x}{1-x-x^2}(cqd)$$

Concluiremos apresentando a função geradora dos números de Lucas estendidos, ou seja, semelhante aos números de Fibonacci, esta função geradora nos informa quais são os números de Lucas com índices negativos. Sendo dada por: $\sum_{n=0}^{\infty} L_{-n} x^n = \frac{-2-x}{-1-x+x^2}$

Demonstraremos a propriedade tomando a fórmula de Binet para os números de Lucas da seguinte forma $L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = (\alpha^{-1})^n + (\beta^{-1})^n$. Semelhante a Hoggat e Lind (1973), aplicaremos somatórios em ambos os lados de $L_{-n} = (\alpha^{-1})^n + (\beta^{-1})^n$. Logo:

$\sum_{n=0}^{\infty} L_{-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}((\alpha^{-1})^n + (\beta^{-1})^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{-1})^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\beta^{-1})^n x^n$, como $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}$,

temos: $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{-1})^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\beta^{-1})^n x^n = \frac{1}{1-\alpha^{-1}x} + \frac{1}{1-\beta^{-1}x} = \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} + \frac{1}{1-\frac{x}{\beta}} = \frac{\alpha}{\alpha - x} + \frac{\beta}{\beta - x} =$

$$= \frac{\alpha(\beta-x)+\beta(\alpha-x)}{(\alpha-x)(\beta-x)} = \frac{2\alpha\beta - x(\alpha+\beta)}{\alpha\beta - x(\alpha+\beta)+x^2} \underset{\alpha\beta=-1}{\overset{\alpha+\beta=1}{=}} \frac{-2-x}{-1-x+x^2}(cqd)$$

Ressaltamos que outras funções geradoras relativas aos números de Lucas podem ser encontradas nos trabalhos de Hoggat e Lind (1973), nas páginas 62 a 64, e em Koshy (2011) nas páginas 230 e 231. Na seção seguinte trazemos outra possibilidade de relação da sequência de Fibonacci a outros conceitos matemáticos, em destaque as matrizes e os determinantes.

4.2 Fibonacci e as Matrizes

Os estudos de Alfred (1965), Hoggat (1969), Koshy (2011), Sthakov (2009) e Grimaldi (2012), apresentam uma discussão que relaciona as matrizes com os números de Fibonacci. Assim, iniciamos nossa apresentação salientando o que os autores identificam como: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sendo a matriz de segunda ordem que tem como elementos

$a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 0$, sendo estes os números de Fibonacci. Como destaca Grimaldi (2012 p. 113) "propriedades desta matriz foram investigados em 1960 por Charles H. King em sua tese de mestrado no State College San Jose, na Califórnia". Continuaremos apresentando um raciocínio comum aos estudos citados. Nesse sentido faremos a seguinte multiplicação: $QxQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Q^2Q^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Q^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $Q^3Q^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Q^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Seguindo o procedimento, podemos conjecturar o resultado de $Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, que pode ser indicado por:

Teorema 7: Para um dado número inteiro n, a enésima potência da matriz Q é dado por: $Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, sendo f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, números de Fibonacci.

Demonstraremos o teorema citado, utilizando o princípio da indução matemática. Desse modo, iniciamos com n=1, $Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$, sendo a sentença verdadeira. Dando continuidade admitiremos que o resultado é verdadeiro para n=k. Com isto, temos: $Q^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}$. Verificando para n=k+1, temos: $Q^{k+1} = Q^kQ = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Daí concluímos que: $Q^{k+1} = Q^kQ = \begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix}$(cqd)

Como existe uma relação intrínseca entre a teoria das matrizes e o estudo dos determinantes, o próximo teorema nos informa o determinante da matriz Q^n.

Teorema 8: Para um dado inteiro n, temos: $det(Q)^n = (-1)^n$.

Demonstração: do estudo dos determinantes sabemos $det(Q^n) = (det\,Q)^n$, e como $det\,Q = |Q| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, concluímos que: $det(Q)^n = (-1)^n$ (cqd)

Tomando por referência o teorema anterior, podemos demonstrar a seguinte identidade de Fibonacci, a fórmula de Cassini. Como destaca Sthakov (2009, p. 323) esta "é uma das mais importantes identidades dos números de Fibonacci. Esta é chamada a fórmula de Cassini em homenagem ao famoso astrônomo francês Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), que descobriu a fórmula pela primeira vez". Sendo este resultado, designado por:

$$f_{n-1}.f_{n+1} - f_n^{\ 2} = (-1)^n \text{ (Fórmula de Cassini)}$$

Demonstração: $det\, Q^n = \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{vmatrix} = f_{n-1}.f_{n+1} - f_n^{\ 2} = (-1)^n, n \geq 1$ (cqd)

Continuando, tomaremos referência nos argumentos de Hoggat (1969, p.66-67), sobre o estudo da álgebra das matrizes, destacando que "na álgebra das matrizes é de grande interesse técnico o polinômio característico", que Hoggat (1969) caracteriza como: Dada a matriz Q, seu polinômio característico é definido por: $P(x) = det(Q - xI)$. Assim:

$$P(x) = \det(Q - xI) = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} \right| = x^2 - (a+d)x + (ad - bc). Se \quad P(x) = 0, temos:$$

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0 (Equação \quad característica \quad de \quad Q)$$

Do resultado anterior, notemos que o termo constante na equação característica é o determinante da matriz Q, e o termo de coeficiente $-(a+d)$ ou $(a+d)$ se for negativo nos dá a soma dos elementos da diagonal principal da matriz Q, que é chamado de traço da matriz. A partir dos argumentos anteriores sobre polinômio característico podemos apresentar e demonstrar o teorema seguinte e seu corolário, presentes no estudo de Koshy (2011). Sendo:

Teorema 9: As raízes características de Q^n, são α^n e β^n. Demonstração: utilizando a noção de polinômio característico para obtermos as raízes de Q^n, inicialmente calculamos: $det(Q - xI) = \begin{vmatrix} f_{n+1} - x & f_n \\ f_n & f_{n-1} - x \end{vmatrix}$,e ao fazermos: $det(Q - xI) = (f_{n+1} - x).(f_{n-1} - x) - f_n^{\ 2}$ $= x^2 - (f_{n+1} + f_{n-1})x + (f_{n+1}.f_{n-1} - f_n^{\ 2})$, como $f_{n+1} + f_{n-1} = L_n$ e $f_{n+1}.f_{n-1} - f_n^{\ 2} = (-1)^n$. Logo, concluímos: $det(Q - xI) = x^2 - L_n x + (-1)^n$ (I). Retomando de (I), para obtermos suas raízes faremos: $det(Q - xI) = 0$, e ao resolvermos a equação $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$, obtemos: $x = \dfrac{L_n \pm \sqrt{L_n - 4(-1)^n}}{2}$, e ao usarmos a identidade, $L_n - 4(-1)^n = 5.f_n^{\ 2}$, temos: $\alpha^n = \dfrac{L_n + \sqrt{5}.f_n}{2}$ e $\beta^n = \dfrac{L_n + \sqrt{5}.f_n}{2}$ (cqd). Sobre o resultado anterior, destacamos que este possui uma consequência imediata que se expressa no seguinte corolário. As raízes características de Q são α e β.

Na demonstração desta assertiva utilizaremos os argumentos de Koshy (2011), que adota o valor $n=1$, na equação característica $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$, obtendo a equação $x^2 - x - 1 = 0$ (equação característica das sequencias recorrentes lineares homogêneas de segunda ordem) estudo realizado em seções anteriores.

Continuando, Hoggat (1969) e Koshy (2011) argumentam o seguinte resultado, que as raízes características da equação característica são raízes características da equação da matriz Q. Segundo Hoggat (1969) e Koshy (2011) este resultado ilustra o conhecido teorema de Cayley-Hamilton, estabelecendo que cada matriz satisfaz sua equação característica, teorema que admitiremos sem prova.

Desse modo, fundamentado no teorema de Cayley-Hamilton, Koshy (2011) enuncia o seguinte resultado: que a matriz Q satisfaz a sua equação característica $Q^2 - Q - I = 0$, fato que pode ser facilmente verificado, como faremos, a seguir:

Demonstração: Partimos de $Q^2 - Q - I = 0 \rightarrow Q^2 - Q = I$ (I), com $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Substituindo os resultados em (I), temos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculando encontramos: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cqd). Em Sthakov (2009) encontramos uma tabela que informa as matrizes de Fibonacci, para n inteiro, resultado que expressamos na figura 17, a seguir.

Figura 17- Matrizes de Fibonacci para índices inteiros

n	0	1	2	3	4	5
Q^n	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

Fonte: Sthakov (2012, p.233).

Com a perspectiva de caracterizarmos os resultados anteriores, vemos a possibilidade de obtermos uma fórmula explícita para as matrizes de Fibonacci Q^n e Q^{-n}, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$. Referendados na perspectiva discutida em Sthakov (2009) apresentamos inicialmente o seguintes resultado, que evidenciamos como a fórmula de Binet matricial.

$$Q^{n}=\begin{pmatrix}(\alpha^{n}-\beta^{n})+\alpha\beta^{n}-\beta\alpha^{n} & (\alpha^{n}-\beta^{n})\\ (\alpha^{n}-\beta^{n}) & (\alpha\beta^{n}-\beta\alpha^{n})\end{pmatrix},n\geq 0 \quad (c.q.d)$$

Sobre a demonstração do resultado anterior, o apresentamos no apêndice O, fundamentados nos argumentos de Keskin e Demirtürk (2010), Lima et al. (1998). Seguindo, utilizamos raciocínio semelhante ao de Hoggat (1969), que para estender os números de Fibonacci com índices negativos, considera a fórmula de Binet na forma f_{-n}, com $n\geq 0$. Isto é, realiza apenas a mudança da variável n por –n em Binet. Desse modo, utilizando o mesmo percurso faremos:

$$Q^{-n}=\begin{pmatrix}(\alpha^{-n}-\beta^{-n})+\alpha\beta^{-n}-\beta\alpha^{-n} & (\alpha^{-n}-\beta^{-n})\\ (\alpha^{-n}-\beta^{-n}) & (\alpha\beta^{-n}-\beta\alpha^{-n})\end{pmatrix},n\geq 0.$$

Obtendo, assim, a fórmula de Binet matricial com índices negativos, que pode ser ainda representada por:

$$Q^{-n}=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix}(-1)^{n}\left[(\beta^{n}-\alpha^{n})+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right] & (-1)^{n+1}(\alpha^{n}-\beta^{n})\\ (-1)^{n+1}(\alpha^{n}-\beta^{n}) & (-1)^{n}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\end{pmatrix},n\geq 0$$

Na seção atual apresentamos algumas relações entre a SF e o estudo das matrizes e dos determinantes, estabelecendo algumas propriedades de generalização da sequência a partir destes conceitos. Continuando, discutiremos a seguir, outras relações conceituais da SF, no caso, com o triângulo de Pascal.

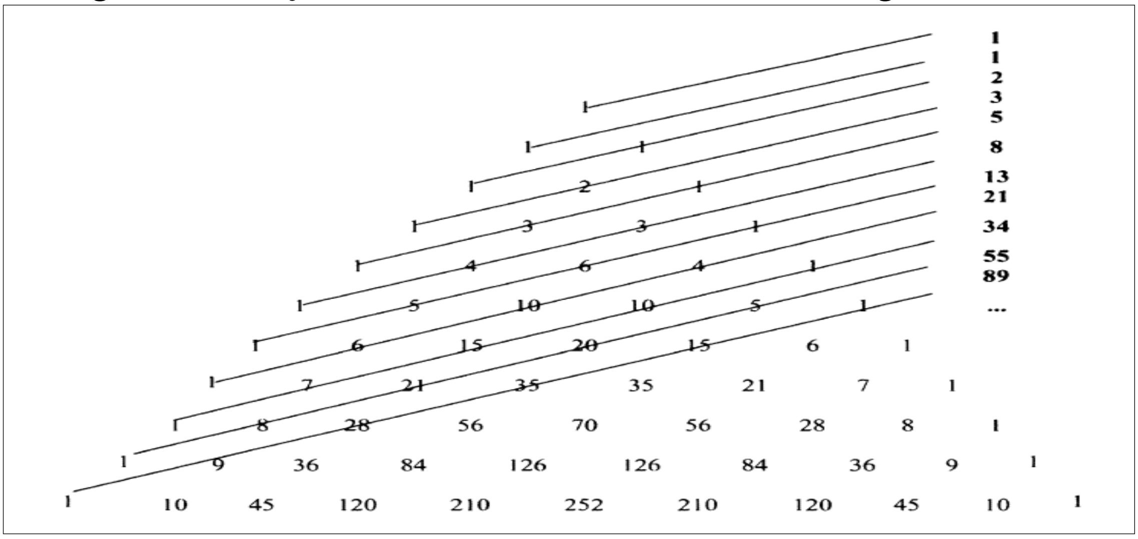
4.3 Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

Dando continuidade, em Huntley (1985), Koshy (2011), Hoggat (1969), Posamantier e Lehman (2007) encontramos uma discussão que relaciona os números de Fibonacci e o triangulo de Pascal. Sobre tal relação, Huntley (1985) ressalta que:

> Uma outra característica do triângulo de Pascal é que ele contém a série de Fibonacci, embora não pareça haver registro a demonstrar que Pascal notou o fato. É possível que Leonardo Fibonacci tenha topado com a série hoje conhecida pelo seu nome através de um exame do triangulo chinês. (HUNTLEY,1985, p.132).

Sobre tal propriedade os autores evidenciam que: ao somarmos os elementos das diagonais do triangulo de pascal, obteremos como resultado os números de Fibonacci. Propriedade que observamos na figura 18, a seguir:

Figura 18 - Relação entre os números de Fibonacci e o triângulo de Pascal



Fonte: Posamentier e Lehmann (2007, p.91).

Notemos, que a lista de números obtidos no canto superior direito da figura anterior são os numeros de fibonacci. Sendo que, tais resultados são obtidos pela soma dos elementos de cada diagonal do triangulo de Pascal. Com isto, podemos listar os seguintes resultados: $f_1 = 1,\ \ f_2 = 1,\ \ f_3 = 1+1 = 2,\ \ f_4 = 1+2 = 3,\ \ f_5 = 1+3+1 = 5,\ \ f_6 = 1+4+3 = 8,$ $f_7 = 1+5+6+1 = 13,\ \ etc.$

Prosseguindo, tomaremos alguns dos resultados anteriores expressos em termos de numeros binomiais, sendo organizados da seguinte maneira:

$$\binom{0}{0} = 1 = f_1$$
$$\binom{1}{0} = 1 = f_2$$
$$\binom{2}{0} + \binom{1}{0} = 2 = f_3$$
$$\binom{3}{0} + \binom{1}{0} = 3 = f_4$$
$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = f_5$$
$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = f_6$$

....

Continuando o raciocinio empregado, podemos conjecturar o seguinte resultado: $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+.....+\binom{n-i}{i}$, com $0\le i\le \frac{n}{2}$. E, ao colocarmos o resultado anterior, em forma de somatório, obtemos: $\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\ge 0$. Vale destacarmos que em Hoggat (1969) encontramos esse resultado expresso da seguinte forma: $f_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\ge 0$, e em Alfred (1965), como: $f_k=\sum_{k=1}^{[(k+1)/2]}\binom{n-k}{k-1}$.

Os resultados expressos anteriormente nos informam os números de Fibonacci em termos binomiais, propriedade que Koshy (2011) atribui a E. Lucas em 1876.Vale ressaltar, que demonstraremos o resultado apresentado por Hoggat (1969), que também é encontrado em Koshy (2011), expresso no seguinte teorema.

Teorema 10: $f_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\ge 0$ (números de Fibonacci binomiais)

Sobre o resultado anterior, apresentamos sua demonstração no apêndice P. Após a caracterização da relação entre os números de Fibonacci e o triângulo de Pascal, por meio da soma de diagonais ascendentes, continuaremos focando esta relação, apresentando outras propriedades relativas ao triângulo de Pascal e os números de Fibonacci.

Iniciaremos a discussão apresentando uma propriedade presente no estudo de Hoggat (1969) que segundo esse autor, foi proposta por S.L Basin e Vladimir Ivanoff, propriedade que nos informa os números de fibonacci de indices pares, em termos de números binomiais, sendo expressa, como: $f_{2n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.f_i$.

Para demonstrarmos a propriedade descrita, utilizaremos a fórmula de Binet. Com isto, iniciaremos fazendo: $f_{2n}=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^2)-(\beta^2)^n}{\alpha-\beta}$, como $\alpha^2=\alpha+1$ e $\beta^2=\beta+1$, obtemos: $f_{2n}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(\alpha+1)^n-(\beta+1)^n\right]$ (i). Pelo teorema binomial podemos escrever: $(\alpha+1)^n$ e $(\beta+1)^n$ como $(\alpha+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i$ e $(\beta+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^i$. Substituindo os resultados em (i), temos:

$$f_{2n}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i}\right]=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\alpha^{i}-\beta^{i}}{\alpha-\beta}$$ .Finalizando $f_{2n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.f_i (c.q.d).$

Ainda sobre o estudo de algumas propriedades relativas aos números de Fibonacci em termos binomiais, encontramos em Hoggat (1969, p.51) o seguinte resultado, $f_{2n+j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.f_{i+j}$, que pode ser caracterizado como um modelo generalizado do resultado anterior, ou seja, notemos que ao adotarmos j=0, teremos: $f_{2n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.f_i$. Seguiremos na demonstração de $f_{2n+j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.f_{i+j}$, com o raciocínio semelhante ao utilizado em f_{2n}. Assim por Binet, teremos: $f_{2n+j}=\frac{\alpha^{2n+j}-\beta^{2n+j}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^2)^n\alpha^j-(\beta^2)^n\beta^j}{\alpha-\beta}$, como $\alpha^2=\alpha+1$ e $\beta^2=\beta+1$, encontramos: $f_{2n+j}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(\alpha+1)^n\alpha^j-(\beta+1)^n\beta^j\right]$ (i). Novamente, pelo teorema binomial teremos: $(\alpha+1)^n$ e $(\beta+1)^n$, com $(\alpha+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i$ e $(\beta+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^i$. Substituindo em (i), teremos:

$$f_{2n+j}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i+j}-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i+j}\right]=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\alpha^{i+j}-\beta^{i+j}}{\alpha-\beta}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f_{i+j}$$

Finalizando, essa discussão sobre algumas relações dos números de Fibonacci com o triângulo de Pascal e os números binomiais, destacaremos uma propriedade de Koshy (2011) que nos permitirá a obtenção de uma fórmula de extensão dos números de Fibonacci em termos binomiais a índices negativos. Nesse sentido, apresentamos o seguinte resultado: $(-1)f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.(-1)^i f_i$. Para demonstrarmos o resultado, utilizaremos o raciocínio empregado em Koshy (2011) que parte do lado direito da igualdade, obtendo o lado esquerdo. Com isto, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i.f_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\frac{\alpha^i-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right]$ (I)

Continuando, pelo teorema binomial podemos escrever: $(1-\alpha)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i$ e $(1-\beta)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i$. Substituindo os resultados anteriores em (I), temos:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i . f_i = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right] = \left[\frac{(1-\alpha)^n-(1-\beta)^n}{\alpha-\beta}\right] = \frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha-\beta} =$$
$$\frac{-\alpha^n+\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{-(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} = -f_n (c.q.d)$$

Em seções anteriores, destacamos o seguinte resultado $f_{-n} = (-1)^{n+1}\cdot f_n$ que nos permite a obtenção dos números de Fibonacci com índices negativos. Notemos que ao combinarmos essa relação com o resultado demonstrado anteriormente, obteremos o seguinte resultado: Tomando $f_{-n} = (-1)^{n+1}\cdot f_n$ (I) e $(-1)f_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.(-1)^i f_i$ (II), e ao substituirmos (II) em (I), encontramos relação dos números de Fibonacci com índices negativos em termos binomiais expressa por: $f_{-n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.(-1)^{n+i} f_i$.

Portanto, nesta seção trouxemos a discussão de algumas propriedades de Fibonacci, estabelecidas a partir de sua relação com o triângulo de Pascal. Dando seguimento, na seção seguinte apresentaremos outros modelos de generalização da SF, modelos estabelecidos de sua relação com a trigonometria e os números complexos.

4.4 Fibonacci na trigonometria e nos complexos

Huntley (1985) apresenta uma relação entre o fi e a trigonometria, argumentando que observarmos esta relação ao solucionarmos a seguinte equação: $sen(2\theta) = cos(3\theta)$. E como o seno de um ângulo é igual ao seu complemento, teríamos $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}$, com $\theta = \frac{\pi}{10}$. Huntley (1985) sugere que a equação $sen(2\theta) = cos(3\theta)$, pode ser reduzida a $4sen^2(\theta) + 2sen(\theta) - 1 = 0$. Grimaldi (2012) resolve a equação anterior proposta por Huntley (1985) obtendo a fórmula trigonométrica de Binet, relação dada por:

$$f_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{(2)^n}{\sqrt{5}}\left[cos^n(\frac{\pi}{5}) - cos^n(\frac{3\pi}{5})\right], n \geq 0$$

Sobre a relação anterior, discutimos sua demonstração no apêndice Q. Em seguida, evidenciaremos outra espécie de link conceitual ou forma de representação do mesmo modelo. Nesse sentido, trazemos as considerações De Bruiijn (1974) que considera a fórmula explícita da sequência $\left(w_n\right)_{n\in IN}$ e busca definir a seguinte expressao $f_{1/2} = \frac{\alpha^{1/2} - \beta^{1/2}}{\alpha - \beta}$, acentuando que o número $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é negativo. Com o intuito de evitar esta e outras dificuldades possíveis, De Bruiijn (1974) propõe, o que podemos caracterizar como**,** a fórmula de Binet nos complexos, expressa por:

$f_n = x_n + iy_n$, com $x_n = \frac{\alpha^{2n} - cos(n\pi)}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha^n}$ e $y_n = \frac{sen(n\pi)}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha^n}$, aonde $n \in IR,\ f_n \in C$, ou ainda $f_n = x_n + iy_n = \left(\frac{\alpha^{2n} - cos(n\pi)}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha^n}\right) + i\left(\frac{sen(n\pi)}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha^n}\right)$, que pode ser designado também por:

$$f_n = \frac{\alpha^{2n} - cos(n\pi) + isen(n\pi)}{(\alpha-\beta)\cdot\alpha^n}, n \in IR$$

Por outro lado, De Bruiijn (1974) desenvolve o procedimento e verifica a equivalência das duas formas de expressar a SGF. Desse modo, como destaca De Bruijn (1974), teremos a igualdade $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, para todo $n \geq 0$, tal fato se evidencia quando observa que $|f_n| = |f_{-n}|$ e, infere ainda que $x_n{}^2 + y_n{}^2 = x_{-n}{}^2 + y_{-n}{}^2$, com intenção final de verificar a validez de fórmula $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, agora para n inteiro qualquer.

Por fim, com origem no trabalho de De Bruijn (1974), temos agora uma representação que permite o comportamento de sequências obtidas a partir de valores complexos. Um pouco mais adiante toma os seguintes valores $z_1 = 1, z_2 = i$ e declara que "para encontrar a extensão desta sequência, tudo que temos de fazer é estender os coeficientes". (De BRUIJN ,1974, p. 253). Neste sentido, apresentamos um arranjo proposto por De Bruiijn na figura 19, logo abaixo.

Figura 19-Comportamento da sequência de Fibonacci definida para valores complexos

$$\cdots, 5-3i, -3+2i, 2-i, -1+i, 1, i, 1+i, 1+2i, 2+3i, 3+5i, \cdots.$$

Fonte: De Bruiijn (1974, p.253).

Notemos que na representação anterior De Bruiijn (1974) descreve os termos da sequência $(f_n)_{n\in Z}, z_1 = 1, z_2 = i$ também à esquerda de zero. Com isto, o autor indica outra forma de extensão do conceito estudado por Leonardo Pisano, em 1202, agora no campo dos complexos. Na seção seguinte continuaremos com essa perspectiva de estabelecimento de relações entre o modelo de Fibonacci e outros contextos matemáticos, em destaque, os polinômios.

4.5 Sequência Polinomial de Fibonacci (SPF)

No artigo de Hoggat e Bicknell (1973) encontramos a seguinte definição: a sequência polinomial de Fibonacci – SPF, que denotamos por $\left(f_n(x)\right)_{n\in IN}$, onde $x \in IR$ e tal que $\begin{cases} f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x \\ f_{n+1}(x) = x\cdot f_n(x) + f_{n-1}(x) \end{cases}$. Relações de recorrência que nos permitem descrevermos facilmente a seguinte lista $\left(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), \ldots, f_n(x), \ldots\right)$. Resultados explicitados na figura 20, a seguir:

Figura 20 - Lista dos primeiros elementos definidos a partir de sequências recursivas polinomiais

Fibonacci and Lucas Polynomials

n	F_n	$L_n(x)$
1	1	x
2	x	$x^2 + 2$
3	$x^2 + 1$	$x^3 + 3x$
4	$x^3 + 2x$	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$	$x^9 + 9x^7 + 25x^5 + 30x^3 + 9x$

Fonte: Hoggat e Bicknell (1973, p.272).

Na figura anterior, omitiremos a discussão da coluna direita, em que comparecem os termos da Sequência Polinomial de Lucas. Por outro lado, Webb e Parberry (1969) exibem a função geradora que define a SPF, a apresentando como: $f(x,y) = \dfrac{y}{1 - x\cdot y - y^2}$. Com efeito, os autores consideram a seguinte expressão, considerando a relação $f_{n+1}(x) - x\cdot f_n(x) - f_{n-1}(x) = 0$, avaliamos que: $\begin{cases} f(x,y) = f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 + \cdots \\ x \cdot y \cdot f(x,y) = f_1(x)\,\mathrm{x}\,y^2 + f_2(x)\,\mathrm{x}\,y^3 + f_3(x)\,\mathrm{x}\,y^4 + \cdots \\ y^2 \cdot f(x,y) = f_1(x)\,\mathrm{y}^3 + f_2(x)y^4 + f_3(x)y^5 + \cdots \end{cases}$. E, fazendo as contas, obteremos ainda que: $\begin{cases} f(x,y) = y + xy^2 + f_3(x)y^3 + \cdots \\ x \cdot y \cdot f(x,y) = \mathrm{x}\,y^2 + f_2(x)\,\mathrm{x}\,y^3 + f_3(x)\,\mathrm{x}\,y^4 + \cdots \\ y^2 \cdot f(x,y) = f_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^3 + f_2(x)y^4 + f_3(x)y^5 + \cdots \end{cases}$. Enfim, com um procedimento semelhante ao que Koshy (2011, p. 220) evidencia, avaliaremos a seguinte expressão:

$$f(x,y) - x \cdot y \cdot f(x,y) - y^2 \cdot f(x,y) = y + 0 + (f_3(x) - \mathrm{x}\, f_2(x) - \mathrm{f}_1(x)) \cdot y^3 + (f_4(x) - \mathrm{x}\, f_3(x) - \mathrm{f}_2(x)) \cdot y^4 + \cdots$$

$$f(x,y)(1 - xy - y^2) = y \leftrightarrow f(x,y) = \frac{y}{1 - x \cdot y - y^2}$$

Como estamos interessados na caracterização de modelos de generalização e extensão da sequência de Fibonacci, em destaque o modelo da SPF, semelhantemente ao modelo clássico, podemos pensar agora, na variável ‘Y’ e tomar a equação auxiliar $Y^2 = x \cdot Y + 1 \leftrightarrow Y^2 - x \cdot Y - 1 = 0$. E, fazendo as contas, devemos encontrar as seguintes raízes: $\alpha(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}, \beta(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2}$. Além disso, recordamos que $\alpha(x)^2 = x \cdot \alpha(x) + 1$ e $\beta(x)^2 = x \cdot \beta(x) + 1$. No passo seguinte reparemos que: $f_1(x) = 1 = \dfrac{\alpha(x)^1 - \beta(x)^1}{\alpha(x) - \beta(x)}$ e que $f_2(x) = x = \dfrac{(\alpha(x) + \beta(x))}{1} = \dfrac{(\alpha(x) - \beta(x))(\alpha(x) + \beta(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)^2 - \beta(x)^2}{\alpha(x) - \beta(x)}$. Em seguida, empregando a fórmula recursiva $f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) + f_{n-1}(x)$, aplicamos o modelo indutivo:

$$f_{n+1}(x) = x \cdot \left(\frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) + \left(\frac{\alpha(x)^{n-1} - \beta(x)^{n-1}}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) = \frac{\left(x\alpha(x)^n - x\beta(x)^n + \alpha(x)^{n-1} - \beta(x)^{n-1} \right)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$= \frac{\left(x\alpha(x)^n + \alpha(x)^{n-1} - x\beta(x)^n + \beta(x)^{n-1} \right)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{\left(\alpha(x)^{n-1}[x\alpha(x) + 1] - \beta(x)^{n-1}[x\beta(x) + 1] \right)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$$

$$\underset{\beta(x)^2 = x \cdot \beta(x) + 1}{\overset{\alpha(x)^2 = x \cdot \alpha(x) + 1}{=}} \frac{\left(\alpha(x)^{n-1}[x\alpha(x) + 1] - \beta(x)^{n-1}[x\beta(x) + 1] \right)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{\left(\alpha(x)^{n-1}\alpha(x)^2 - \beta(x)^{n-1}\beta(x)^2 \right)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$$

$$= \frac{\left(\alpha(x)^{n+1} - \beta(x)^{n+1} \right)}{\alpha(x) - \beta(x)} \therefore f_{n+1}(x) = \frac{\left(\alpha(x)^{n+1} - \beta(x)^{n+1} \right)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

Desse modo, podemos caracterizar: $f_{n+1}(x)=\frac{\left(\alpha(x)^{n+1}-\beta(x)^{n+1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}, n\geq 1$, como a fórmula de Binet para a SPF.

Dando continuidade, retornemos à seguinte formulação $\begin{cases} f_1(x)=1, f_2(x)=x \\ f_{n+1}(x)=x\cdot f_n(x)+f_{n-1}(x) \end{cases}$. E a partir desta facilmente inferimos que $n=1 \therefore f_2(x)-x\cdot f_1(x)=f_0(x)\rightarrow f_0(x)=0$. Em seguida, encontramos que $n=0 \therefore f_1(x)=x\cdot f_0(x)+f_{-1}(x)\rightarrow f_{-1}(x)=x=(-1)^{1+1}f_1(x)$. Prosseguindo, inferimos ainda $n=-1 \therefore f_0(x)-x\cdot f_{-1}(x)=f_{-2}(x)\rightarrow f_{-2}(x)=-x^2$. Notemos que a partir da dinâmica caracterizada podemos discutir a possibilidade de estendermos a sequência polinomial de Fibonacci, a índices negativos.

Sobre a perspectiva discutida, Bicknell (1970) acentua a possibilidade de verificarmos a seguinte identidade $f_{-n}(x)=(-1)^{n+1}f_n(x)$, fato que estende a definição da SPF a índices inteiros. Realizamos a demonstração do resultado descrito no apêndice R. Dessa forma, constatamos uma série de propriedades relacionadas com a SPF que representa de modo evidente, a generalização de vários elementos presentes no modelo inicial da SF.

Mais uma vez mostramos e empregamos um conjunto de argumentos que não extrapola uma cultura de graduação em Matemática. Logo em seguida, o raciocínio seguido perseguirá o estudo envolvendo o aumento da quantidade de termos recursivos presentes na sequência original que, de modo standard, é avaliado apenas por dois elementos antecedentes.

4.6 Sequência de Tribonacci, Quadrinacci, Pentanacci....

Ora, como estamos interessados na generalização de determinadas propriedades da SF e que se relacionam com a noção de SGF, passaremos agora a considerar a seguinte relação: $p_n=p_{n-1}+p_{n-2}+p_{n-3}, n\geq 3$ de Waddill e Sacks (1967). Vale assinalar que, a sequência definida a partir de três números anteriores, de acordo com Koshy (2011) foi originalmente estudada por M. Feinberg, ao quatorze anos de idade, na cidade de Pensilvânia.

Voltando aos seus valores numéricos, Koshy (2011) exibe a seguinte listagem: $(1,1,2,4,7,13,24,44,81,149,274,504,\ldots,\ldots)$, nomeada como a sequência de tribonacci. De acordo com a definição, podemos inferir alguns resultados, assim escrevemos:

$p_{n+1} = p_n + p_{n-1} + p_{n-2} \leftrightarrow \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}}\right) = \frac{p_n}{p_{n-1}} + 1 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$. E, em seguida, semelhantemente ao expediente usado em Feinberg (1963), definimos: $\frac{p_{n+1}}{p_n} = t_n; \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_{n-1}; \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = t_{n-2}$. Daí, teremos ainda que $\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_n \cdot t_{n-1}$. Desse modo, estabelecemos: $t_n \cdot t_{n-1} = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{t_{n-2}} \leftrightarrow t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}}$. Feinberg (1963) admite a convergência da sequência há pouco definida por $\{t_n\}_{n \in IN}$ digamos, para um valor 'x', então concluímos: $t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}} \rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, sendo $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, equação característica da recorrência $(p_n)_{n \in IN}$.

Portanto, encontramos uma equação semelhante ao caso da SF, mas, no primeiro caso, encontramos um valor positivo que, na literatura de um curso de graduação, é nominado de número de ouro. Por outro lado, com origem nas fórmulas de Cardano, podemos expressar a raiz real da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ da seguinte forma $\phi_3 = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right)}{3} = 1.839286755214...$. No que concerne ao modelo anterior, vale assinalar a descrição fornecida por Yalavigi (1972) quando apresenta os números $T_n = b \cdot T_{n-1} + c \cdot T_{n-2} + d \cdot T_{n-2}$, com $n \geq 3$ o que evidencia a generalização do modelo anterior.

Teorema 11: Dada a sequência definida por $t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}$, Spickerman (1982), descreve o seguinte resultado: $t_n = \frac{\rho^{n+2}}{(\rho - \sigma)(\rho - \bar{\sigma})} + \frac{\sigma^{n+2}}{(\rho - \sigma)(\sigma - \bar{\sigma})} + \frac{\bar{\sigma}^{n+2}}{(\bar{\sigma} - \rho)(\bar{\sigma} - \sigma)}$, com $\rho = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1\right)$ e $\sigma = \frac{1}{6}\left(2 - \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt{3}i\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$.

Caracterizando o resultado anterior como a fórmula de Binet para tribonacci, resultado que demonstramos no apêndice S. Agora, de modo semelhante ao processo de investigação de alguns valores numéricos, na tentativa de defini-la para valores de $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}, n < 3$. Vamos considerar, preliminarmente, a equação

$p_{n-3} = p_n - p_{n-1} - p_{n-2}$ e, para $n = 3 \therefore p_0 = p_3 - p_2 - p_1 = 2 - 1 - 1 = 0$. E ainda que $n = 2 \therefore p_{-1} = p_2 - p_1 - p_0 = 1 - 1 - 0 = 0$. Mais uma vez, podemos escrever $n = 1 \therefore p_{-2} = p_1 - p_0 - p_{-1} = 1 - 0 - 0 = 1$ e que $n = 0 \therefore p_{-3} = p_0 - p_{-1} - p_{-2} = 0 - 0 - 1 = -1$. Com origem nesses valores preliminares, teremos ainda que: $n = -1 \therefore p_{-4} = p_{-1} - p_{-2} - p_{-3} = 0 - 1 - 1 = -2$ e que $n = -2 \therefore p_{-5} = p_{-2} - p_{-3} - p_{-4} = 1 - 1 + 2 = 2$. Agora, com origem nesses valores numéricos, poderemos conjecturar a seguinte lista de novos valores indicada por: $(\ldots, -11, -8, 4, 1, -3, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \ldots, \ldots)$, sequência de tribonacci com índices inteiros.

Tomando referência, na perspectiva anterior, de obtenção de valores para sequências relacionadas com SF, em Waddill e Sacks (1967), temos as sequências definidas por $(q_n)_{n \in IN}$; $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + q_{n-4}, n \geq 4$ e $(r_n)_{n \in IN}$; $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + r_{n-5}, n \geq 5$

Para tanto, vamos iniciar pela discussão da sequência $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + q_{n-4}, n \geq 4$, no qual repetiremos o argumento de Feinberg (1963). Neste sentido, escrevemos: $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + q_{n-4} \leftrightarrow \frac{q_n}{q_{n-3}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-3}} + \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + 1 + \frac{q_{n-4}}{q_{n-3}}$.

Podemos ainda escrever: $\frac{q_n}{q_{n-3}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + 1 + \frac{1}{\frac{q_{n-3}}{q_{n-4}}}$.

Nestas expressões, vamos assumir que: $t_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}, t_{n-1} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}, t_{n-2} = \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}}$ e reescrevemos: $t_n \cdot t_{n-1} \cdot t_{n-2} = t_{n-1} \cdot t_{n-2} + t_{n-2} + 1 + \frac{1}{t_{n-3}}$. Mais uma vez, Feinberg (1963) comenta que o quociente acima, obtido a partir da sequência $(q_n)_{n \in IN}$, apresenta um comportamento de convergência, semelhante ao caso encontrado com a SF. Feinberg (1963) indica o seguinte valor real $1{,}9275619\ldots$. Ora, podemos considerar: $\lim_{n \to +\infty} t_n = t \therefore \lim_{n \to +\infty} (t_n \cdot t_{n-1} \cdot t_{n-2}) = \lim_{n \to +\infty} \left(t_{n-1} \cdot t_{n-2} + t_{n-2} + 1 + \frac{1}{t_{n-3}} \right)$ e, efetuando as passagens operacionais com limite, inferimos que: $t^3 = t^2 + t^2 + 1 + \frac{1}{t} \leftrightarrow t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Desse modo, encontramos a seguinte equação polinomial $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ relacionado com a sequência recursiva, definida a partir de seus quatros termos antecedentes, sendo a equação característica da sequência de tetranacci.

Continuando, indicamos os resultados de $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + \mathrm{r}_{n-5}, n \geq 5$, que segundo Sarisahin e Nalli (2014) nos possibilita a obtenção deparamos a seguinte listagem de elementos: $(0,1,1,2,4,8,16,31,61,120,236,\ldots)$, ao assumirmos, de modo arbitrário que $r_0 = 0, r_1 = r_2 = 1, r_3 = 3, r_4 = 4$. Sendo tal listagem a sequência de pentanacci.

Ainda, em Sarisahin e Nalli (2014) os autores assinalam a possibilidade da definição de $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + \mathrm{r}_{n-5}, n \geq 5$ para valores e índices negativos, semelhantemente ao que realizamos nas sequências anteriores. De fato, Sarisahin e Nalli (2014) comentam a possibilidade de descrever a sequência recursiva definida por $r_n = r_{n+5} - r_{n+4} - r_{n+3} - r_{n+2} - r_{n+1}$, para $n < 0$. Um pouco mais adiante, apresentam os novos valores da sequência: $(\ldots,0,0,0,1,-1,0,0,0,2,-3,1,1,0,0,4,-8,\ldots)$, sendo a sequência de pentanaci nos estendida aos inteiros.

Vamos agora, expressar a seguinte relação $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + \mathrm{r}_{n-5} \therefore \dfrac{r_n}{r_{n-4}} = \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-4}} + \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-4}} + \dfrac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \dfrac{r_{n-5}}{r_{n-4}}$. Segue ainda que:

$$\frac{r_n}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{r_n}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \frac{1}{\dfrac{r_{n-4}}{r_{n-5}}} \therefore$$

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \frac{1}{\dfrac{r_{n-4}}{r_{n-5}}}$$

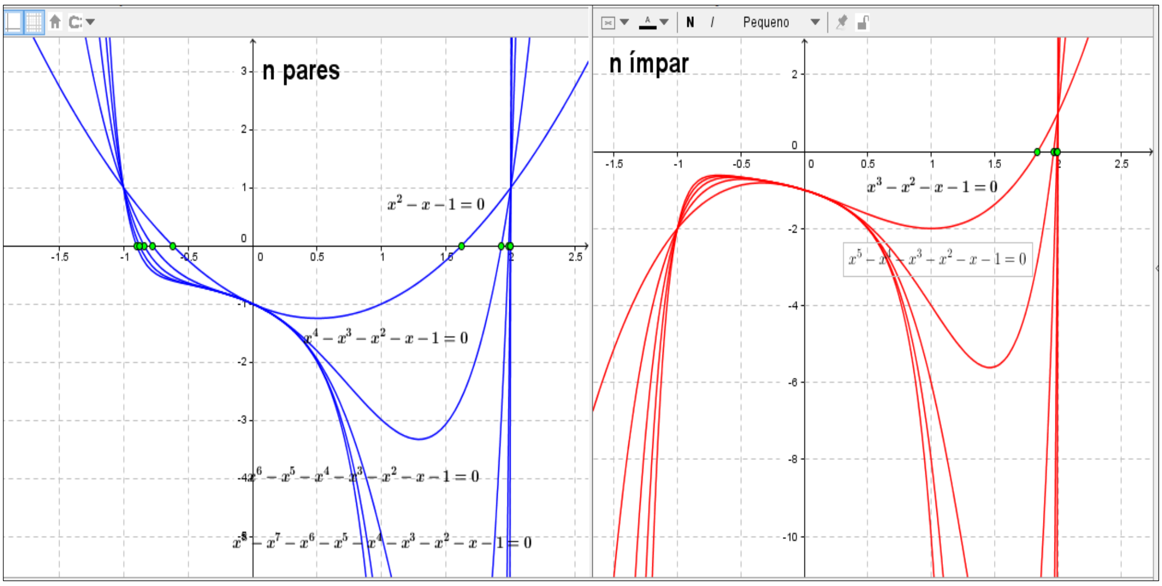
. Neste ponto, repetimos o seguinte procedimento: $q_n = \dfrac{r_n}{r_{n-1}}; q_{n-1} = \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}; q_{n-2} = \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-3}}; q_{n-3} = \dfrac{r_{n-3}}{r_{n-4}}$ o que resulta em: $q_n \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} = q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-3} + 1 + \dfrac{1}{q_{n-4}}$. Para finalizar, assumindo que a convergência da sequência definida pelos quocientes anteriores, escrevemos

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = q \therefore \lim_{n\to+\infty} (q_n \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3}) = \lim_{n\to+\infty} \left(q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-3} + 1 + \frac{1}{q_{n-4}} \right).$$

Obteremos, pois, que: $q^4 = q^3 + q^2 + q + 1 + \dfrac{1}{q} \leftrightarrow q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 = 0$, sendo esta a equação característica da sequência de pentanacci. Sobre o processo apresentado, este pode ainda ser estendido à obtenção de outras equações polinomiais. E poderemos, assim, buscar suas raízes reais com o intuito de identificar um número semelhante ao número de ouro.

Fundamentados em tal perspectiva, mostramos na figura 21 as visualizações relativas às equações polinomiais do modelo de Fibonacci, do qual podemos depreender certas propriedades das raízes positivas de equações do tipo $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, com ‘n’ par (ao lado esquerdo). Com efeito, vislumbramos o acúmulo de gráficos (em cor azul), para valores positivos. Por outro lado, ao lado direito, observamos ainda na figura 21, gráficos na cor vermelha, todavia, divisamos apenas suas raízes reais positivas, o que tende a indicar que as demais raízes são complexas.

Figura 21-Visualização da sequência obtida a partir das raízes reais de equações polinomiais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desse modo, acentuamos algumas propriedades que admitem a generalização e se mostram intrinsicamente relacionadas com a SF. Ora, pelo exposto, podemos conjecturar a possibilidade da descrição da seguinte família de equações polinomiais: $x^2 - x - 1; x^3 - x^2 - x - 1; x^4 - x^3 - x^2 - x - 1; x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1; x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \ldots;$ $x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1; \ldots$

Nas seções anteriores, apontamos uma profusão de perspectivas e modelos conceituais que, em maior ou em menor substância, concorreram para a evolução epistemológica do modelo de Leonardo Pisano. Na próxima seção, abordaremos uma perspectiva de formulação epistemológica que defendemos constituir uma das mais recentes e atuais.

4.7 A Sequência de Funções Hiperbólicas de Fibonacci (SHF), quase seno Hiperbólicas de Fibonacci (FF) e a Função Tridimensional Hiperbólica de Fibonacci (FTF)

Sobre tal modelo, destacamos que sua descrição possui origens em modelo matemático, pensado por matemáticos como Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) e Nikolay Lobachevsky (1792 – 1856). Tal modelo ficou conhecido como hiperbólico. Por outro lado, desde que dedicamos atenção aos modos de generalização do modelo de reprodução de coelhos, assinalamos outra perspectiva epistemológica delimitada, ou ainda, uma demarcação de gênese epistemológica, a partir do excerto que segue:

> Uma nova classe de funções hiperbólicas baseadas na razão áurea poderá indicar duradouras consequências para o futuro da Matemática, Física, Biologia e Cosmologia. Em primeiro lugar, as funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas, as quais, representam uma extensão das fórmulas de Binet, no caso dos números de Fibonacci e de Lucas, segundo um domínio contínuo, transformam a teoria dos números de Fibonacci numa teoria "contínua" porque, cada identidade para as funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas possuem analogia discreta com a categoria dos números de Fibonacci e de Lucas [...] (STAKHOV; ROZIN, 2005a, p. 388).

Pois bem, Stakhov e Rozin (2005a, 2005b) descrevem os elementos de ordem formal e, por não dizer, informal, que concorreram na concepção e o estabelecimento de definições formais e a conceptualização de um novo objeto conceitual nominado pelos mesmos como funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas.

Diante de várias caracterizações que encontramos, inclusive em manuscritos da década de 60, e de modo recente em Stakhov e Rozin (2005b, p. 678), quando acentuam que "a fórmula de Binet constitui a base para a introdução das funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas". Não obstante, a caracterização indicada pelos autores é definida por $f_n = \dfrac{\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$, com $n \in Z$. E, podemos ainda comentar que se assemelha bastante com a definição adotada por Filliponi (1993) quando indica $F_x = \dfrac{\left[\alpha^x - f(x)\cdot\alpha^{-x}\right]}{\sqrt{5}}$, aonde função que satisfaz $f(x+1) = -f(x)$. E, além disso, verificamos a relação fundamental $F_{x+2} = F_{x+1} + F_x$, de maneira que $f(n) = (-1)^n, n \in IN$. Por outro lado, cabe assinalar as semelhanças da maior parte dos casos anteriores com as clássicas funções hiperbólicas, que, costumeiramente, são descritas por $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Acentuamos que Stakhov e Aranson (2011, p. 75) sublinham que “infelizmente, os matemáticos dos séculos XIX e XX não conseguiram avaliar os verdadeiros valores das fórmulas de Binet, embora tais fórmulas detivessem um elemento indicador de descoberta importante – Funções Hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas”. Por outro lado, Stakhov e Aranson registram que, no ano de 1984, o matemático russo Alexey Stakhov publicou um livro intitulado *The book of codes and Golden proportion* (O livro dos códigos e da razão proporcional). Neste livro, Stakhov e Aranson (2011, p. 75) explicam que as fórmulas de Binet são apresentadas de uma forma pouco usual na literatura científica. A fim de apresentarmos uma discussão semelhante a Stakhov e Aranson (2011), consideraremos as formulações exploradas por A. Stakhov, das seguintes formas:

$$F(n) = \begin{cases} \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n = 2k+1 \\ \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n = 2k \end{cases} \quad \text{e} \quad L(n) = \begin{cases} \phi^n + \phi^{-n}, n = 2k \\ \phi^n - \phi^{-n}, n = 2k+1 \end{cases}.$$

Um pouco mais adiante, Stakhov e Aranson (2011) indicam uma ideia fundamental de relacionar, por analogia, com os modelos descritos por $F(n)$ e $\mathrm{L}(n)$, com as respectivas funções hiperbólicas, que conhecemos por $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Por tal via, Stakhov e Aranson (2011) comentam que as fórmulas que indicamos por $F(n)$ e $\mathrm{L}(n)$ podem ser concebidas como uma espécie de nova classe de funções hiperbólicas.

Stakhov e Rozin (2005a, p. 381) abordam as seguintes funções (**): $senhF(x) = \frac{\phi^{2x} - \phi^{-2x}}{\sqrt{5}}$ (seno hiperbólico de Fibonacci), $\cos hF(x) = \frac{\phi^{2x+1} + \phi^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}$ (cosseno hiperbólico de Fibonacci), $senhL(x) = \phi^{2x+1} - \phi^{-(2x+1)}$ (seno hiperbólico de Lucas), $\cos hL(x) = \phi^{2x} + \phi^{-2x}$ (cosseno hiperbólico de Lucas).Dando seguimento, Stakhov e Rozin (2005a) registram que $senhF(2k) = f_{2k}$, $\cos hF(2k+1) = f_{2k+1}$, $senhL(k) = L_{2k+1}$ e $cosh\,L(k) = L_{2k}$, com índices inteiros, no qual caracterizam a relação entre o modelo hiperbólico de Fibonacci e Lucas com os modelos de $F(n)$ e $L(n)$.

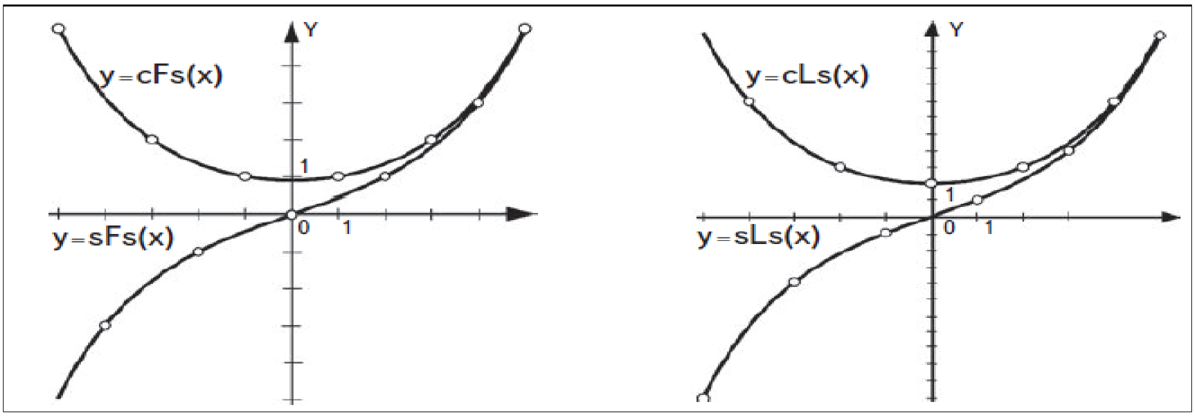
Vale recordar que Stakhov (2009) se refere às descrições que indicamos em (**) por "*strong definitions*". E, no que concerne a igualdade do tipo $senhF(2k) = f_{2k}$, para $k \in Z$, Stakhov (2009, p. 265) explica seu significado quando conclui que "as funções extendidas de Fibonacci e de Lucas coincidem com as funções hiperbólicas em pontos discretos".

Stakhov (2009) prossegue em seu raciocínio quando escreve, de acordo com as definições (**): $tghF(x) = \dfrac{senhF(x)}{cos\,hF(x)} = \dfrac{\phi^{2x} - \phi^{-2x}}{\phi^{2x} + \phi^{-2x}} = \dfrac{\phi^{2x+1}\left(\phi^{4x} - 1\right)}{\phi^{2x}(\phi^{4x+2} + 1)} = \dfrac{\phi\left(\phi^{4x} - 1\right)}{(\phi^{4x+2} + 1)}$. E, de modo semelhante, define ainda que $cotghF(x) = \dfrac{cos\,hF(x)}{senhF(x)} = \dfrac{\phi^{4x+2} + 1}{\phi(\phi^{4x} - 1)}$. Enfim, seguindo uma definição semelhante ao caso das funções trigonométricas, se torna natural esperar ainda que: $tghL(x) = \dfrac{senhL(x)}{\cosh L(x)} = \dfrac{\phi^{4x+2} - 1}{\phi(\phi^{4x} + 1)}$ e $cotghL(x) = \dfrac{cos\,hL(x)}{senh\,L(x)} = \dfrac{\phi(\phi^{4x} + 1)}{\phi^{4x+2} - 1}$

Depreendemos algumas propriedades a partir das definições anteriores. Nesse sentido, verificamos facilmente que vale a condição de simetria $senhF(-x) = \dfrac{\phi^{2(-x)} - \phi^{-2(-x)}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^{-2x} - \phi^{2x}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\phi^{2x} - \phi^{-2x}}{\sqrt{5}} = -senhF(x)$ e que $senhF(0) = \dfrac{\phi^{0} - \phi^{-0}}{\sqrt{5}} = 0$. Ademais, vemos que $cos\,hF(x) = \dfrac{\phi^{2x} + \phi^{-2x}}{\sqrt{5}} > 0$, para todo $x \in IR$. Não obstante, os autores deparam algumas deficiências nas funções definidas há pouco, sobretudo algumas indicadas no comportamento de ausência de simetria nos gráficos. Pouco mais adiante, com a intenção de evitar determinados entraves epistemológicos e lógicos, Stakhov e Rozin (2005a, 2005b) definem uma nova função, nominada agora por *seno hiperbólico simétrico de Fibonacci* e o *cosseno hiperbólico simétrico de Fibonacci*, por intermédio da seguinte notação: $senhFs(x) = \dfrac{\phi^{x} - \phi^{-x}}{\sqrt{5}}$, $cosh\,Fs(x) = \dfrac{\phi^{x} + \phi^{-x}}{\sqrt{5}}$. De modo similar, definem a função seno hiperbólico simétrico de Lucas e o cosseno hiperbólico simétrico de Lucas, por intermédio da seguinte notação: $senhLs(x) = \phi^{x} - \phi^{-x}$, $coshL\,s(x) = \phi^{x} + \phi^{-x}$.

Stakhov (2009) desenvolve atenção especial a um tópico relativo à evolução e aplicação de funções hiperbólicas. Para tanto, o autor discute, inclusive, a formulação de determinadas teorias em Física, tendo como influência o modelo hiperbólico. Por outro lado, Stakhov (2009) ressalva a necessidade de definição das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas, de acordo com o parágrafo anterior, na medida em que as originais funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas (**), não apresentam uma uniformidade de determinadas propriedades, tais como: $senh(-x)=-senh(x)$, $\cos h(-x)=\cos h(\mathrm{x})$ e $th(-x)=th(\mathrm{x})$, apresentada nas funções hiperbólicas originais. Com arrimo na figura 22, divisamos agora um comportamento de simetria perseguido no estabelecimento das definições de $senhLs$ e $\mathrm{coshL}\,s$.

Figura 22 - Comportamento simétrico das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas



Fonte: Stakhov (2009, p.278).

Dando continuidade, fundamentados nas discussões de Stakhov e Rozin (2005a, 2005b), e Stakhov (2009) relacionadas com as definições das funções definidas na seção anterior. Apresentaremos e demonstraremos alguns teoremas relativos às funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e Lucas, desse modo, enunciamos nosso primeiro teorema.

Teorema 12: Considerando as funções $senhFs(x), cosh\,Fs(x)$, verificamos as seguintes propriedades: (i) $senhFs(x+2)=cos\,hFs(x+1)+senhFs(x)$; (ii) $cos\,hFs(x+2)=senhFs(x+1)+cos\,hFs(x)$.

Demonstração: De modo preliminar, consideraremos a seguinte expressão

$$cos\,hFs(x+1)+senhFs(x)=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}+\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{(\phi^{x}\phi^{1}+\phi^{x})+(\phi^{-x}\phi^{-1}-\phi^{-x})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi+1)-\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}\overset{\phi^{-2}=1-\phi^{-1}}{=}\frac{\phi^{x}(\phi^{2})-\phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\phi^{x+2}-\phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}}=senhFs(x+2)\ \text{(i)}$$

E, de modo similar, verificamos propriedade semelhante quando desenvolvemos $senhFs(x+1)+\cos hFs(x)=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=$

$$=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{x}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi+1)+\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi^{2})+\phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+2}+\phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}}$$

Isto é, encontramos a igualdade $senhFs(x+1)+\cos hFs(x)=\cos hFs(x+2)$. Vejamos, pois, relação semelhante no teorema seguinte.

Teorema 13: Considerando as funções $senhL(x)$ e $\cosh L(x)$, verificamos as seguintes propriedades: (i) $senhLs(x+2)=\cosh Ls(x+1)+senhFs(x)$; (ii) $\cosh Ls(x+2)=senhLs(x+1)+\cosh Ls(x)$.

Demonstração: Para tanto, consideremos a seguinte expressão em (i) $\cosh Ls(x+1)+senhFs(x)=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}+\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=$

$$\frac{\phi^{x}\phi+\phi^{x}-\phi^{-x}+\phi^{-x}\phi^{-1}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi+1)-\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi+1)-\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}=\quad .$$

$$=\frac{\phi^{x}(\phi^{2})-\phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}=senhLs(x+2)$$

E, pelo mesmo motivo, apreciamos o item (ii), da seguinte forma: $senhLs(x+1)+\cosh Ls(x)=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$

$$=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{x}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(1+\phi)-\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi^{2})+\phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}=\cosh Ls(x+2)$$

Nos resultados subsequentes, proporcionamos ao leitor a apreciação de propriedades largamente discutidas por autores de livros de HM e que continuam sendo verificadas no modelo hiperbólico proposto por Alexey Stakhov.

Teorema 14: A fórmula de Cassini, em Koshy (2011, p. 74) descrita por $f_n^2-f_{n+1}f_{n-1}=(-1)^{n+1}$ é válida para funções hiperbólicas simétricas. Em outras palavras, valem as seguintes identidades: (i) $\left(senhFs(x)\right)^2-\left(\cos hFs(x+1)\right)\left(\cos hFs(x-1)\right)=(-1)$; (ii) $\left(\cos hFs(x)\right)^2-\left(senhFs(x+1)\right)\left(senhFs(x-1)\right)=(-1)$. Demonstração: Neste sentido, Stakhov e Rozin (2005a) escrevem $\left(senhFs(x)\right)^2-\left(\cos hFs(x+1)\right)\left(\cos hFs(x-1)\right)$:

$$\left(\frac{\phi^x-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\phi^{x-1}+\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\left(\phi^{2x}+\phi^2+\phi^{-2}+\phi^{-2x}\right)}{5}=$$

$$\frac{-2-\phi^2-\phi^{-2}}{5}=\frac{-2-\phi-1-1+\phi^{-1}}{5}\overset{\phi^{-1}-\phi=-1}{=}\frac{-4+(\phi^{-1}-\phi)}{5}=-1$$

De modo semelhante inferimos que: $\left(\cos hFs(x)\right)^2-\left(senhFs(x+1)\right)\left(senhFs(x-1)\right)$

$$\left(\frac{\phi^x-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\phi^{x-1}+\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\left(\phi^{2x}+\phi^2+\phi^{-2}+\phi^{-2x}\right)}{5}=$$

$$\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\phi^{2x}-\phi^2-\phi^{-2}-\phi^{-2x}}{5}=\frac{-2-\phi^2-\phi^{-2}}{5}=\frac{-2-(1+\phi)-(1-\phi^{-1})}{5}$$

$$=\frac{-2-1-\phi-1+\phi^{-1}}{5}=\frac{-4-1}{5}=-1$$

No enunciado do próximo teorema, abordamos relações envolvendo a Sequência de Lucas, apesar de não constituir maior interesse, estabelecemos no teorema 15, resultado que pode proporcionar posteriores investigações, para o caso das funções hiperbólicas de Lucas que denotamos por $senhLs$ e $\cos hLs$.

Teorema 15: A fórmula descrita por $L_n^2-2(-1)^n=L_{2n}$ é válida para funções hiperbólicas simétricas de Lucas, por meio das seguintes identidades: (i) $\left(senhLs(x)\right)^2+2=\cos hLs(2x)$; (ii) $\left(\cos hLs(x)\right)^2-2=\cos hLs(2x)$

Demonstração: De fato, basta notar que ocorre que $\left(senhLs(x)\right)^2+2=\left(\phi^x-\phi^{-x}\right)^2+2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}-2\phi^x\phi^{-x}+2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}=\cos hLs(2x)$. E, de imediato, obteremos também que $\left(\cos hLs(x)\right)^2-2=\left(\phi^x+\phi^{-x}\right)^2-2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}=\cos hLs(2x)$.

No teorema, logo em seguida, abordamos uma relação recorrentemente discutidas pelos autores de livros de HM, pelo fato de proporcionar a demonstração da fórmula de Binet para o caso da Sequência de Lucas.

Teorema 16: A fórmula descrita por $L_n=f_{n-1}+f_{n+1}$, para $n\in Z$ Hoggat (1969) possui um fórmula equivalente para as funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas, descritas por: (i) $\cosh Fs(x+1)+\cosh Fs(x-1)=\cos hLs(x)$; (ii) $\text{senh}\, Fs(x+1)+sen\text{h}\, Fs(x-1)=senhLs(x)$.

Demonstração: Com efeito, escrevemos $\cosh Fs(x+1)+\cosh Fs(x-1)=$

$$=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x-1}-\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}\phi+\phi^{-x}\phi^{-1}+\phi^{x}\phi^{-1}-\phi^{-x}\phi}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi+\phi^{-1})+\phi^{-x}(\phi^{-1}-\phi)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\phi^{x}\sqrt{5}+\phi^{-x}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\phi^{x}+\phi^{-x}=\cosh L(x)$$

Segue o resultado que indicamos em (i). Por outro lado, em relação ao item (ii), vemos ainda que $\operatorname{senh} Fs(x+1)+sen\mathrm{h}\, Fs(x-1)$, donde encontramos:

$$\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x-1}-\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{x-1}-\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}\phi-\phi^{-x}\phi^{-1}+\phi^{x}\phi^{-1}-\phi^{-x}\phi}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\phi^{x}(\phi+\phi^{-1})-\phi^{-x}(\phi^{-1}+\phi)}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}\sqrt{5}-\phi^{-x}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\phi^{x}-\phi^{-x}=senhLs(x)$$

Teorema 17: As fórmulas $f_n+f_{n+1}=2f_{n+1}$ e $f_{2n}=f_nL_n$ (BROUSSEAU, B., 1965) para $n\in Z$, possuem descrições equivalentes em termos das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas. Isto é, valem as relações: (i) $cosh\,Fs(x+1)+sen\,h\,Fs(x-1)=coshL(x)$;(ii) $senh\,Fs(x+1)+sen\,h\,Fs(x-1)=sen\,hL(x)$; (iii) $\operatorname{senh} Fs(2x)=\cosh Fs(x)\operatorname{senh} Fs(x)$.

Demonstração: De fato, vemos que se verifica que $cosh\,Fs(x+1)+sen\,h\,Fs(x-1)=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x-1}-\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}$. No que concerne ao item (iii), vejamos que

$$\operatorname{senh} Fs(2x)=\frac{\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\phi^{x}-\phi^{-x}\right)\left(\phi^{x}+\phi^{-x}\right)}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\phi^{x}-\phi^{-x}\right)}{\sqrt{5}}\left(\phi^{x}+\phi^{-x}\right)=senhF(x)\cdot\cosh L(x)$$

No que concerne aos próximos teoremas, Stakhov e Rozin (2005a, p. 384) acentuam que “as representações simétricas das funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas possuem propriedades similares à classe de funções hiperbólicas clássicas”. De acordo com tal perspectiva, enunciamos o próximo teorema.

Teorema 18: A relação clássica conhecida como $cosh(x)^2-senh(x)^2=1$ é válida, também, no caso das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas, sendo tal modelo expresso por $\mathrm{coshFs}(x)^2-senhFs(x)^2$. Sobre este resultado, o demonstraremos na seguinte igualdade:

$$\left(\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^{2}-\left(\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^{2}=\frac{\phi^{2x}+\phi^{-2x}+2\phi^{x}\phi^{-x}-\left(\phi^{2x}+\phi^{-2x}-2\phi^{x}\phi^{-x}\right)}{5}=$$

$$\frac{\phi^{2x}+\phi^{-2x}+2\phi^{x}\phi^{-x}-\phi^{2x}-\phi^{-2x}+2\phi^{x}\phi^{-x}}{5}=\frac{\phi^{2x}+\phi^{-2x}+4-\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{5}=\frac{4}{5}$$

Portanto, inferimos que $\cosh\mathrm{Fs}(x)^{2}-senhFs(x)^{2}=\frac{4}{5}$, para todo $x\in IR$. E, por analogia, Stakhov (2009) acentua a seguinte verificação para o caso da função simétrica hiperbólica de Lucas, para pela $\forall x\in IR$, a seguinte via de dedução $coshLs(x)^{2}-senhLs(x)^{2}=\left(\phi^{x}+\phi^{-x}\right)^{2}-\left(\phi^{x}-\phi^{-x}\right)^{2}=\phi^{2x}+\phi^{-2x}+2-\left(\phi^{2x}+\phi^{-2x}-2\right)=4$.

Ouras relações envolvendo identidades entre as funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e Lucas, e as identidades de Fibonacci e Lucas, são descritas por Stakhov (2009), e apresentadas na figura 23, a seguir:

Figura 23 - Conjunto de identidades das funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_{n}$	$sFs(x+2)=cFs(x+1)+sFs(x)$	$cFs(x+2)=sFs(x+1)+cFs(x)$
$L_{n+2}=L_{n+1}+L_{n}$	$sLs(x+2)=cLs(x+1)+sLs(x)$	$cLs(x+2)=sLs(x+1)+cLs(x)$
$F_{n}=(-1)^{n+1}F_{-n}$	$sFs(x)=-sFs(-x)$	$cFs(x)=cFs(-x)$
$L_{n}=(-1)^{n}L_{-n}$	$sLs(x)=sLs(-x)$	$cLs(x)=-cLs(-x)$
$F_{n+3}+F_{n}=2F_{n+2}$	$sFs(x+3)+cFs(x)=2cFs(x+2)$	$cFs(x+3)+sFs(x)=2sFs(x+2)$
$F_{n+3}-F_{n}=2F_{n+1}$	$sFs(x+3)-cFs(x)=2sFs(x+1)$	$cFs(x+3)-sFs(x)=2cFs(x+1)$
$F_{n+6}-F_{n}=4F_{n+3}$	$sFs(x+6)-cFs(x)=4sFs(x+3)$	$cFs(x+6)-sFs(x)=4cFs(x+3)$
$F_{n}^{2}-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^{n+1}$	$[sFs(x)]^{2}-cFs(x+1)cFs(x-1)=-1$	$[cFs(x)]^{2}-sFs(x+1)sFs(x-1)=1$
$F_{2n+1}=F_{n+1}^{2}+F_{n}^{2}$	$cFs(2x+1)=[cFs(x+1)]^{2}+[sFs(x)]^{2}$	$sFs(2x+1)=[sFs(x+1)]^{2}+[cFs(x)]^{2}$
$L_{n}^{2}-2(-1)^{n}=L_{2n}$	$[sLs(x)]^{2}+2=cLs(2x)$	$[cLs(x)]^{2}-2=cLs(2x)$
$L_{n}+L_{n+3}=2L_{n+2}$	$sLs(x)+cLs(x+3)=2sLs(x+2)$	$cLs(x)+sLs(x+3)=2cLs(x+2)$
$L_{n+1}L_{n-1}-L_{n}^{2}=-5(-1)^{n}$	$sLs(x+1)sLs(x-1)-[cLs(x)]^{2}=-5$	$cLs(x+1)cLs(x-1)-[sLs(x)]^{2}=5$
$F_{n+3}-2F_{n}=L_{n}$	$sFs(x+3)-2cFs(x)=sLs(x)$	$cFs(x+3)-2sFs(x)=cLs(x)$
$L_{n-1}+L_{n+1}=5F_{n}$	$sLs(x-1)+sLs(x+1)=5sFs(x)$	$cLs(x-1)+cLs(x+1)=5cFs(x)$
$L_{n}+5F_{n}=2L_{n+1}$	$sLs(x)+5cFs(x)=2cLs(x+1)$	$cLs(x)+5sFs(x)=2sLs(x+1)$
$L_{n+1}^{2}+L_{n}^{2}=5F_{2n+1}$	$[sLs(x+1)]^{2}+[cLs(x)]^{2}=5cFs(2x+1)$	$[cLs(x+1)]^{2}+[sLs(x)]^{2}=5sFs(2x+1)$

Fonte: Stakhov (2009, p.288).

Dando continuidade encontramos, num trabalho de Stakhov e Rosin (2005b), uma definição derivada, todavia, ainda contida na classe de FHF. Para tanto, os autores chamam de a função quase-seno de Fibonacci (quasi-sine Fibonacci function), descrita por $ff(x)=\frac{\alpha^{x}-cos(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$, com $x\in IR$. Ainda, no estudo Stakhov e Rosin (2005b), e

Stakhov (2009) os autores apresentam outras identidades relacionando a função quase-seno de Fibonacci (quasi-sine Fibonacci function), e as identidades de Fibonacci e Lucas clássicas, resultados que destacamos na figura 24, a seguir:

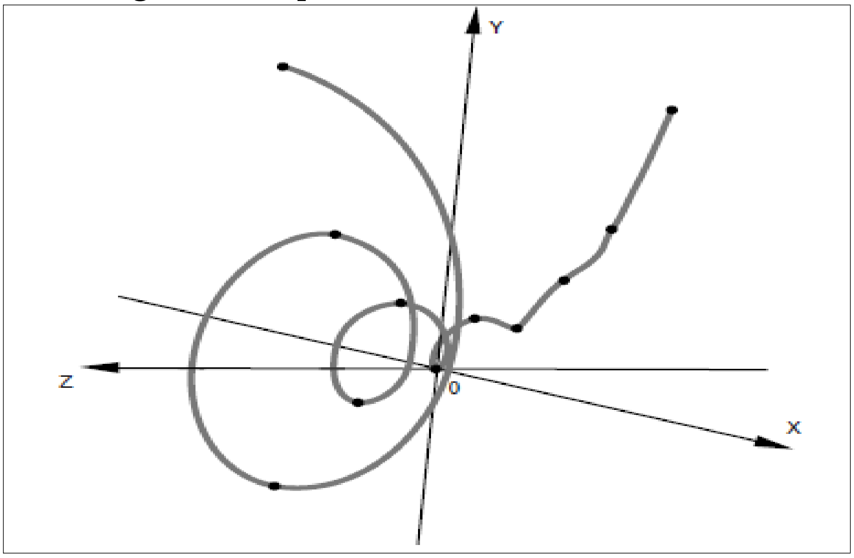
Figura 24 - Identidades das funções quase seno de Fibonacci

The identities for Fibonacci numbers	The identities for the quasi-sine Fibonacci function
$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2}$	$FF(x+3) + FF(x) = 2FF(x+2)$
$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$FF(x+3) - FF(x) = 2FF(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$FF(x+6) + FF(x) = 4FF(x+3)$
$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$[FF(x)]^2 - FF(x+1)FF(x-1) = -\cos(\pi x)$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$FF(2x+1) = (FF(n+1))^2 + (FF(x))^2$

Fonte: Sthakov e Rozin (2005b, p.4).

Finalizando esta seção, apresentamos o que caracterizamos como o último modelo que apresentaremos, neste percurso, relativo a generalização do modelo de Fibonacci, nesse sentido, em Stakhov e Rosin (2005b), e Stakhov (2009) encontramos define $fTf(\mathrm{x}) = \dfrac{\alpha^x - \cos(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}} + i\dfrac{\mathrm{sen}(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$, definido como a (Função Tridimensional Espiral de Fibonacci – FTF) modelo que permite a obtenção do que Stakhov e Rosin (2005b) apresentam como a espiral tridimensional de Fibonacci, caracterizado na figura 25, a seguir:

Figura 25 - Espiral tridimensional de Fibonacci



Fonte: Stakhov e Rozin (2005a, p.382).

Desse modo, acentuamos na discussão realizada, o caráter imprescindível para um entendimento do modelo ainda em evolução originado de um problema colocado por

Fibonacci, em 1202. Evolução que mostramos na tabela 2, na qual apresentamos um conjunto de modelos e seus conceitos, catalogados no transcorrer da pesquisa.

Tabela 2- Modelos relativos à generalização da sequência de Fibonacci

Conceito matemático	Modelo matemático
1-Sequências recorrentes de Fibonacci.	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n > 2$ $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n > 1$
2-Fórmula de Binet.	$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 0,1,2,3,...$
3-Fórmula de extensão de Binet aos inteiros.	$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$
4-Fórmula de Binet para a sequência de Lucas.	$L_n = \alpha^n + \beta^n, n = 1,2,3,.....$
5-Fórmula de extensão dos números de Lucas aos inteiros.	$L_{-n} = (-1)^n . L_n$
6-Fórmula de Binet Matricial.	$Q^n = \begin{pmatrix} (\alpha^n - \beta^n) + \alpha\beta^n - \beta\alpha^n & (\alpha^n - \beta^n) \\ (\alpha^n - \beta^n) & (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n) \end{pmatrix}, n \geq 0$
7-Fórmula de Binet matricial com índices negativos.	$Q^{-n} = \frac{1}{(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} (-1)^n\left[(\beta^n - \alpha^n) + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right] & (-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n) \\ (-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n) & (-1)^n(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \end{pmatrix}, n \geq 0$
8-Números de Fibonacci em termos binomiais.	$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}, n \geq 0$
9-Fórmula de extensão em termos binomiais.	$f_{-n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . (-1)^{n+i} f_i$
10-Fórmula de Binet trigonométrica.	$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(2)^n}{\sqrt{5}}\left[cos^n(\frac{\pi}{5}) - cos^n(\frac{3\pi}{5})\right], n \geq 0$
11-Fórmula de Binet nos complexos.	$f_n = \frac{\alpha^{2n} - cos(n\pi) + isen(n\pi)}{(\alpha - \beta) \cdot \alpha^n}$
12-Fórmula de Binet para a SPF.	$f_{n+1}(x) = \frac{\left(\alpha(x)^{n+1} - \beta(x)^{n+1}\right)}{\alpha(x) - \beta(x)}, n \geq 1$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2- Modelos relativos à generalização da sequência de Fibonacci (continuação)

13-Fórmula de extensão da SPF aos inteiros.	$f_{-n}(x)=(-1)^{n+1}f_n(x)$
14-Fórmula de Binet para tribonacci.	$t_n=\frac{\rho^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\overline{\sigma})}+\frac{\sigma^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\sigma-\overline{\sigma})}+\frac{\overline{\sigma}^{n+2}}{(\overline{\sigma}-\rho)(\overline{\sigma}-\sigma)}$
15-Fórmula de Binet, numa perspectiva atual.	$F(n)=\begin{cases}\frac{\phi^n+\phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n=2k+1\\ \frac{\phi^n-\phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n=2k\end{cases}$
16-Fórmula de Lucas, numa perspectiva atual.	$L(n)=\begin{cases}\phi^n+\phi^{-n}, n=2k\\ \phi^n-\phi^{-n}, n=2k+1\end{cases}$
17-Seno hiperbólico de Fibonacci.	$senhF(x)=\frac{\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}$
18-Cosseno hiperbólico de Fibonacci.	$\cos hF(x)=\frac{\phi^{2x+1}+\phi^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}$
19-Seno hiperbólico de simétrico de Fibonacci.	$senhFs(x)=\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$
20-Cosseno hiperbólico simétrico de Fibonacci.	$cosh\,Fs(x)=\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$
21-Função quase seno de Fibonacci.	$ff(x)=\frac{\alpha^{x}-cos(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$
22-Função tridimensional hiperbólica.	$fTf(\mathrm{x})=\frac{\alpha^{x}-\cos(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}+i\frac{\mathrm{sen}(\pi x)\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, discutimos neste capítulo, a fundamentação dos conceitos e relações do processo de generalização da sequência de Fibonacci, com destaque para a fórmula de Binet como modelo de generalização e evolução matemática do conceito, elementos que permitiram uma fundamentação necessária à etapa de estruturação das situações didáticas, elementos que evidenciamos no capítulo seguinte.

5 O ENSINO DO MODELO GENERALIZADO E EXTENDIDO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

5.1 Concepção e análise a priori

Como prevê esta etapa da ED devemos definir as variáveis globais e locais que nortearão as escolhas da pesquisa, como estamos tratando de uma micro engenharia, com ações voltadas ao contexto da sala de aula. Nesse sentido, é de nosso interesse a descrição de situações didáticas que envolvam os modelos de generalização da sequência de Fibonacci. A seguir caracterizamos nossas escolhas no âmbito local, que nos permitiram a organização do plano de ação a ser aplicado durante a experimentação.

Nesse sentido, a partir do levantamento descrito no capítulo anterior, relativo ao contexto de aplicação dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci, constituímos um conjunto de quatro situações didáticas, descritas posteriormente, voltadas ao ensino de alguns desses modelos.

Como destaca a ED, na construção das situações de ensino temos que realizar uma ação descritiva e preditiva, ou seja, realizarmos uma análise cognitiva preliminar dos alunos, estabelecendo seus possíveis comportamentos, procedimentos e resultados, a serem estabelecidos durante a resolução das situações didáticas propostas.

Sobre tal contexto, tomamos como referência a essa descrição e predição, nas situações didáticas, as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD, que nos permitiram tal constituição, relativa aos resultados esperados, bem como os possíveis comportamentos dos alunos, durante a experimentação.

Ainda, sobre a organização das situações de ensino, destacamos que durante a constituição das atividades levantamos algumas hipóteses didáticas que servirão de referência a uma análise a posteriori e validação do estudo. Sobre as hipóteses constituídas, estas são apresentadas a seguir, referendadas em suas respectivas atividades. Vejamos:

Na atividade 1, temos como hipótese que os alunos estabeleçam uma notação recursiva a partir da interpretação do problema dos coelhos, além de estenderem a sequência a índices inteiros.

Na atividade 2, temos com hipótese que os alunos devem caracterizar a fórmula de Binet, como modelo de obtenção da sequência de Fibonacci, não mais recursiva.

Na atividade 3, temos como hipótese que os alunos caracterizem $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, como a fórmula de Binet de extensão da sequência de Fibonacci, a índices inteiros; bem como utilizem o modelo de Binet, constituído na atividade 2, como elemento de prova/demonstração de propriedades da sequência de Fibonacci.

Na atividade 4, temos como hipótese que os alunos caracterizem a sequência de Fibonacci, a partir de outros contextos matemáticos, que não seja somente, a modelização do problema dos coelhos.

A seguir, apresentamos as atividades que utilizamos na experimentação, com seus respectivos procedimentos e discussões de acordo com as fases da TSD. Nossa perspectiva é de caracterização de uma proposta de metodologia de ensino, da sequência generalizada de Fibonacci, através da generalização da fórmula de Binet.

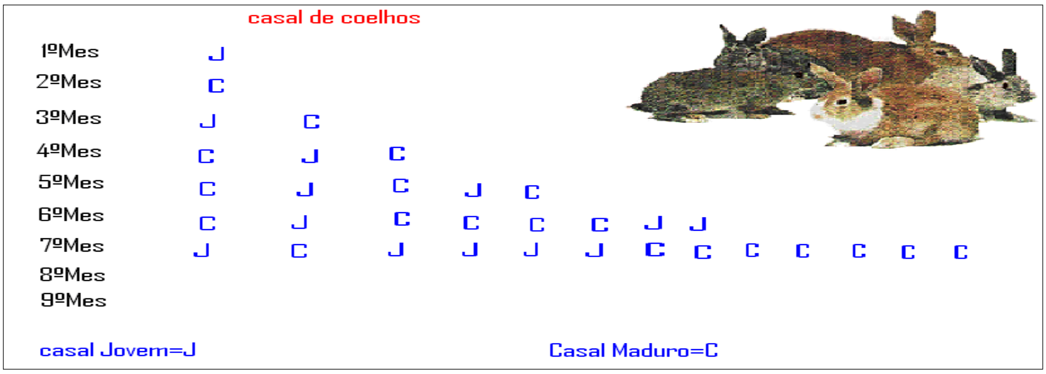
5.2 Descrições das situações didáticas

Nessas atividades foram exploradas algumas propriedades da sequência de Fibonacci e suas possíveis relações com outros conceitos matemáticos. Assumimos posição concorde com Brousseau, G.(1988, p. 15) quando acentua que “a aprendizagem é uma modificação do conhecimento e que o próprio aluno deve produzi-lo e que o professor deve provocar a seguir um certo raciocínio. Para fazer funcionar um conhecimento apropriado dos alunos, o professor busca uma situação apropriada”. Diante de tal premissa, apresentamos nossa primeira atividade.

ATIVIDADE 1-Sequência recorrente que modeliza o problema dos coelhos imortais e da sequência estendida de Fibonacci aos inteiros

OS COELHOS DE FIBONACCI

Como destaca Hefez (2003, p.26) trata-se do seguinte problema proposto e resolvido por Leonardo de Pisa em seu livro, *Líber Abacci* de 1202: *Quotparia coniculorum in uno anno ex unopario germinentur.* Trocando em miúdos: *um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento*. O esquema a seguir, representa a situação:



O esquema mnemônico anterior demonstra a descrição e modelização, relacionada com o problema dos coelhos. Utilizando o esquema proposto, responda:

a) Que sequência você relacionaria com a situação do nascimento de casais de coelhos? Explique suas escolhas, indicando uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo e, assim, sucessivamente. Podemos estabelecer uma relação que generalize esses resultados?

b) Com base na relação anterior, podemos avaliar os valores de $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$. Descreva esse conjunto numérico. Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir a sequência obtida?

A partir de agora descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 1, de acordo com as fases da TSD. Iniciaremos, com o item (a):

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução.

Dessa maneira, a partir da análise do esquema mnemônico proposto, o aluno deve procurar estabelecer uma relação entre o período (meses) e a filiações (quantidade de casais), caracterizando a seguinte situação:

No primeiro mês, teremos apenas um casal de coelhos jovem, que ainda não atingiu a maturidade; no segundo mês, ainda teremos um único casal, sendo este agora maduro, e capaz de se reproduzir; no terceiro mês, o casal maduro do mês anterior, se reproduz e gera um casal jovem, obtendo-se neste período dois casais, um jovem e um maduro; no quarto mês, enquanto o casal jovem do mês anterior atinge a maturidade, o casal maduro se reproduz, obtendo-se neste período três casais. Dinâmica que o aluno deve ser capaz de perceber, a partir do esquema proposto.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, no entanto, sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Nesse sentido, após o aluno ter compreendido a dinâmica de maturação e reprodução dos casais de coelhos, e que este processo ocorre de maneira contínua, com padrão de recorrência definido. Ao final, desta fase, o aluno deve ser capaz de expressar a seguinte sequência: $(f_n)_{n\in N}:(1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233;377;....)$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova.

Desse modo, posteriormente, a obtenção da sequência, o aluno deve ser instigado a expressar seus resultados, em notação matemática. Dessa forma, este deve obter a relação a seguir, que vincula a unidade temporal n(meses), com f_n (filiações possíveis), a cada mês.

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow f_1=1 \\ n=2 \rightarrow f_2=1 \\ n=3 \rightarrow f_3=2=f_1+f_2 \\ n=4 \rightarrow f_4=3=f_2+f_3 \\ n=5 \rightarrow f_5=5=f_3+f_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n=n \rightarrow f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \end{cases}$$

E que, ao final, seja capaz de obter um resultado mais geral que modelize a situação, no caso, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, para $n>2$, modelo recorrente da SF.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Desta maneira, ao retomarmos as discussões, evidenciaremos do estudo realizado, o modelo de recorrência e formalização da SF, a partir do problema dos coelhos.

Dando prosseguimento, apresentamos as realizações e discussões previstas no item (b), da atividade 1.

Situação de Ação: Como já ressaltamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Assim, o aluno tendo como referência o modelo obtido no item b, deve avaliar a possibilidade de termos $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Com isto o aluno deve avaliar, na relação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n > 2$, o valor de $n = 2 \therefore f_2 = f_1 + f_0$. Daí, este pode obter $f_0 = f_2 - f_1$. Agora, com origem nos valores indicados em $(f_n)_{n \in N} : (1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233;377;....)$, podendo escrever $f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$, como já destacamos, o que nos parece natural numa situação ainda em que os coelhos não existem.

Entretanto, continuando o processo anterior, este deve escrever $n = 1 \therefore f_1 = f_0 + f_{-1}$, o que o conduz ao valor $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$.Também como já destacamos, este é o momento em que assinalamos a possibilidade de um distanciamento do modelo empírico da produção dos coelhos. É de fato, o momento de nos questionarmos qual significado cognoscível podemos relacionar ao termo $f_{-1} = 1$? . Dando continuidade, este deve escrever, $n = 0 \therefore f_0 = f_{-1} + f_{-2}$ o que os conduz ao valor $f_{-2} = f_0 + f_{-1} = -1$.

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova.

Nesse sentido, ao continuar o processo para $n = -1, -2, -3, -4, ...$; o aluno deve obter a seguinte sequência $(....,8,-5,3,-2,1,-1,0,1,1,2,3,5,8,....)$.Além do fato, perceber e expressar a possibilidade de “alongarmos”, “ampliarmos”,” estendermos” a sequência de Fibonacci para números inteiros. Contrapondo a abordagem tradicional de apresentação e discussão da sequência de Fibonacci.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Assim, ao retomarmos, temos condições de discutir uma abordagem da sequência de Fibonacci, não corriqueira, que trata de sua extensão a índices inteiros, abordagem discutida por Alves e Borges Neto (2011).

ATIVIDADE 2-A fórmula de Binet como modelo de generalização da SF

Huntley (1985, p. 63) relata que a "ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série". Nesse sentido, dada α a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, e sua raiz negativa β, teremos que $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$.Com base nos valores de α e β, como podemos reescrever $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$? Ao verificar alguns resultados com $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos dar ao modelo?

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 2 de acordo com as fases da TSD. Iniciaremos com a:

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta, que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Desta forma, o aluno tomando por base o contexto apresentado por Huntley (1985), deve perceber a possibilidade de obtenção do termo geral da sequência de Fibonacci, tornando-a não mais recursiva; diferentemente dos argumentos discutidos na atividade 1, estruturados na recursividade da SF.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Nessa perspectiva, a partir da resolução da equação $x^2 - x - 1 = 0$, o aluno terá como resultados, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como raiz positiva e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ como raiz negativa. Dando prosseguimentos, o aluno deve reescrever a relação $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, e com base nos resultados obter a formulação:

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 0,1,2,3,...$$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, o aluno deve realizar alguns cálculos com a formulação anterior, e obter os seguintes resultados:

Para $n = 1$, em $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, temos $f_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$; para $n = 2$, em $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, temos $f_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta).(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = 1$; para $n = 3$, em $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, temos $f_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta).(\alpha^2 + \alpha.\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} \underset{\alpha^2+\beta^2=3}{\overset{\alpha.\beta=-1}{=}} \alpha^2 + \alpha.\beta + \beta^2 = 3 - 1 = 2$, e para $n = 4$, temos:

$$f_4 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \underset{\alpha+\beta=1}{\overset{\alpha^2+\beta^2=3}{=}} (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) = 3$$

E ao final, este deve perceber que o teste realizado para alguns valores de n, na formulação, determina como resultados a sequência de Fibonacci.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Ao retomarmos as discussões relativas às fases anteriores, temos elementos que permitem a caracterização do modelo matemático, de obtenção da sequência de Fibonacci, não mais recursiva, e sim explícita, a fórmula de Binet.

ATIVIDADE 3 - Fórmula de Binet estendida a índices inteiros

Nos compêndios de História da Matemática-HM, a fórmula atribuída a Binet, proporciona a obtenção explicita dos termos da sequência de Fibonacci, sendo esta indicada por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$, (KOSHY, 2011). Sendo esta fórmula descoberta 500 anos depois, em 1730, por De Moivre (STILLWELL, 1989). Com base nos argumentos, que resultados podemos estabelecer ao utilizarmos $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$? Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir ao modelo? Podemos estabelecer uma demonstração para $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$?

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 3, de acordo com as fases da TSD. Iniciaremos com a:

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Dessa forma, o aluno deve perceber que a partir da propriedade apresentada, e ao atribuir valores para n, que os resultados obtidos são a extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Assim, o aluno ao fazer uso da relação $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, obterá alguns resultados, como os descritos, a seguir:

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \text{ para n=1} \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \text{ para n=2} \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \text{ para n=3} \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \text{ para n=4} \\ f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \text{para n=5} \\ \text{..} \end{cases}$$

E, ao final do procedimento, este deve encontrar os seguintes resultados $(....13,-8,5,-3,2,-1,1,0)$, estabelecendo novamente a seguinte sequência $(....,8,-5,3,-2,1,-1,0,1,1,2,3,5,8,....)$, fato já conhecido da atividade 1.

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova.

Desse modo, o aluno deve determinar matematicamente a relação $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, como modelo, que permite a obtenção dos números de Fibonacci estendidos a índices inteiros; e que esta formulação possui conexão direta, com a fórmula de Binet. Do ponto de vista matemático, este deve realizar o seguinte procedimento, a partir da fórmula de Binet:

$f_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \dfrac{(1/\alpha)^n - (1/\beta)^n}{\alpha - \beta}$. Em seguida, observar que:

$\alpha\beta = -1 \therefore\ f_{-n} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$. Concluindo que $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Com isto, ao retomarmos as discussões das fases anteriores, temos condições de determinarmos $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, como a fórmula de Binet, de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros, e utilizarmos Binet como elemento de prova/demonstração de propriedades da SF.

ATIVIDADE 4 - Funções geradoras e a sequência de Fibonacci

Como destaca Huntley (1985, p.144-145) "os números de Fibonacci aparecem de novo em um contexto totalmente diverso". Nesse sentido, o autor argumenta que ao determinarmos alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$ através de divisão direta, forma a série de Fibonacci. Com base no que sugere Huntley (1985), o que obteremos em $\dfrac{x}{1-x-x^2} = ?$. Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir aos resultados obtidos? Que conclusões podemos estabelecer para $\dfrac{x}{1+x-x^2} = ?$

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Nesse sentido, o aluno deve iniciar a resolução através da divisão dos polinômios $\frac{x}{1-x-x^2}=?$ e $\frac{x}{1+x-x^2}=?$

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permiti a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Desse modo, o aluno deve realizar as divisões das funções racionais, de acordo com os procedimentos que apresentamos a seguir, iniciando com os relativos a $\frac{x}{1-x-x^2}=?$

$$
\begin{array}{c|c}
x & 1-x-x^2 \\
\underline{-x+x^2+x^3} & x+x^2+2x^3+3x^4+\ldots\ldots \\
x^2+x^3 & \\
\underline{-x^2+x^3+x^4} & \\
2x^3+x^4 & \\
\underline{-2x^3+2x^4+2x^5} & \\
3x^4+2x^5 & \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Dando continuidade, apresentamos os procedimentos relativos à divisão de $\frac{x}{1+x-x^2}=?$

$$
\begin{array}{c|c}
x & 1+x-x^2 \\
\underline{-x-x^2+x^3} & x-x^2+2x^3-3x^4+\ldots\ldots \\
-x^2+x^3 & \\
\underline{x^2+x^3-x^4} & \\
2x^3-x^4 & \\
\underline{-2x^3-2x^4+2x^5} & \\
-3x^4+2x^5 & \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova. Ao realizar as divisões anteriores, este deve encontrar como resultados $\frac{x}{1-x-x^2}=1x+1x^2+2x^3+3x^4+.....$ e $\frac{x}{1-x-x^2}=1x-1x^2+2x^3-3x^4+......$ Resultados que não são polinômios, e sim, série de potência, que tem por coeficientes os números de Fibonacci, em sua forma normal e estendida, respectivamente.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Assim, ao retomarmos as discussões podemos evidenciar a possibilidade de obtenção da sequência de Fibonacci, a partir de outros contextos matemáticos, que não seja somente, a modelização do problema dos coelhos, no caso, o estudo das funções geradoras, de obtenção da sequência de Fibonacci na forma normal e estendida.

Abordamos neste capítulo os procedimentos seguidos com as orientações da TSD necessários à elaboração das atividades de experimentação, que tinham por fundamento, a exploração de algumas das propriedades elencadas no capítulo anterior, e que foram aplicadas na experimentação, momento que destacamos, no capítulo seguinte.

6 UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MODELO GENERALIZADO DE FIBONACCI NUM CURSO DE LICENCIATURA

Na seção atual, trazemos o relato de uma incursão investigativa, que busca evidenciar uma abordagem estruturada, planejada e amparada pela perspectiva de mediação de ensino da Teoria das Situações Didáticas – TSD. As situações didáticas a serem apresentadas respaldam, ainda, nossa intenção de publicisar, no locus acadêmico, os traços atuais evolutivos do modelo de Leonardo Pisano e, assim, proporcionar um entendimento matemático e epistemológico aprofundado sobre a matéria, tendo em vista os professores em formação inicial.

6.1 Experimentação

Nesta etapa, a ED é caracterizada pela aplicação das situações didáticas estruturadas à coleta de dados da pesquisa. Assim, nossa investigação teve como local e público alvo, o Instituto Federal do Ceará, durante a disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática, referente ao 5º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, sendo a turma composta por 09 alunos regularmente matriculados, em 2016.

Como instrumentais de coleta de dados, consideramos as observações realizadas durante os momentos de aplicação, das quatro atividades planejadas; as produções escritas dos alunos, nos protocolos de aplicação; as falas nas entrevistas semiestruturas realizadas durante cada momento, bem como os registros fotográficos.

Os momentos de aplicação foram realizados em quatro aulas, de uma hora e meia cada, tendo os alunos trabalhado em duplas. Como metodologia de ensino nos momentos de aplicação consideramos as fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Sendo a coleta de dados realizada durante a mediação nestas fases.

6.2 Descrições e observações relativas aos momentos de aplicação

A seguir, apresentamos as descrições relativas a cada momento de aplicação, destacando o conjunto de informações coletadas e os elementos mais significativos das produções dos alunos, observados durante as fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Resultados que descrevemos nos momentos, a seguir:

6.2.1 Primeiro momento de aplicação

Iniciaremos a discussão, apresentando as orientações e procedimentos realizados na aplicação da atividade relativa a este momento. Nesta etapa, de aplicação, contamos com a presença de 07(sete) alunos, dos 09 (nove) regularmente matriculados na disciplina.

Desse modo, iniciamos a experimentação realizando uma apresentação da proposta de trabalho a ser seguida, destacando os objetivos da pesquisa e a metodologia de trabalho. Posteriormente a tal apresentação distribuímos um termo de consentimento aos alunos, de divulgação de suas produções e imagens em nossa pesquisa (ver anexo A). Após todas as assinaturas e recolhimento dos termos, pedimos aos alunos que formassem duplas; como no caso, sobraria um aluno no grupo, este decidiu fazer a atividade sozinha.

Dando seguimento, com os alunos organizados em grupos, distribuímos os protocolos da atividade 1 (ver apêndice T), orientando-os que procurassem interagir e solucionar as atividades nos grupos e qualquer dúvida ou questionamento fosse realizado ao professor/pesquisador. Estipulamos também, o tempo de aplicação da atividade, que foi previsto em uma hora e meia, tempo correspondente à aula; finalizamos as orientações preliminares realizando uma leitura compartilhada com os alunos da atividade a fim de esclarecer alguma dúvida inicial; após os devidos esclarecimentos solicitamos que iniciassem a solução da atividade.

Sobre o contexto da atividade proposta, esta teve como finalidade a apresentação da sequência de Fibonacci como modelo de resolução do problema dos coelhos; assim, como a possibilidade de extensão da sequência a índices inteiros, apresentando uma contextualização inicial do processo de generalização da sequência de Fibonacci.

A seguir, trazemos as observações e resultados coletados na experimentação durante os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização. Vale ressaltarmos sobre essas fases, que em algum momento, estas podem estar conectadas ou suprimidas; tal fato ocorre devido uma dificuldade de caracterização dos instantes de conexão ou ruptura entre elas nos momentos de aplicação das atividades.

Outro fato destacável, é o de não apresentarmos na discussão a seguir, os momentos de institucionalização; sendo estes retomados pelo professor/pesquisador, apenas na etapa de verificação ou refutação das hipóteses de trabalho; ou seja, de acordo com ED na validação.

Daremos continuidade apresentando os resultados relativos à aplicação da atividade 1, iniciando com a análise relativa ao item (a).

Nesse sentido referendados nas fases de ação e formulação da TSD, requisitamos aos alunos que a partir do esquema mnemônico proposto, obtivessem a sequência de Fibonacci, como modelo de interpretação da situação além de expressá-la de maneira explícita.

Como resultado constatamos que as duplas, em sua maioria, estabeleceram tal sequência, como a de Fibonacci; identificando ainda, seu aspecto recursivo, fato em destaque nas figuras 26 e 27, a seguir:

Figura 26 - Caracterização da sequência de Fibonacci, dupla 1, na fase de ação da TSD

1) Que sequência você relacionaria com a situação do nascimentos de casais de coelhos?
Explique suas escolhas.

É a sequência de Fibonacci, em que cada mês é a soma dos dois meses anteriores. Chegamos a essa conclusão usando o fato do coelho precisar amadurecer para procriar.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27 - Caracterização da sequência de Fibonacci, dupla 2

1) Que sequência você relacionaria com a situação do nascimentos de casais de coelhos?
Explique suas escolhas.

A sequência de Fibonacci, pois ela é dada por: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ onde os dois primeiros termos já estão pré estabelecidos ($a_1 = 1$, $a_2 = 1$) e os demais são a soma dos anteriores. Podemos perceber que tal escolha é valida, pois o casal de coelhos só podem procriar quando eles estão maduros, assim nos dois primeiros meses (a_1 e a_2) temos apenas um casal.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na fase de validação, requisitamos aos alunos que com base no problema dos coelhos obtivessem um modelo matemático da relação existente entre a unidade temporal n(meses), e as possíveis filiações a cada mês (f_n). Desta fase, é valido ressaltarmos a caracterização do modelo recursivo de Fibonacci, apresentado pela dupla 2.

Sendo uma interpretação mais elaborada do problema dos coelhos, no sentido de expressar um modelo matemático de obtenção da sequência, a partir do conhecimento dos seus antecessores. Tal modelo pode ser assinalado como a sequência generalizada de Fibonacci, recursiva ou implícita. Fato, que evidenciamos na figura 28, a seguir.

Figura 28 - Caracterização da lei de recorrência da sequência de Fibonacci, dupla 2

2) Indique uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo e, assim, sucessivamente. Podemos estabelecer uma relação que generalize esses resultados anteriores?

a_1 - primeiro termo

a_2 - segundo termo

a_3 - terceiro termo

⋮

a_n - n-ésimo termo.

Sim, podemos resumir fazendo $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n > 2$, → onde $n \in \mathbb{N}$, a fim de conseguir os demais termos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Dando prosseguimento, mostramos a análise do item (b). Desse modo, tomamos referência nas fases de ação, formulação e validação da TSD. Com isto, requisitamos aos alunos que tendo por base a lei de recorrência obtida no item (a), avaliassem a possibilidade de obtenção de $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$. E que, a partir de tal fato, percebessem a possibilidade de "alongarmos", "ampliarmos", "estendermos" a sequência de Fibonacci para índices inteiros.

Sobre tal perspectiva um dos membros da dupla 2, quando questionado sobre a possibilidade de extensão da sequência de Fibonacci, respondeu:

> [...] a surpresa foi que até então para os naturais eu já conhecia, agora quando chegou na terceira questão, e foi tratar em relação ao f_0, f_{-1} e f_{-2} pra mim não poderia acontecer, por que até onde eu conhecia a sequência de Fibonacci era só para números naturais[...] (Aluno)[3].

No excerto acima, o aluno demostra um desconhecimento da possibilidade de estendermos a sequência de Fibonacci a índices negativos; demostrando espanto sobre tal possibilidade, destacando ainda aspectos relativos à abordagem corriqueira dada a sequência, no caso, a de seu estudo com índices naturais.

Ainda sobre a possibilidade de extensão da sequência de Fibonacci destacamos os argumentos apresentados pela dupla 3, que discutem tal perspectiva a partir da lei de recorrência, extensão da sequência a índices inteiros, obtenção dos termos, além de uma possível nomenclatura. Vejamos:

---

[3] Dados da entrevista. Pesquisa de campo realizada no IFCE em 29 abr. de 2016.

Figura 29 - Nomenclatura sugerida pela dupla 3, para sequência estendida de Fibonacci

3) Com base na relação anterior, podemos avaliar os valores de $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$ Descreva esse conjunto numérico. Que nome ou terminologia podemos atribuir a sequência obtida?

Visto que, usando a lei de formação anterior, temos:

$a_2 = a_1 + a_0 \Rightarrow 1 = 1 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$a_1 = a_0 + a_{-1} \Rightarrow 1 = 0 + a_{-1} \Rightarrow a_{-1} = 1$

$a_0 = a_{-1} + a_{-2} \Rightarrow 0 = 1 + a_{-2} \Rightarrow a_{-2} = -1$

$a_{-1} = a_{-2} + a_{-3} \Rightarrow 1 = -1 + a_{-3} \Rightarrow a_{-3} = 2$

$a_{-2} = a_{-3} + a_{-4} \Rightarrow -1 = 2 + a_{-4} \Rightarrow a_{-4} = -3$

$a_{-3} = a_{-4} + a_{-5} \Rightarrow 2 = -3 + a_{-5} \Rightarrow a_{-5} = 5$

$a_{-4} = a_{-5} + a_{-6} \Rightarrow -3 = 5 + a_{-6} \Rightarrow a_{-6} = -8$

O conjunto numérico é: $\{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, \ldots\}$ onde $|a_n| = |a_{-n}|$.

Veja que se $|n|$ é ímpar, então a_n é positivo

Além disso, se $|n|$ é par, então a_n é negativo

Que seria uma sequência oscilatória de Fibonacci.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa mesma perspectiva de obtenção através da sua extensão, da sequência de Fibonacci a índices inteiros, é valido apresentarmos os argumentos das duplas 2 e 4; enfatizando suas nomeações do modelo estendido de Fibonacci, nomeado como “sequência variante de Fibonacci”. Nomenclatura possivelmente sugerida, devido à observação da alternância de sinal dos números de Fibonacci, ocorrida no modelo estendido. Observações que trazemos a seguir:

Figura 30 - Nomenclatura sugerida pela dupla 2, para sequência estendida de Fibonacci

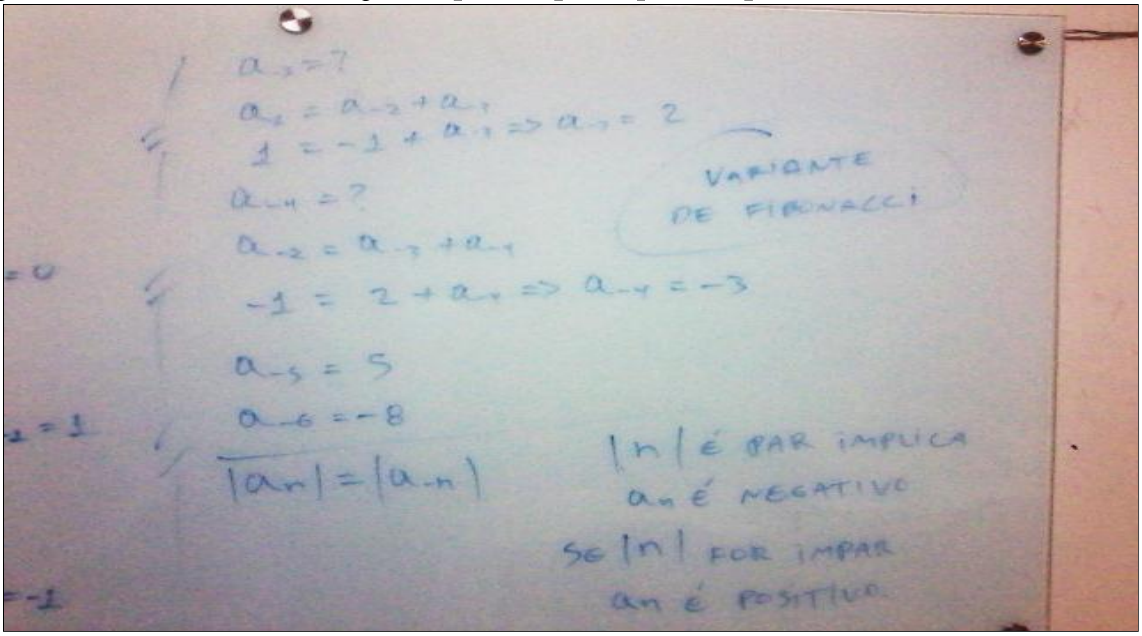
Como podemos observar nos cálculos ao lado, a sequência continua a ser disposta do mesmo modo, entretanto quando o módulo do índice a é ímpar. o resultado é positivo e quando o módulo do índice a é par o resultado é negativo, assim temos: $\{\ldots, 3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3 \ldots\}$.

Podemos dizer agora, que tal sequência vale para os negativos (abstraindo do problema 1), assim $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Não tirando a glória de Fibonacci, nomearei a sequência como: sequência variante de Fibonacci.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 31 - Nomenclatura sugerida pela dupla 4, para sequência estendida de Fibonacci



Fonte: Fotos do autor.

6.2.2 Segundo momento de aplicação

Sobre este momento da experimentação contamos com a presença de apenas 04(quatro) alunos dos 09(nove) matriculados na disciplina. Inicialmente solicitamos aos alunos que formassem duplas. Prosseguindo, informamos que o procedimento de trabalho, em termos de tempo de execução e interações nos grupos, seriam semelhantes ao do primeiro momento de aplicação.

O fato inédito, em termos de procedimento, foi que, antes dos alunos solucionarem a atividade 2 (ver apêndice U), realizamos um momento de retomada e discussão dos conceitos e formulações vistos na atividade 1.Tal procedimento foi necessário a fim de estabelecermos relações entre os resultados da atividade anterior e os que seriam discutidos na atividade 2.

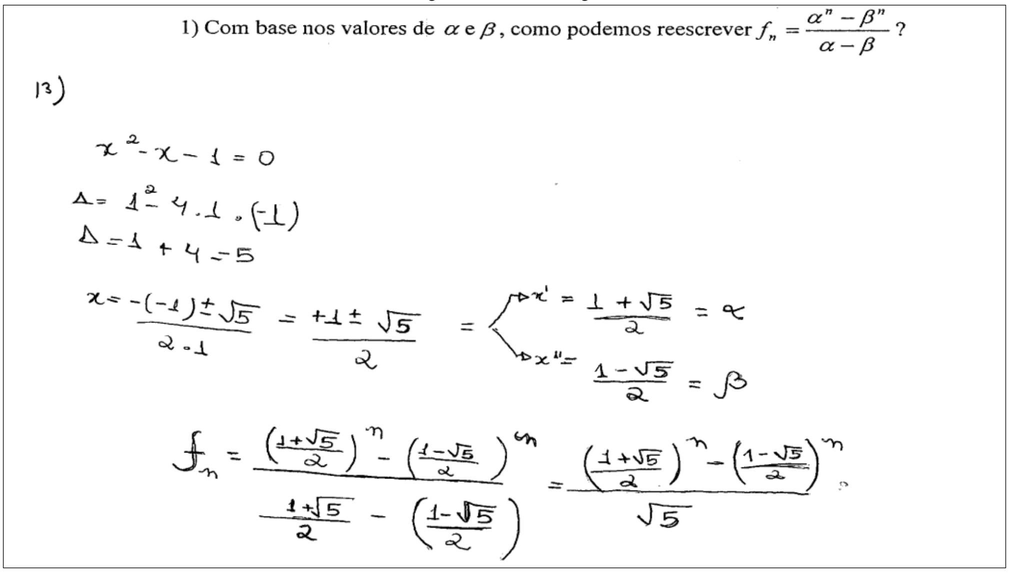
Sobre a atividade proposta destacamos que teve como finalidade a discussão do modelo de generalização da sequência de Fibonacci, não mais recursivo e sim explícito; no caso a fórmula de Binet. Resultados que apresentamos, a seguir:

Iniciaremos a discussão trazendo as observações na fase de ação, que como requisitamos, o aluno deveria tomando por base o contexto apresentado por Huntley (1985) perceber a possibilidade de obtenção do termo geral da sequência de Fibonacci, tornando-a não mais recursiva como os argumentos estabelecidos na atividade 1.

Sobre tal perspectiva, observamos que os alunos tiveram uma compreensão adequada da situação, não apresentando, dúvidas ou questionamentos, que implicassem numa não resolução da atividade.

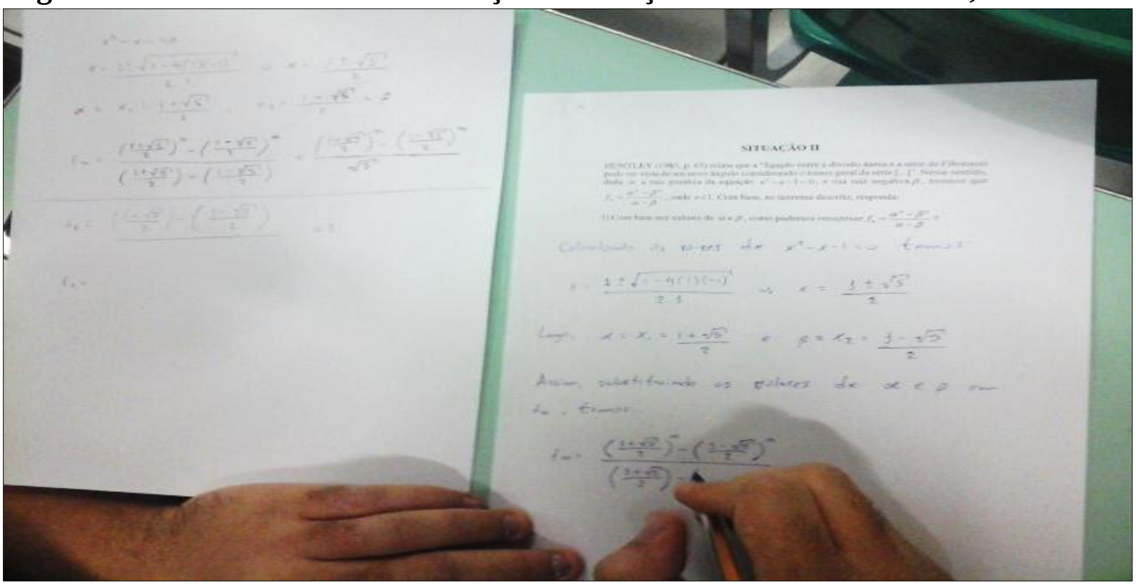
Dando seguimento, passamos a discutir os argumentos da fase de formulação, que não apresentou dificuldades por parte dos alunos em termos de compreensão dos procedimentos necessários a resolução da atividade. Desse modo, os alunos conseguiram caracterizar a fórmula de Binet, tendo por base as raízes da equação quadrática e o modelo de generalização da sequência de Fibonacci, sugerido. Como destacamos nas figuras 32 e 33 a seguir.

Figura 32 - Procedimento de resolução e obtenção da fórmula de Binet, do aluno 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33 - Procedimento de resolução e obtenção da fórmula de Binet, do aluno 3



Fonte: Fotos do autor.

Dando prosseguimento, na fase de validação, solicitamos aos alunos que realizassem alguns cálculos com a formulação anterior e caracterizassem seus resultados como a sequência de Fibonacci. Sobre as observações realizadas em sala de aula, destacamos que os alunos conseguiram de maneira satisfatória a partir da formulação obtida no item anterior, realizar tal caracterização, como mostramos nas figuras 34 e 35, a seguir:

Figura 34 - Caracterização do aluno 2, sobre os resultados obtidos da utilização da formulação de Binet

Percebemos que $f_1 = 1$ $f_2 = 1$; $f_3 = 2$ ..., portanto $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ para $n \geq 1$, segue uma sequência e essa sequência é a de Fibonacci.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 35 - Caracterização do aluno 3, sobre os resultados na formulação de Binet

COM BASE NOS RESULTADOS OBTIDOS, TEMOS $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ e $f_4 = 3$. ASSIM, concluímos que para $n \geq 1$ os valores de $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ são tais que obedecem a sequência de Fibonacci.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda sobre a possibilidade de obtenção direta da sequência de Fibonacci na formulação obtida, é válido apresentarmos os argumentos do aluno 3 , que destaca:

> [...] no problema dois é que é interessante, você percebe que a divisão áurea obedece a sequência de Fibonacci, a partir do momento em que você vai fazer o n variar no conjunto, n maior que um, n natural , você consegue perceber que vai surgindo a sequência de Fibonacci 1,1,2,3 e por aí vai [...] (Aluno)[4].

No excerto anterior, percebemos a surpresa do aluno quando identificou que a formulação construída por ele no item anterior permite a obtenção direta dos números de Fibonacci sem a necessidade da recursividade, somente da atribuição de valores para n.

[4] Dados da entrevista. Pesquisa de campo realizada no IFCE em 03 mai. 2016.

6.2.3 Terceiro momento de aplicação

Sobre esta etapa da experimentação, contamos com a presença de 07 (sete) alunos, dos 09 (nove) matriculados na disciplina. Continuando, dividimos a sala em 3 (três) duplas, e um aluno resolveu realizar a atividade sozinho; quanto ao tempo de execução, continuou sendo de uma hora e meia; e em relação aos procedimentos metodológicos, seguimos os mesmos passos do segundo momento.

Com isto, inicialmente retomamos alguns resultados discutidos nos momentos anteriores tais como: os modelos de generalização implícita e explicita da sequência de Fibonacci. Sobre a atividade 3 (ver apêndice V), esta teve por finalidade a discussão do modelo de extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros a partir da fórmula de Binet. A seguir apresentamos as observações realizadas, em suas respectivas fases:

Na fase de ação observamos que os alunos sentiram alguma dificuldade, no entendimento inicial das questões, não percebendo, que a solução era apenas atribuir valores para n na formulação proposta; nesse sentido, tivemos que orientá-los de acordo com o que a situação requisitava.

Posteriormente às orientações realizadas na fase de formulação, percebemos que os alunos conseguiram a partir da atribuição de valores para n, na propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} . f_n$ obterem alguns resultados, já conhecidos. Caracterização que mostramos nas figuras 36 e 37.

Figura 36-Caracterização da propriedade, da dupla 3.

Podemos determinar os outros termos da sequência de termo geral $f_{-n} = (-1)^{n+1} . f_n$, baseado na sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) que é a sequência de Fibonacci:

$f_{-2} = (-1)^{2+1} . f_2 \Rightarrow f_{-2} = (-1)^3 . 1 \Rightarrow f_{-2} = -1$

$f_{-3} = (-1)^{3+1} . f_3 \Rightarrow f_{-3} = (-1)^4 . 2 \Rightarrow f_{-3} = 2$

$f_{-4} = (-1)^{4+1} . f_4 \Rightarrow f_{-4} = (-1)^5 . 3 \Rightarrow f_{-4} = -3$

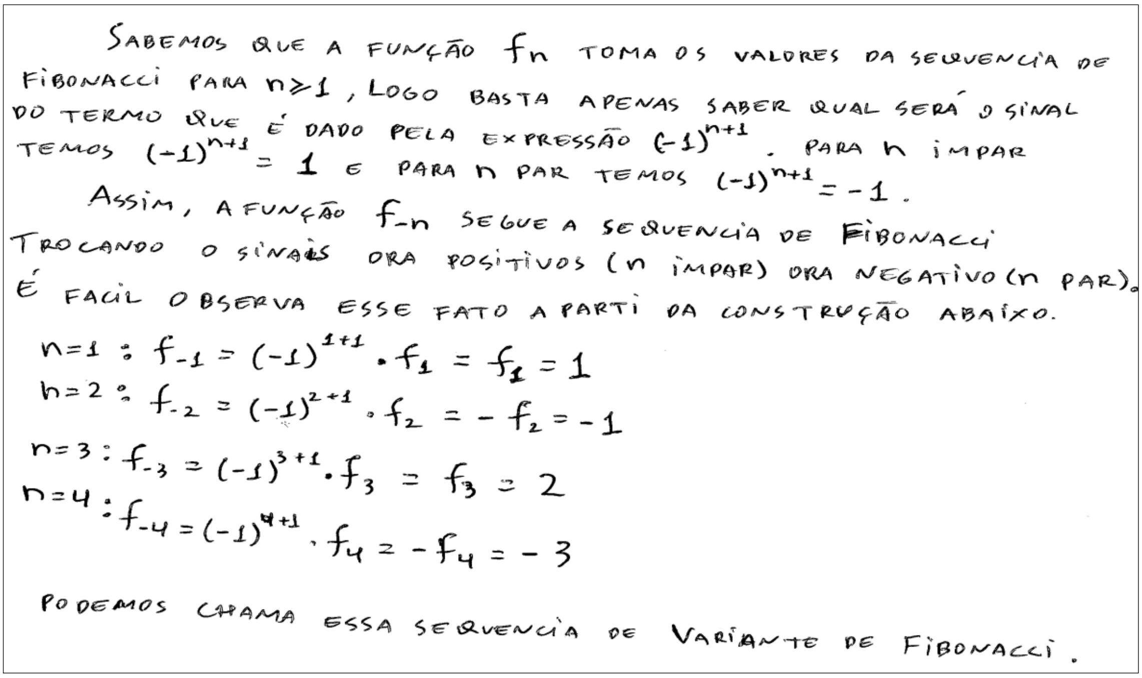
Veja que quando n é ímpar temos que $f_{-n} = f_n$ e quando n é par temos $f_{-n} = f_n$. Assim, vemos que essa nova sequência nos dá os termos da sequência de fibonacci com a ocorrência de números que são simétricos de alguns outros termos.

Podemos entender essa sequência como sendo uma conjectura para a sequência de fibonacci para índices inteiros, ou seja, $n \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura acima, observamos o trecho envolvendo a produção de conjecturas relacionadas com a identificação, por parte dos alunos, que a sequência com índices inteiros apresenta propriedades semelhantes com a sequência original. Além disso, na figura 37, identificamos na formulação, a atividade incipiente de etiquetar o nome do objeto, quando a dupla 1, atribuiu o nome de "sequência variante". Tais elementos, criam um clima semelhante ao de investigação do matemático profissional, que descobre propriedades e nomeia os objetos, tendo em vista a sistematização das ideias.

Figura 37-Caracterização da propriedade, da dupla 1, ao decurso da fase de formulação da TSD.



SABEMOS QUE A FUNÇÃO f_n TOMA OS VALORES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI PARA $n \geq 1$, LOGO BASTA APENAS SABER QUAL SERÁ O SINAL DO TERMO QUE É DADO PELA EXPRESSÃO $(-1)^{n+1}$. PARA n ÍMPAR TEMOS $(-1)^{n+1} = 1$ E PARA n PAR TEMOS $(-1)^{n+1} = -1$.

ASSIM, A FUNÇÃO f_{-n} SEGUE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI TROCANDO O SINAIS ORA POSITIVOS (n ÍMPAR) ORA NEGATIVO (n PAR). É FÁCIL OBSERVA ESSE FATO A PARTI DA CONSTRUÇÃO ABAIXO.

$n=1$: $f_{-1} = (-1)^{1+1} \cdot f_1 = f_1 = 1$

$n=2$: $f_{-2} = (-1)^{2+1} \cdot f_2 = -f_2 = -1$

$n=3$: $f_{-3} = (-1)^{3+1} \cdot f_3 = f_3 = 2$

$n=4$: $f_{-4} = (-1)^{4+1} \cdot f_4 = -f_4 = -3$

PODEMOS CHAMA ESSA SEQUÊNCIA DE VARIANTE DE FIBONACCI.

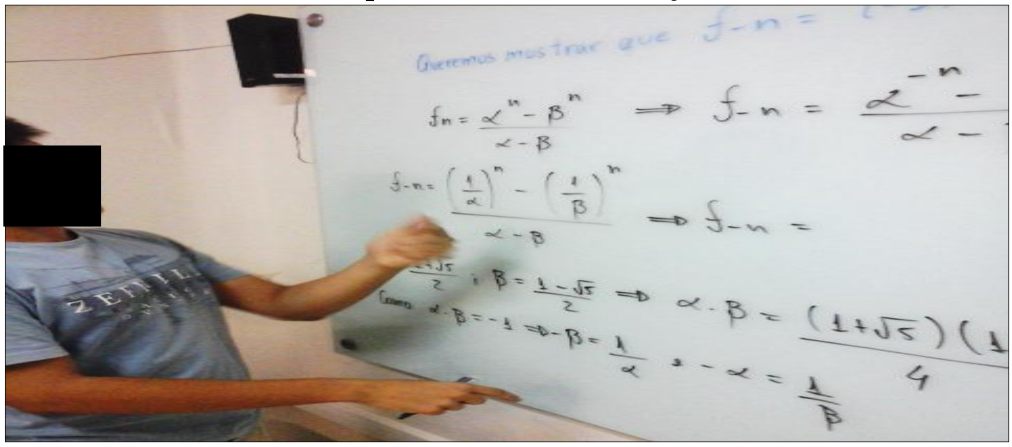
Fonte: Dados da pesquisa.

Notemos que na caracterização da propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, as duplas apresentaram argumentos relativos à possibilidade de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros; tal como, a partir da observação dos resultados, nomearem a sequência como "sequência de Fibonacci para índices inteiros" e "sequência variante de Fibonacci", resultados já discutidos, na atividade 1.

Prosseguindo, apresentamos as observações relativas à fase de validação, na qual solicitamos aos alunos que caracterizassem matematicamente a relação $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, através de uma prova/demonstração, com um modelo já conhecido, a fórmula de Binet.

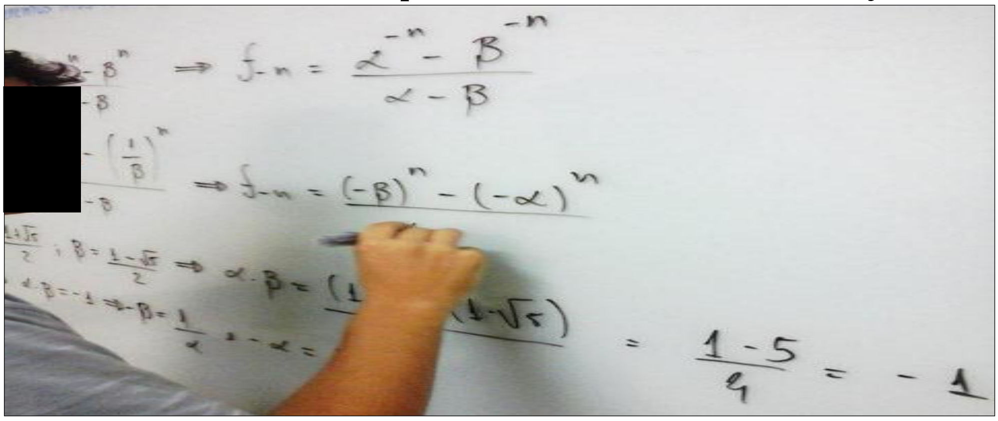
A partir do modelo proposto, um dos membros da dupla 3 demonstrou a formulação requisitada, partindo do modelo de Binet, destacado na sequência de figuras a seguir.

Figura 38-Introdução da demonstração da propriedade de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros, da dupla 3 na fase de validação da TSD



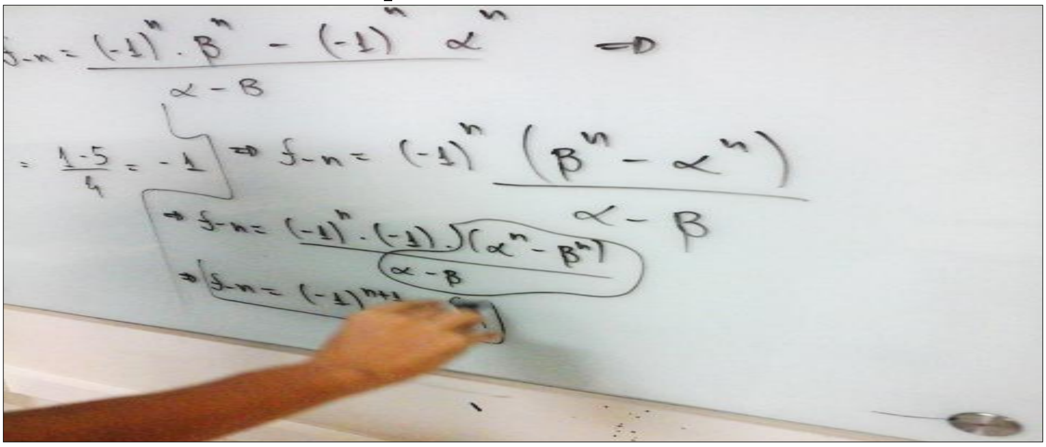
Fonte: Fotos do autor.

Figura 39- Desenvolvimento da demonstração da propriedade de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros, da dupla 3, ao decurso da fase de validação da TSD.



Fonte: Fotos do autor.

Figura 40-Conclusão da demonstração da propriedade de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros, da dupla 3.



Fonte: Fotos do autor.

Ainda nessa perspectiva de validação da fórmula de Binet nos inteiros, é valido apresentar os argumentos da dupla 2, que trazem uma demonstração caracterizando todos os passos em consonância com a demonstração discutida em Hoggat (1969).

Figura 41 - Demonstração da fórmula de Binet para índices inteiros, dupla 2

2) Com base nos argumentos anteriores, podemos estabelecer uma demonstração para $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$?

USANDO A FORMULAR DE BINET E SABENDO QUE $\alpha \cdot \beta = -1$, TEMOS

$$f_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{1/\alpha^n - 1/\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1/\alpha^n}{\alpha - \beta} - \frac{1/\beta^n}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n(\alpha - \beta)} - \frac{1}{\beta^n(\alpha - \beta)} = \frac{\beta^n(\alpha - \beta) - \alpha^n(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2 \alpha^n \cdot \beta^n} = \frac{(\alpha - \beta)(\beta^n - \alpha^n)}{(\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha \cdot \beta)^n} =$$

$$= \frac{-1(\alpha^n - \beta^n)}{(-1)^n \cdot (\alpha - \beta)} = \frac{-1}{(-1)^n} \cdot \overbrace{\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}}^{f_n}$$

ANALISANDO A EXPRESSÃO $\frac{-1}{(-1)^n}$, TEMOS,

PARA n PAR $\frac{-1}{(-1)^n} = -1$ E PARA n ÍMPAR $\frac{-1}{(-1)^n} = 1$

LOGO, PODEMOS REESCREVER ESSA EXPRESSÃO COMO $(-1)^{n+1}$, QUE UNIR OS CASOS ANTERIORES.

DAÍ, TEMOS

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n \; //$$

Fonte: Dados da pesquisa.

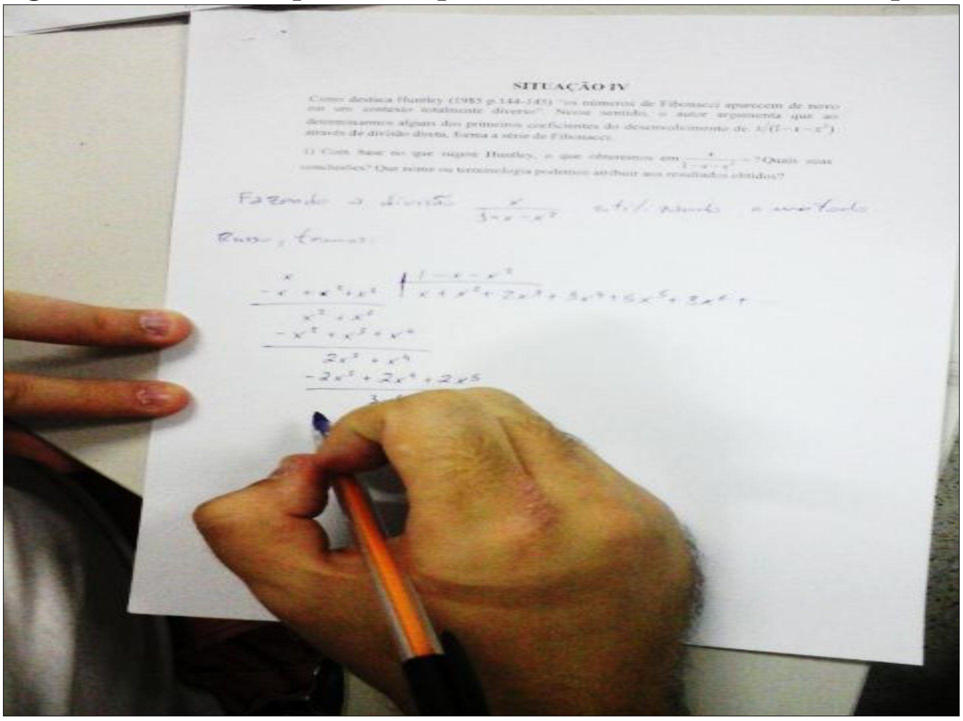
Desse modo, notemos que a partir da demonstração discutida anteriormente, a dupla conseguiu, a partir da fórmula de Binet, estabelecer as relações dessa propriedade como modelo de prova/demonstração da extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros.

6.2.4 Quarto momento de aplicação

Finalizando, apresentamos as observações relativas à atividade 4. Na experimentação contamos com a presença de 07 (sete) alunos dos 09 (nove) regulamente matriculados na disciplina. Quanto aos procedimentos necessários a resolução da atividade pelos alunos, seguimos as mesmas orientações de organização e execução dos momentos anteriores. Sobre a atividade 4 (ver apêndice W), é válido destacarmos que esta teve como finalidade a caracterização da sequência de Fibonacci em outros contextos matemáticos; no caso, as funções geradoras. Desse modo, os argumentos descritos a seguir são relativos às observações da questão 1, da atividade 4.

Na fase de ação esperávamos que os alunos a partir da leitura do contexto discutido por Huntley (1985), fossem capazes de perceber que inicialmente deveriam realizar a divisão dos polinômios $\frac{x}{1-x-x^2}$, pelo método da divisão direta; fato que já deveriam ter conhecimento. No entanto, observamos que os alunos inicialmente não conseguiam agir sobre a questão, devido acharem impossível a divisão de um polinômio que apresentasse no numerador um grau menor do que o apresentado no denominador. Assim, tivemos que orientá-los a realizarem o procedimento de divisão de polinômios através do método que eles tinham conhecimento no caso, "o método da divisão direta", sendo tal procedimento suficiente ao encontro dos resultados esperados. Procedimento que caracterizamos na figura 42, a seguir:

Figura 42-Divisão do polinômio pelo método da divisão direta, dupla 1.



Fonte: Fotos do autor.

Na fase de formulação, depois de superadas as dificuldades de compreensão da situação e das devidas orientações; no transcorrer da atividade observamos que os alunos nos seus respectivos grupos conseguiram formular soluções a questão, tendo como fundamento a divisão direta dos polinômios. Como mostramos nas figuras 43 e 44, a seguir:

Figura 43-Divisão do polinômio pelo método da divisão direta, dupla 1.

Fazendo a divisão $\frac{x}{1-x-x^2}$ utilizando o método Russo, temos:

$$
\begin{array}{l|l}
x & 1-x-x^2 \\
\underline{-x+x^2+x^3} & x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+\dots \\
x^2+x^3 & \\
\underline{-x^2+x^3+x^4} & \\
2x^3+x^4 & \\
\underline{-2x^3+2x^4+2x^5} & \\
3x^4+2x^5 & \\
\underline{-3x+3x^5+3x^6} & \\
5x^5+3x^6 & \\
\underline{-5x^5+5x^6+5x^7} & \\
8x^6+5x^7 & \\
\underline{-8x^6+8x^7+8x^3} & \\
13x^7+8x^8 &
\end{array}
$$

Divisão de Fibonacci.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 44 - Divisão do polinômio pelo método da divisão direta, dupla 2.

$$
\begin{array}{l|l}
x & 1-x-x^2 \\
\underline{-x+x^2+x^3} & \underbrace{x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5\dots}_{P(x)} \\
0+x^2+x^3 & \\
\underline{-x^2+x^3+x^4} & \\
0+2x^3+x^4 & \\
\underline{-2x^3+2x^4+2x^5} & \\
0+3x^4+2x^5 & \\
\underline{-3x^4+3x^5+3x^6} & \\
0+5x^5+3x^6 & \\
\underline{-5x^5+5x^6+5x^7} & \\
0+8x^6+5x^7 &
\end{array}
$$

PELA DIVISÃO DIRETA DE $\frac{x}{1-x-x^2}$ OBTEMOS O POLINOMIO $P(x)$ E OS COEFICIENTE DESSE POLINOMIO É DADO PELA SEQUENCIA DE FIBONACCI.

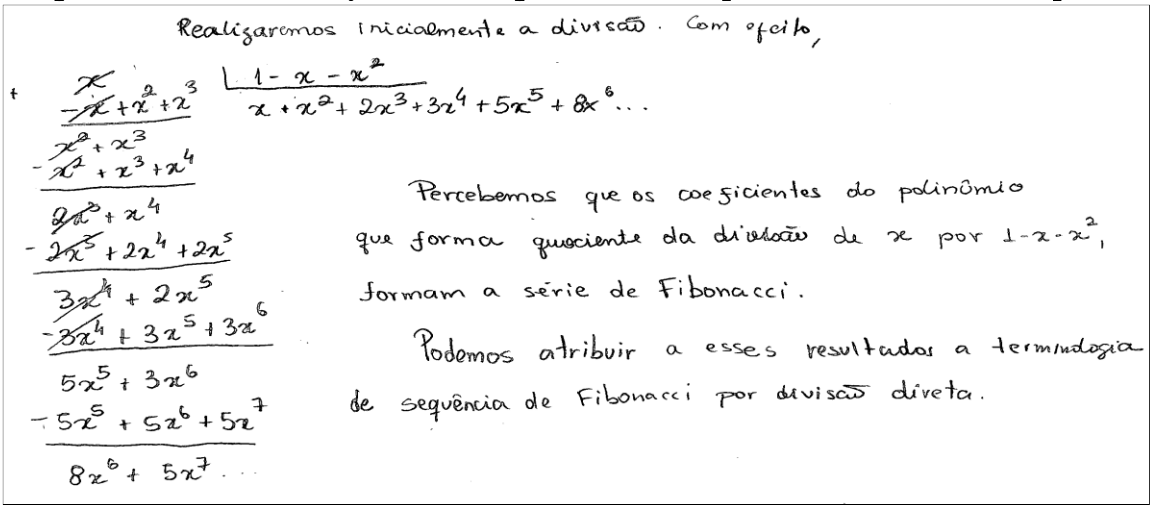
SE $P(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ ENTÃO OS COEFICIENTES a_i É DADO POR $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. PODEMOS CHAMA ESSE POLINÔMIO $P(x)$ DE POLINÔMIO DE FIBONACCI.

Fonte: Dados da pesquisa.

Notemos que nos protocolos anteriores, os alunos além de solucionarem a questão pela divisão direta, sugerem nomenclaturas aos resultados obtidos, nomeando-os como uma divisão de Fibonacci. Na figura 43, além de relacionarem com propriedades já estudadas em outros momentos, tipo a lei de formação da sequência de Fibonacci, como na figura 44.

Na fase da validação, notemos que além da obtenção do resultado devido pela divisão dos polinômios, os alunos conseguiram caracterizar que a série obtida tinha relação intrínseca com a sequência de Fibonacci, estabelecendo relações com elementos já discutidos em momentos anteriores. Como apresentamos a seguir:

Figura 45 - Caracterização da série geradora da sequência de Fibonacci, dupla 1.



Realizaremos inicialmente a divisão. Com efeito,

$$\begin{array}{l|l} x & 1 - x - x^2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x} + x^2 + x^3 & x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 \ldots \\ \hline x^2 + x^3 & \\ -\cancel{x^2} + x^3 + x^4 & \\ \hline 2x^3 + x^4 & \\ -\cancel{2x^3} + 2x^4 + 2x^5 & \\ \hline 3x^4 + 2x^5 & \\ -\cancel{3x^4} + 3x^5 + 3x^6 & \\ \hline 5x^5 + 3x^6 & \\ -5x^5 + 5x^6 + 5x^7 & \\ \hline 8x^6 + 5x^7 \ldots & \end{array}$$

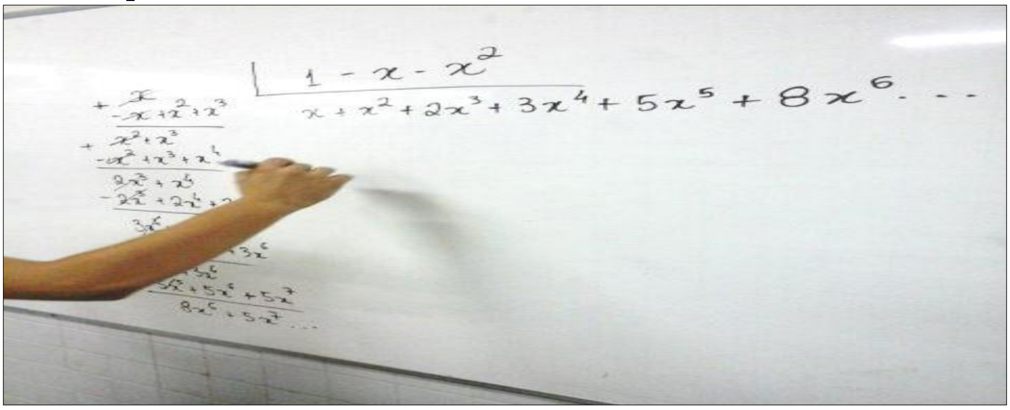
Percebemos que os coeficientes do polinômio que forma quociente da divisão de x por $1-x-x^2$, formam a série de Fibonacci.

Podemos atribuir a esses resultados a terminologia de sequência de Fibonacci por divisão direta.

Fonte: Dados da pesquisa.

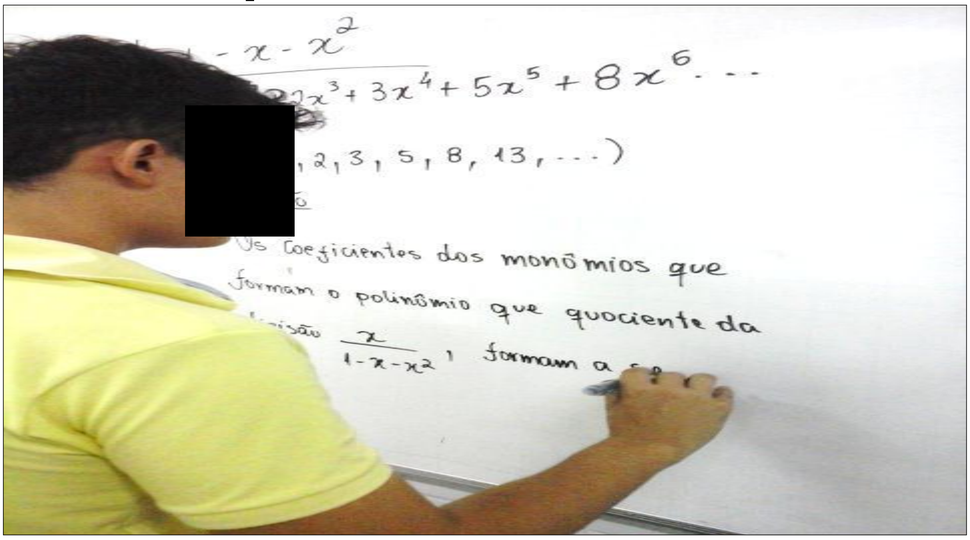
Dando continuidade, mostramos a divisão do polinômio realizada pela dupla 2 durante a validação. Tendo como resultado uma série de potências, em que os coeficientes formam a sequência de Fibonacci. Caracterização em destaque na sequência a seguir:

Figura 46 - Introdução a caracterização do polinômio, como a série que gera a sequência de Fibonacci, dupla 2



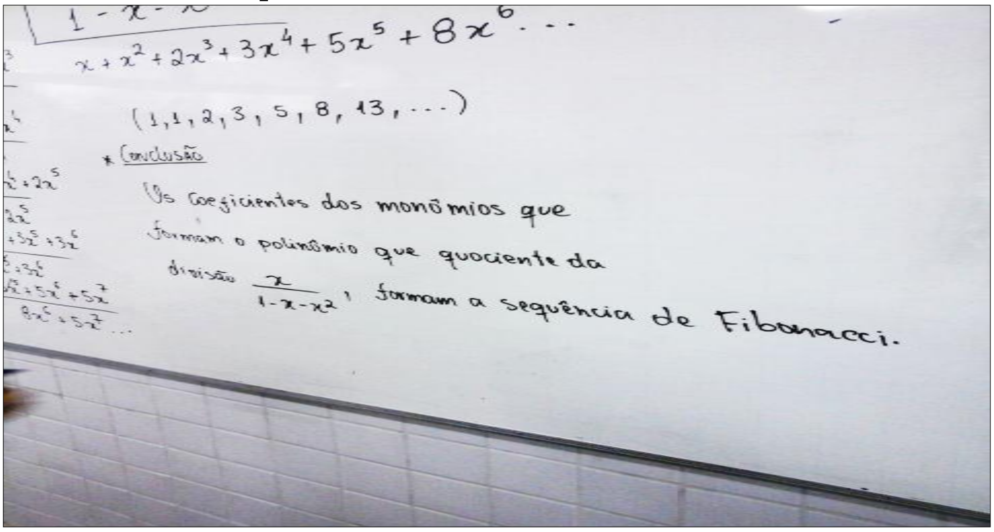
Fonte: Fotos do autor.

Figura 47 - Desenvolvimento da caracterização do polinômio, como a série que gera a sequência de Fibonacci, dupla 2



Fonte: Fotos do autor.

Figura 48 - Conclusão da caracterização do polinômio, como a série que gera a sequência de Fibonacci, dupla 2



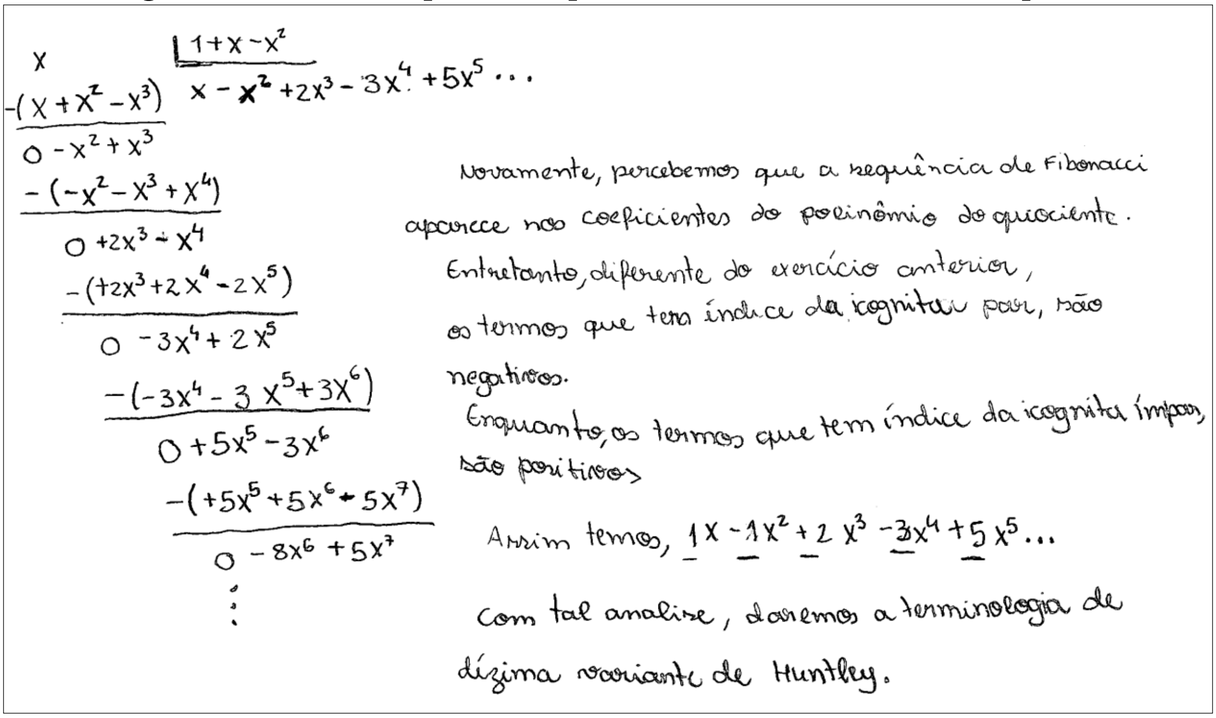
Fonte: Fotos do autor.

Dando seguimento, apresentamos as observações relativas à questão 2, do quarto momento. Assim destacamos que:

Na fase de ação, como a resolução do item, tinha uma relação de similaridade com os procedimentos da questão 1. Nesse sentido, percebemos que os alunos resolveram o item sem nenhuma dificuldade conseguindo as caracterizações devidas.

Na fase de formulação, os alunos ao realizarem a divisão direta, agora, do polinômio $\frac{x}{1+x-x^2}$ conseguiram formular soluções esperadas. Estabelecendo nomenclaturas e relações com resultados, já discutidos, em outros momentos. Como destacamos, nas figuras 49 e 50, apresentadas a seguir:

Figura 49 - Divisão do polinômio pelo método da divisão direta, dupla 1.



$x \quad | \; 1 + x - x^2$

$-(x + x^2 - x^3) \qquad x - x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^5 \ldots$

$0 - x^2 + x^3$

$-(-x^2 - x^3 + x^4)$

$0 + 2x^3 - x^4$

$-(+2x^3 + 2x^4 - 2x^5)$

$0 - 3x^4 + 2x^5$

$-(-3x^4 - 3x^5 + 3x^6)$

$0 + 5x^5 - 3x^6$

$-(+5x^5 + 5x^6 - 5x^7)$

$0 - 8x^6 + 5x^7$

$\vdots$

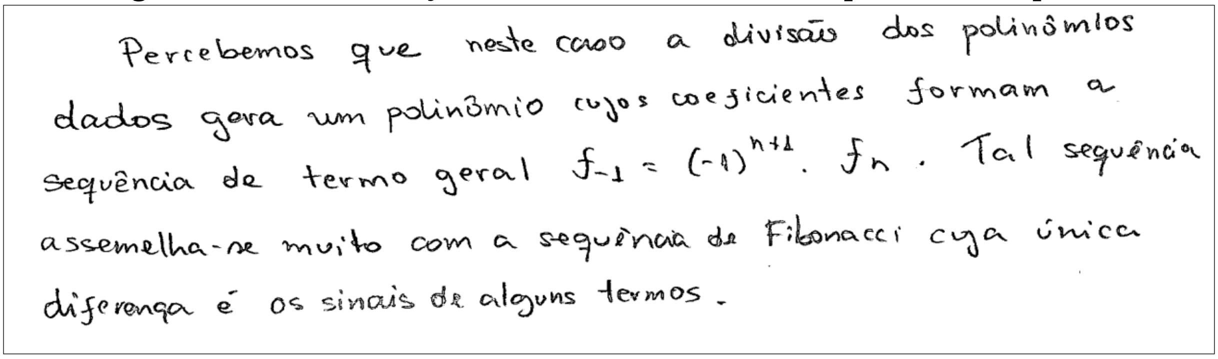
Novamente, percebemos que a sequência de Fibonacci aparece nos coeficientes do polinômio do quociente. Entretanto, diferente do exercício anterior, os termos que tem índice da icognita par, são negativos. Enquanto, os termos que tem índice da icognita ímpar, são positivos

Assim temos, $\underline{1}x \underline{-1}x^2 \underline{+2}x^3 \underline{-3}x^4 \underline{+5}x^5 \ldots$

Com tal analise, daremos a terminologia de dízima variante de Huntley.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 50 - Caracterização do resultado da divisão do polinômio, dupla 2.

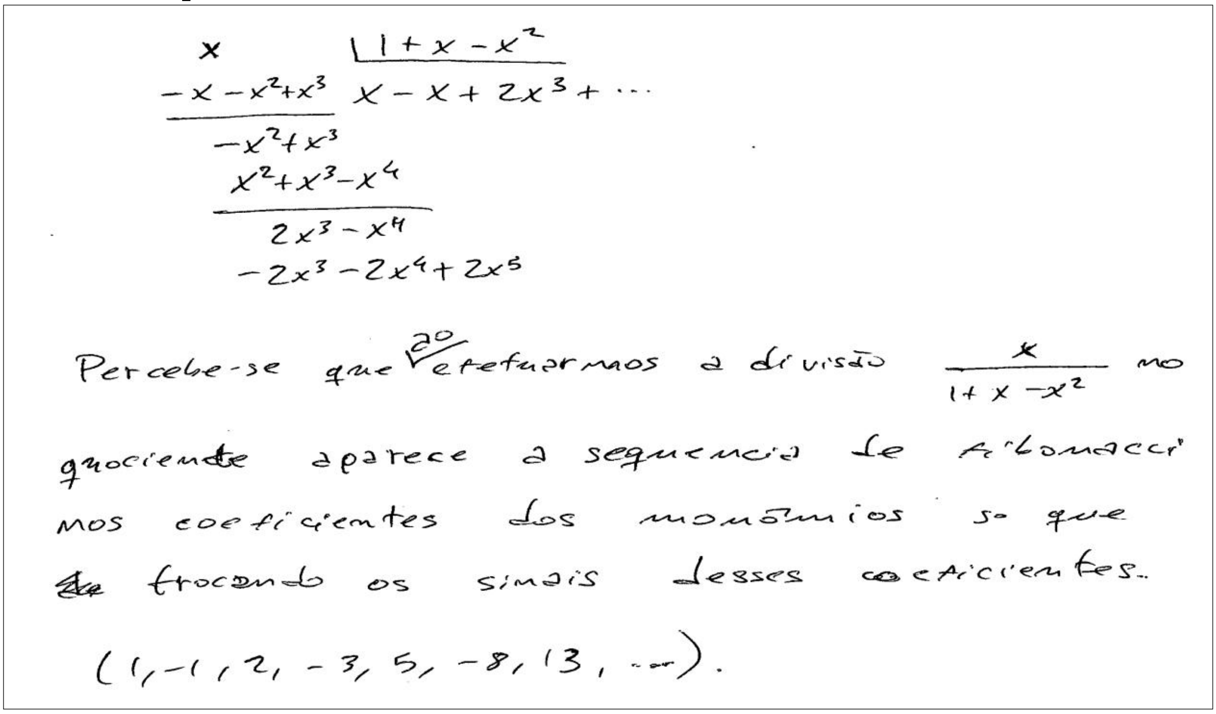


Percebemos que neste caso a divisão dos polinômios dados gera um polinômio cujos coeficientes formam a sequência de termo geral $f_{-1} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$. Tal sequência assemelha-se muito com a sequência de Fibonacci cuja única diferença é os sinais de alguns termos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na fase de validação, observamos que os grupos conseguiram caracterizar o resultado da divisão de $\dfrac{x}{1+x-x^2}$, sendo este a sequência de Fibonacci estendida a índices inteiros, como apresentamos, na figura 51, a seguir:

Figura 51 - Caracterização da divisão do polinômio que gera a sequência de Fibonacci estendida, dupla 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta seção, destacamos o conjunto de observações e resultados relativos aos quatro momentos de aplicação, elementos que foram organizadas com fins a sua análise e avaliação posterior, discussão que apresentamos a seguir:

6.3 Análise a posteriori e validação do estudo

Nestas etapas da ED devemos, fundamentados no conjunto de observações e resultados constituídos, realizarmos o confronto entre as hipóteses levantadas e a atividade prática, a fim de realizarmos uma análise sobre a reprodutividade ou não da engenharia proposta. Além de levantarmos possíveis questionamentos voltados à futuras pesquisas. Tal processo ocorre mediante a verificação, reformulação ou mesmo refutação da(s) hipótese (s) levantadas, e dos argumentos construídos durante o processo de validação interna da engenharia. Na visão de Laborde (1997), além das considerações anteriores, e num contexto mais específico:

> A validação interna, surge do método da engenharia como dito anteriormente, é frequentemente confundida ou integrada com o que se passou, descrição que alguns autores chamam de crônica da classe. Ela é predominantemente colocada a efeito em relação às condutas observadas dos alunos e do professor, do que o retorno à escolha das concepções e a análise a priori. (LABORDE, 1997, p. 104, tradução nossa).

Assim, numa perspectiva semelhante à Laborde (1997) iremos realizar um retorno às concepções motivadoras e a análise a priori, confrontando tais elementos com nossas observações e resultados, a fim de caracterizarmos o alcance ou não dos objetivos traçados e uma possível resposta a questão central de acordo com os objetivos.

Antes de apresentarmos tais perspectivas e resultados, a seguir trazemos as observações e caracterizações da pesquisa, de acordo com suas etapas de: análise preliminar; concepção e análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação, de acordo com a ED em associação com TSD, como metodologias de pesquisa e estudo.

Na etapa de análise preliminar, ao realizarmos o estudo bibliográfico sobre a sequência de Fibonacci numa perspectiva matemática, evidenciamos um recorte do processo de origem, evolução e generalização de propriedades do modelo de Fibonacci. Além de destacarmos a fórmula de Binet como esse modelo de generalização e extensão. Desse modo, podemos caracterizar o alcance dos dois primeiros objetivos específicos da pesquisa relativos à análise do desenvolvimento matemático de generalização da SF e da fórmula de Binet.

Dando continuidade, na concepção e análise a priori, referendados no estudo da etapa anterior, donde podemos evidenciar um conjunto de relações entre a sequência de Fibonacci e outros conteúdos matemáticos. Com isto, realizamos uma fundamentação e caracterização, que foram primordiais na elaboração das situações didáticas, no levantamento de algumas hipóteses de trabalho e nas definições dos momentos de aplicação das situações estruturadas.

Nesse sentido, podemos afirmar que o terceiro objetivo específico relativo à descrição de situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci foi satisfatoriamente alcançado. Além de nos proporcionar toda estruturação à etapa de experimentação que destacaremos a seguir:

Na experimentação, tivemos como referência à aplicação das atividades propostas e obtenção dos resultados os momentos de: ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Posteriormente aos momentos de experimentação, realizamos um processo de organização e análise das informações coletadas, constituindo a análise a posteriori. Sobre estes resultados, a seguir realizamos suas caracterizações de acordo com cada atividade.

Relativo à atividade 1, destacamos que os alunos pesquisados conseguiram a partir do esquema da situação (ver apêndice T), relacioná-la com a sequência de Fibonacci, destacando sua propriedade de recorrência através de alguns modelos implícitos, originários da solução do problema dos coelhos.

Sobre a possibilidade de extensão da sequência a índices inteiros, destacamos que os alunos, a partir do modelo descrito no item anterior, conseguiram realizar a extensão da sequência, fato desconhecido dos alunos, que mesmo surpresos, apresentaram algumas nomeações aos seus resultados. Nomeações como: sequência variante de Fibonacci, sequência oscilatória de Fibonacci, foram termos destacados, numa alusão à possibilidade de alongarmos, estendermos, ampliarmos a SF aos inteiros; possibilitando discussões relativas aos modelos constituídos. Nesse sentido, os aspectos apresentados demonstram o alcance da hipótese suscitada na atividade 1.

Relativo à atividade 2, podemos caracterizar que os alunos, a partir do contexto proposto (ver apêndice U), conseguiram a formulação do termo geral para a SF, a fórmula de Binet; e que, a partir da realização de alguns cálculos com tal formulação, conseguiram perceber a utilidade da mesma, fundamentada numa não recursividade, e sim, numa obtenção explícita da SF. Tais aspectos demonstram o alcance da hipótese relativa a atividade 2.

Relativa à atividade 3, podemos caracterizar, que os alunos conseguiram a partir do contexto proposto (ver apêndice V), estudar de maneira satisfatória, a propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, caracterizando-a como a fórmula de Binet, estendida aos inteiros. Outro aspecto destacável dos resultados é que os alunos conseguiram relacionar tal modelo com as relações de recorrência implícitas e explícitas da SF, discutidas nas atividades anteriores. Assim, as nomeações de sequência variante, sequência oscilatória, bem como de sequência de Fibonacci estendida aos inteiros, tomaram novamente destaque.

Quanto, à prova/demonstração da propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, a partir da fórmula de Binet, destacamos que os alunos apresentaram alguma dificuldade. Nesse sentido, realizamos algumas intervenções e orientações aos alunos. Posteriormente, percebemos que os alunos apresentaram de maneira satisfatória os resultados que caracterizavam uma prova/demonstração da referida relação. Assim, destacamos o alcance parcial da hipótese relativa, a atividade 3.

Relativo à atividade 4, podemos caracterizar que os alunos conseguiram obter a sequência de Fibonacci a partir do contexto da atividade (ver apêndice W) que discutia a obtenção da sequência, através da divisão direta dos polinômios discutidos. Sobre a resolução da situação, esperávamos que os alunos a realizassem de maneira direta, sem nenhuma orientação do professor/pesquisador, principalmente no tocante à divisão de polinômios.

No entanto, tal fato não ocorreu. Tivemos que intervir e realizar algumas orientações prévias. Posteriormente, as intervenções, constatamos que os alunos ao realizarem as divisões devidas, perceberam a relação dos resultados, com a SF. Além de apresentarem nomeações aos resultados, tais como: a sequência de Fibonacci por divisão direta e os polinômios de Fibonacci.

Dando continuidade, ao resolverem o segundo item da atividade, constatamos que os alunos não demonstraram dificuldades devido ser um procedimental, semelhante, ao primeiro item. Sobre os resultados, os alunos continuaram o processo de nomeações, do qual destacamos a seguinte terminologia: dizima variante, numa alusão aos coeficientes obtidos na série de potências; além de relacionarem tal observação, ao modelo $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, estudado na atividade anterior. Nesse sentido, os alunos caracterizaram a possibilidade de obtenção da sequência de Fibonacci a outros contextos matemáticos, que não seja somente a modelização do problema dos coelhos. Elementos que evidenciam o alcance da hipótese relativa à atividade 4.

Das análises realizadas anteriormente, de cada atividade, que como já destacamos, foram organizadas e aplicadas, fundamentadas nas fases da TSD; podemos afirmar que alcançamos o quarto objetivo específico da pesquisa relativo à aplicação de uma metodologia de ensino, que nos permitisse a organização de atividades do modelo de generalização da sequência de Fibonacci, voltadas a sala de aula, tendo em vista o estabelecimento ou formulação de definições.

Desse modo, fundamentados nas discussões anteriores, destacamos a validade da utilização da ED em associação com TSD, como metodologias que nos apresentaram rotinas, que permitiram a identificação, descrição e exploração de propriedades relativas à sequência de Fibonacci, num processo de compreensão de sua origem, sistematização e generalização, fundada em seus aspectos matemáticos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista os objetivos traçados na pesquisa, e seguindo as orientações didático-metodológicas da ED e da TSD, realizamos na primeira etapa uma análise preliminar (prévias) do objeto matemático, através de um resgate de alguns artigos científicos das décadas de 60, 70 e 80, bem como o estudo de obras específicas que trazem algumas narrativas históricas relativas à SF.

Sobre esta fundamentação, é pertinente destacar que o desenvolvimento do projeto nos permitiu uma discussão pormenorizada de trabalhos que abordam o processo de generalização da sequência de Fibonacci, sistematicamente negligenciada por parte dos livros de História da Matemática consultados.

Nesse sentido, a partir do levantamento e análise bibliográfica realizados, catalogamos e organizamos um conjunto de modelos de generalização e extensão da SF, com foco para a fórmula de Binet e algumas extensões e relações com outros assuntos matemáticos, realizando uma análise do desenvolvimento matemático de generalização da SF e da fórmula de Binet, atingindo assim os dois primeiros objetivos específicos da pesquisa.

Desse conjunto de modelos, ressaltamos alguns resultados, tais como: a fórmula de Binet, seu modelo estendido e sua relação com as funções geradoras, bem como outros modelos de generalização de Binet, com ênfase nas sequências de Lucas, nas Matrizes, no triângulo de Pascal, na Trigonometria, nos números complexos, nos polinômios e nas funções hiperbólicas.

Na segunda etapa da pesquisa, com o objetivo de apresentar uma organização voltada ao ensino dos modelos observados, realizamos a concepção e análise a priori de quatro situações de ensino de alguns dos modelos de generalização da SF, estabelecidos. Tal organização nos permitiu a descrição de situações didáticas que envolvem o modelo de generalização da SF, desconsiderados pelos autores de livros de HM, o que caracterizou o alcance do terceiro objetivo específico.

Sobre a concepção dessas situações, vale salientar que a organização seguida apresenta uma concepção diferente de ensino, devido à realização de uma espécie de descrição preditiva dos possíveis resultados e questionamentos dos alunos, durante os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização.

Da experimentação caracterizada como a terceira etapa da pesquisa, vale ressaltar que conseguimos a partir da aplicação, exploração e observação das quatro situações de ensino constituídas, discutir as seguintes relações matemáticas da SF: o modelo de generalização implícito e sua extensão a índices negativos; a fórmula de Binet como explícito de generalização da SF e sua forma estendida aos inteiros; as funções Geradoras e a Sequência de Fibonacci.

Ainda sobre as situações de ensino, destacamos que estas foram aplicadas em sala de aula, numa organização fundamentada nas orientações metodológicas da TSD que permitiram o estabelecimento ou a formulação de definições por parte dos sujeitos participantes do estudo, assim atingimos o nosso quarto objetivo específico. Sendo tais situações perfeitamente aplicáveis, não somente na graduação, mas também no ensino básico, com as devidas adaptações.

Assim, do conjunto de resultados obtidos, salientamos que sua compilação e validação, foram realizadas nas etapas de análise a posteriori e validação, configurando a quarta etapa da pesquisa, na qual podemos analisar e validar através dos resultados, as hipóteses didáticas a seguir, relativas a cada situação de ensino. Das quais destacamos os seguintes resultados:

Referente à atividade 1, os alunos caracterizaram a sequência como a de Fibonacci, além de apresentarem a propriedade de recorrência. Apresentaram surpresa e desconhecimento da possibilidade de extensão da SF a índices inteiros, além de nomearem tal possibilidade.

Referente à atividade 2, os alunos conseguiram caracterizar a formulação necessária, tendo por base as raízes da equação quadrática característica do modelo empírico de Fibonacci. Conseguiram satisfatoriamente a partir da formulação obtida, caracterizar os resultados como a sequência de Fibonacci.

Referente à atividade 3, os alunos apresentaram argumentos quanto à possibilidade de extensão dos números de Fibonacci aos inteiros, bem como a partir da observação dos resultados nomearam a sequência, as duplas conseguiram obter a caracterização desejada através do modelo empírico já estabelecido na atividade 2.

Referente à atividade 4, os alunos conseguiram a relação estabelecida entre a divisão de um polinômio e a sequência de Fibonacci, e continuaram o processo de nomeações do modelo constituído, relacionando-os com a sequência estendida de Fibonacci.

Vale destacarmos do conjunto de resultados anteriores, que todos foram condizentes com as hipóteses levantadas em cada etapa de aplicação. Tais hipóteses foram satisfatoriamente validadas ao final da análise e avaliação dos resultados.

Dessa forma as etapas de estruturação da pesquisa: fundamentação do objeto matemático, concepção e organização das situações de ensino, experimentação, análise e validação dos resultados, nos deram subsídios a considerarmos que conseguimos com a pesquisa:

1) Ampliar a discussão relativa ao processo de generalização e extensão do modelo da fórmula de Binet, realizando uma discussão matemática da evolução dos modelos.

2) Valorizar o papel das definições matemáticas como elemento necessário à compreensão de sua evolução.

3) Complementar a abordagem dos livros históricos que não apresentam tal discussão, tendo em vista o âmbito da formação de professores.

4) Evidenciar que distintamente das concepções que costumam dominar o locus acadêmico, dando conta de episódios da História da Matemática, exploramos ideias e concepções que retratam e evidenciam a evolução progressiva de um modelo até os dias atuais.

5) Destacar um percurso de estudo que permitiu a identificação, descrição e exploração de propriedades generalizadas da SF numa discussão, além dos elementos históricos, proporcionando o ensino de tais elementos fundado na exploração de propriedades mais gerais e estruturais.

6) Proporcionar a exploração e a promoção de atividades de investigação, balizadas por pressupostos matemáticos que buscam evidenciar esforços no sentido de proporcionar aos professores de Matemática em formação inicial uma perspectiva dinâmica e não estática de um modelo matemático que possui ligações com vários conceitos científicos.

7) Proporcionar a professores em formação inicial , uma perspectiva alternativa de estudo e ensino de Matemática, de maneira a destacar os significados matemáticos de determinados fatos oriundos da História da Matemática, numa perspectiva de evitar concepções estanques relativas a determinado assunto.

Fundamentados nas considerações anteriores, destacamos que estas apresentam elementos suficientes à caracterização do alcance do objetivo geral da pesquisa na medida em que conseguimos a descrição de um estudo relativo aos modelos de generalização da SF, com ênfase na fórmula de Binet, promovendo a identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

Portanto, esperamos que a sistematização de estudo e ensino seguida, seja uma orientação a professores em formação inicial e continuada, no sentido de referendar a realização de futuros trabalhos que contemplem e complementem, não somente, a sequência de Fibonacci, e sim outros assuntos, elementos que evidenciam a necessidade e realização de futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

ADLER, I. Sequences of a Characteristic Number. **Fibonacci Quarterly,** [S.l.], v. 9, n. 2, p. 147-163 , Apr. 1971. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/9-2/adler.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

ALFRED, B. U. **An introduction to Fibonacci Discovery**. Santa Clara: The Fibonacci Association , 1965. Disponível em:< http://www.fq.math.ca/Books/Complete/discovery.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Sequencias de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequencia Fedathi. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 5., 2010, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2010.

______;______. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 59, p.135 – 140, jul./dez. 2011. Disponível em:<http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>. Acesso em: 28 jun. 2015.

______;______ ; MAIA, J. A. D**.** História da matemática: os números figurais em 2D e 3D. **Revista Conexões Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 40-56, jun. 2012. Disponível em: <http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/477/324>. Acesso em: 25 set. 2015.

ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 6., 2013, São Carlos. **Anais ...** São Paulo: UFSCar, 2013. Disponível em:<http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T5_36_fco_regis_v_ALVES.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

______. Sequência Generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**,v.2, n. 6, p. 30-36, 2015a. Disponível em: <http://seer.uece.br/?journal=BOCEHM&page=article&op=view&path%5B%5D=1440&path%5B%5D=1321> . Acesso em: 03 fev. 2016.

______. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas. **VIDYA Revista Eletrônica**, Santa Maria, v.35, n.1, p.133-146, jan./jun. 2015b. Disponível em: <http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/584/547>. Acesso em: 20 out. 2015.

______. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. **Boletim GEPEM**, nº 68, 1 – 5. 2016a. Disponível em : <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=2225>.Acessado em: 10 ago. 2016.

______. Engenharia Didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci na disciplina de história da matemática: uma experiência num curso de licenciatura**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, p.61-93, 2016b. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879/pdf>. Acesso em: 16 jul. 2016.

ARTIGUE, M. Ingenieria Didática. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. Gomez , P. **Ingeniéria didática em Educacion Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, cap.4, p.33-61.

______. Didactical design in Mathematics Education. In: Winslow, C. (Ed.). **Nordic Research in Mathematics Education.** Copenhagen: Sense Publishers, 2008, cap.2, p. 7 – 16.

AZARIAN, M. K. Fibonacci identities as Binomial Sums**. International Journal Contemporary Math. Sciences**. [S.l.], v.7, n.38, p.1871-1876, 2012. Disponivel em:< http://www.m-hikari.com/ijcms/ijcms-2012/37-40-2012/azarianIJCMS37-40-2012.pdf>.Acesso em: 20 nov.2015

AZEVEDO, A. J. C. Fibonacci Numbes. **The Fibonacci Quarterly**, [S.l.], v. 17, n. 2, p. 162 – 165, Apr. 1979. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/17-2/azevedo.pdf > . Acesso em: 25 set. 2015.

BICKNELL, M. A primer for the Fibonacci Numbres-Part VII. **The Fibonacci quarterly.** [S.l.], v.8,n.4,Oct. 1970. Disponivel em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/8-4/bicknell.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

BROUSSEAU, B. A. A Fibonacci generalization. **Fibonacci Quarterly**, [S.l.], v. 5, n. 2, p. 171 – 175, Apr. 1967. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/5-2/brousseau1.pdf>.Acesso em: 28 jun. 2015.

______. Linear Recursion Relations Lesson Three: The Binet Formulas. **Fibonacci Quarterly**, [S.l.], v. 7, n. 1, p. 99 – 105, Feb.1969. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/7-1/brousseau-a.pdf>. Acesso em: 28 jun.2015.

______. Fibonacci Numbers and Geometry**. The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 10, n. 3, p. 249 – 255, Apr. 1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/6-6/brousseau.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître**. Bulletin de l'A.M.Q.** Montréal, p. 14-24, 1988. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00497481/document>. Acesso em: 30 out. 2015.

BURTON, D. M. **Elementary Number Theory**. New York: McGrill Hill Higher Education, 2007.

CHAKERIAN, G. D.The Golden Ratio and a Greek Crisis. **The Fibonacci Quartely**. [S.l.], v.11, n. 2, p.195 – 201, Apr. 1973. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/11-2/chakerian.pdf>. Acesso em: 27 set. 2015.

CONWAY, J. H.; GUY, R. K.**O livro dos números**. Tradução de José S. Pinto. Lisboa: Gradiva, 1999.

D’AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, p.179-205, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537/131>. Acesso em: 07 jul. 2015.

DE BRUIJN, P.J. An Extension of Fibonacci´s Sequence. **The Fibonacci Quarterly**, [S.l.], v.12, n. 3, p. 251-259, May. 1974. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/12-3/debruijn.pdf >. Acesso em: 10 ago. 2015.

DICKSON, L.E. **History of Theory of Numbers**. Washington: Carnegie Institution of Washington, 1919.

DOMINGUES. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Editora Atual, 1991.

DUNLAP, R. A. **The gold ratio and Fibonacci Numbers**. Singapore: Word Scientific, 1997.

ELMORE, M. Fibonacci Functions. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 5, n.4, p. 371 – 383, Oct. 1967. Disponível em:< http://www.fq.math.ca/Scanned/5-4/elmore.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2015.

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 1, n. 3, p. 209 – 222, Oct. 1963. Disponível em:< http://www.fq.math.ca/Scanned/1-3/feinberg.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2015.

FERGUSON, D. E. An Expression for Generalized Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 4, n. 3, p. 270 – 273, Oct. 1966. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/4-3/ferguson.pdf> . Acesso em: 27 out. 2015.

FILIPPONI, P. Real Fibonacci and Lucas numbers with real subscripts. **The Fibonacci Quartely**,[S.l], v.31, n. 4,p.307-315 , Nov.1993. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/31-4/filipponi.pdf > . Acesso em: 27 out. 2015.

FISHER, P. S.; KOHLBECCKER. E. E. A Generalized Fibonacci Sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 10, n. 4, p.337-344, Oct. 1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/10-4/fisher-a.pdf>. Acesso em: 10 out.2015.

GRIMALDI, R. P. **Fibonacci and Catalan Numbers**: an introduction. New Jersey: Jonh Wiley & Sons, 2012.

GULLBERG, J. **Mathematics: from the birth of numbers**. New York: W. W. Norton & Company, 1977.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

HERZ FISCHLER, R. **A mathematical history of Golden Number**. New York: Dover Publications, 1998.

HOGGAT, Jr. V. **Fibonacci and Lucas numbers**. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1969. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf>. Acesso em: 28 set. 2015.

______; LIND, D.A. Generation Functions for the Fibonacci Sequences. In: BICKNELL, M.; HOGGAT, Jr. V. E. **A primer for Fibonacci Numbers**. [S.l.]: The Fibonacci Association. p. 52-65.1973. Disponivel em :<www.fq.math.ca/primer.html >. Acesso em: 23 out. 2015.

______; BICKNELL, M. Roots of Fibonacci Polynomials**. The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.11, n. 3, p.271-274 , Oct. 1973. Disponivel em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/11-3/hoggatt1.pdf> .Acesso em: 10 nov. 2015.

______;______. Generalized Lucas Sequences. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.15, n. 2,p. 131-140 , Apr.1977. Disponivel em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/15-2/hoggatt2.pdf > . Acesso em: 10 nov. 2015.

HORADAM, A. F. Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.3, n.3, p.166-167, Oct.1965. Disponivel em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/3-3/horadam.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2015.

HUNTLEY, H.E. **A divina proporção**. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

KAUERS, M.; PAULE, P. **The concrete tetrahedron:** simbolic sums, recurrence equations, Generating functions and assymptotic estimates. New York: Springer, 2011.

KESKIN, R. & DEMIRTÜRK, B. Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods. **International Journal of Mathematics Education and Science and Technology**. [S.l.], v. 41, n. 3, p. 379 – 387, 2010. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00207390903236426>. Acesso em: 09 dez.2015.

KING, C. Leonardo Fibonacci. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 1, n. 4,p.15-21 , Dec.1963. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/1-4/king.pdf> . Acesso em: 25 jun. 2015.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, n.10, p. 97 -112, 1997. Disponível em:< http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/23800 > .Acesso em:10 out. 2015

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIVIO, M. **The Golden ratio: the history of Phi**. New York: Broadway Books, 2002.

MAYNARD, P. Generalized Binet formulae. **Applied Probability Trust**, [S.l.], v. 67, n. 2, 2008. Disponível em: <http://ms.appliedprobability.org/data/files/Articles%2040/40-3-2.pdf> .Acesso em: 12 dez. 2015.

MORGADO, J. Note on the Shanno`s theorem concerning the Fibonacci Numbers and the Diophantine quadruples. **Portugalie Mathematica**. Lisboa, v.48, n.4, p.419-439. 1991. Disponivel em: < http://purl.pt/3278/1/j-5293-b-vol48-fasc4-art6_PDF/j-5293-b-vol48-fasc4-

art6_PDF_01-B-R0300/j-5293-b-vol48-fasc4-art6_0000_capa1-439_t01-B-R0300.pdf>. Acesso em: 20 jun.2015

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PARKER, F. D. On the General Term of a Recursive Sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.2, n.1, p. 67-72, Feb.1964. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/2-1/parker.pdf>. Acesso em: 10 jul . 2015.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The Fabulous Fibonacci Numbers**. New York: Prometheus Books, 2007

PICCELLI, P. H. **Processos de Validação de Conjecturas em Geometria Plana.** 2001. 105f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2001.

PRUIT, R. Fibonacci and Lucas Numbers in the Sequence of Golden Numbers.**TheFibonacci Quartely**, [S.l.],v. 5, n. 2, p.175-179, Apr. 1967. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/5-2/pruitt.pdf> . Acesso em: 28 nov. 2015.

RENAULT, M. **The Fibonacci Sequence Under Various Moduli**. 1996, 82 f. Thesis (Master of Arts in Mathematics), Wake Forest University, North Caroline, 1996. Disponível em: < http://webspace.ship.edu/msrenault/fibonacci/FibThesis.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2015.

SANTOS, A.A.; ALVES, F. R. V. O estudo e o ensino da Sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada. **Revista Thema**. [S.l.], v.14, n.2, p.42-53,2016.Disponivel em: <http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/357>.Acesso em: 26 de set.2016.

SARISAHIN, T.; NALLI, A.On the pentanacci numbers. **Mathematical and Computational Application**. v. 19, n. 3, p.255-262, 2014. Disponível em: <http://www.mdpi.com/2297-8747/19/3/255/pdf >Acessado em: 15 fev.2016.

SOUZA, C. M. P.; LIMA, A.P.A. B. O contrato didático a partir da aplicação de uma sequencia didática para o ensino da progressão aritmética. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 22, n. 42, p.31-61, jun./dez. 2014. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/4360>.Acesso em: 02 ago. 2015.

SPICKERMAN, W. R. Binet´s formula for Tribonacci sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 5, n. 3, p. 209 – 222, Oct. 1982. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/20-2/spickerman.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2015.

STAKHOV, A. **The mathematics of harmony:** from Euclid to contemporary mathematics and computer science. London: World Scientific Publishers, 2009.

______; ARANSON. S. Hiperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden”Fibonacci Goniometry, Bornar´s Geometry, Hilbert´s Fourth Problem. **Applied Mathematics**, [S.l.], n.

2, p.74 – 84, Jan.2011.Disponível em: <http://file.scirp.org/pdf/AM20100100019_19605174.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

______; ROZIN, B. On a new class of Hyperbolic Functions. **Chaos, Solutions and Fractals**, [S.l.], v.23, n. 23, p.379 – 389, Jan. 2005a. <http://www.student.oulu.fi/~taneliha/Phi6/1/On%20a%20new%20class%20of%20hyperbolic%20functions.pdf> . Acesso em: 20 jan. 2016.

______; ______. The Golden Shofar. **Chaos, Solutions and Fractals**, [S.l.], v. 26, n. 26, p.677 – 684, Nov. 2005b. <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321041.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

STILLWELL, J. **Mathematics and its History**. New York: Springer Verlag, 1989.

TATTERSALL, J. J. **Elementary Number Theory in Nine Chapters**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M.Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 21, n. 39, p.155-168, jan./jun. 2013. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/4327/5110 > . Acesso em: 02 ago. 2015.

VERNER, E.; HOGGAT, Jr. Advanced problems and solutions. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 1, n. 2, p. 53-56, Apr. 1963. Disponível em:< http://www.fq.math.ca/Scanned/1-2/advanced1-2.pdf> . Acesso em: 06 dez. 2015.

VOROB´EV. N. N. **Fibonacci Numbers**. Oxford: Pergamon Press, 1961.

VOROBIOV. N. N. **Números de Fibonacci**. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editora Mir, 1974.

WADDILL,M. E; SACKS, L. Another Generalized Fibonacci Sequence**. The Fibonacci Quartely**, [S.l.],v. 5, n. 3, p. 209-222 , Oct.1967. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/5-3/waddill.pdf>. Acesso em: 22 set. 2015.

WADDILL, M. E. The Tetranacci Sequence and Generalizations. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 30, n. 1, p. 9-20 , Feb.1992. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/5-3/waddill.pdf> . Acesso em: 22 set.2015.

WEBB, W. A.; PARBERRY, E. A. Divisibility Properties of Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 7, n. 5, p.457-464, Dec.1969. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/7-5/webb.pdf >. Acesso em: Acesso em: 21 ago.2015.

WELLS, D. **Prime Numbers: the mysterious figures in the Math**. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc, 2005.

YALAVIGI, C. C. Properties of Tribonacci Numbers. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.] ,v. 10, n. 3, p. 231-247 , Apr.1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/10-3/yalavigi.pdf> . Acesso em: 28 jun. 2015.

ZECKENDORF, E. A generalized Fibonacci Numeration. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 10, n. 4, p. 365-372, Oct.1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/10-4/zeckendorf.pdf>. Acesso em: 10 jul.2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Demonstração da relação entre a função geradora $x/(1-x-x^2)$ e a fórmula de Binet

Demonstraremos a relação, considerando $\dfrac{x}{1-x-x^2}=\dfrac{A}{(x-\alpha)}+\dfrac{B}{(x-\beta)}$, *com* α *e* β *raízes de* $1-x-x^2=0 \to -x^2-x+1=0$, *de modo que,* $\alpha.\beta=-1$ *e* $\alpha+\beta=-1$.*Ao fazermos os cálculos, teremos:* $\dfrac{A}{(x-\alpha)}+\dfrac{B}{(x-\beta)}=\dfrac{(x-\beta)A+(x-\alpha)B}{(x-\beta)(x-\alpha)}=\dfrac{x}{1-x-x^2}$.*Desenvolvendo encontramos* $\begin{cases} Ax+Bx=1x \\ -A\beta-\alpha B=0 \end{cases} \to \begin{cases} A+B=1 \\ \alpha B=-\beta A \end{cases}$.*Resolvendo o sistema, teremos* $A=\dfrac{\alpha}{x-\beta}$ *e* $B=\dfrac{-\beta}{x-\beta}$. *Dando continuidade, reescreveremos* $\dfrac{x}{1-x-x^2}=\dfrac{A}{(x-\alpha)}+\dfrac{B}{(x-\beta)}$, *como:*

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)}.\frac{1}{(x-\alpha)}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)}.\frac{1}{(x-\beta)}=\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{\alpha}{(x-\alpha)}-\frac{\beta}{(x-\beta)}\right](i)$$

Calculando individualmente os valores de $\dfrac{\alpha}{(x-\alpha)}$ *e* $\dfrac{\beta}{(x-\beta)}$, *teremos:*

$$\frac{\alpha}{(x-\alpha)}=\frac{1}{\frac{x}{\alpha}-1}=-\left(\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}}\right)-(1+\frac{1x}{\alpha}+\frac{1x^2}{\alpha^2}+....+\frac{1x^n}{\alpha^n}),$$ *e de modo análogo:*

$$\frac{\beta}{(x-\beta)}=\frac{1}{\frac{x}{\beta}-1}=-\left(\frac{1}{1-\frac{x}{\beta}}\right)-(1+\frac{1x}{\beta}+\frac{1x^2}{\beta^2}+....+\frac{1x^n}{\beta^n}).$$

Notemos que, como estamos interessados em determinar o coeficiente u_n *de* x^n *no desenvolvimento de* $\dfrac{\alpha}{(x-\alpha)}$ *e* $\dfrac{\beta}{(x-\beta)}$, *sendo estes* $-\dfrac{1}{\alpha^n}$ *e* $-\dfrac{1}{\beta^n}$. *Logo (i), pode ser reescrito, como*

$$\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{-1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right]=\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{-\beta^n+\alpha^n}{\alpha^n\beta^n}\right]=\frac{1}{\alpha^n\beta^n}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]$$

.*Donde obtemos, o seguinte resultado:* $u_n=\dfrac{1}{\alpha^n\beta^n}\left[\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=(-1)^n\left[\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right](ii)$.*Como* α *e* β *são as raízes de*

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE A - Demonstração da relação entre a função geradora $x/(1-x-x^2)$ e a fórmula de Binet (continuação)

$1-x-x^2=0 \rightarrow -x^2-x+1=0$, *de valores* $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{-2}$ *e* $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{-2}$, *e* $\alpha-\beta=\sqrt{5}$.

Podemos reescrever (ii), e obtermos o seguinte resultado:

$$u_n=\frac{1}{\alpha^n\beta^n}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=(-1)^n\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=\frac{(-1)^n}{(\alpha-\beta)}.(\alpha^n-\beta^n)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{-2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{-2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(-1)^n}{(-1)^n}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],n\geq 0\quad (cqd)$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE B - Demonstração da relação entre a função geradora $x/(1+x-x^2)$ e a fórmula de Binet estendida a índices inteiros

Demonstraremos a relação, considerando a seguinte fração parcial $\frac{x}{1+x-x^2}=\frac{-x}{x^2-x-1}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}$, *com* α *e* β *raízes de* $x^2-x+1=0$, *de modo que* $\alpha.\beta=-1$ *e* $\alpha+\beta=1$. *Fazendo os cálculos temos:* $\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}=\frac{(x-\beta)A+(x-\alpha)B}{(x-\beta)(x-\alpha)}=\frac{-x}{x^2-x-1}$. *Obtendo o seguinte sistema:*

$$(x-\beta)A+(x-\alpha)B=-x\rightarrow A(x-\beta)+B(x-\alpha)=-1.x+0$$

$$\begin{cases}Ax+Bx=-1x\\-A\beta-\alpha B=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A+B=-1\\\alpha B=-\beta A\end{cases}$$

.Resolvendo o sistema, encontramos: $A=\frac{-\alpha}{x-\beta}, B=\frac{\beta}{x-\beta}$. *Reescrevemos* $x/(1+x-x^2)$, *da seguinte forma:*

$$\frac{x}{1+x-x^2}=\frac{-\alpha}{(\alpha-\beta)}.\frac{1}{(x-\alpha)}+\frac{\beta}{(\alpha-\beta)}.\frac{1}{(x-\beta)}=\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{\beta}{(x-\beta)}-\frac{\alpha}{(x-\alpha)}\right]\textit{(i).}$$

Calculamos individualmente os valores de $\frac{\beta}{(x-\beta)}$ *e* $\frac{\alpha}{(x-\alpha)}$, *obtemos:*

$$\frac{\beta}{(x-\beta)}=\frac{-\beta}{\beta-x}=\left(\frac{-1}{1-\frac{x}{\beta}}\right)=(-1-\frac{1x}{\beta}-\frac{1x^2}{\beta^2}-....-\frac{1x^n}{\beta^n})$$

, e de maneira análoga,

$$\frac{\alpha}{(x-\alpha)}=\frac{-\alpha}{\alpha-x}=\left(\frac{-1}{1-\frac{x}{\alpha}}\right)=-1-\frac{1x}{\alpha}-\frac{1x^2}{\alpha^2}-....-\frac{1x^n}{\alpha^n})$$

. Note, que estamos interessados em determinar o coeficiente u_{-n} *de* x^n, *no desenvolvimento de* $\frac{\beta}{(x-\beta)}$ *e* $\frac{\alpha}{(x-\alpha)}$, *sendo estes* $-\frac{1}{\beta^n}$ *e* $-\frac{1}{\alpha^n}$. *Logo (i) pode ser reescrito, como*

$$\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{-1}{\beta^n}+\frac{1}{\alpha^n}\right]=\frac{1}{(x-\beta)}\left[\frac{-\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n\beta^n}\right]=\frac{(-1)}{\alpha^n\beta^n}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]$$

.Continuando, concluímos:

$$u_{-n}=\frac{(-1)}{\alpha^n\beta^n}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=(-1).(-1)^n\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=(-1)^{n+1}\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]=(-1)^{n+1}.u_n,\ (cqd)$$

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE C - Demonstração da função geradora da identidade que nos informa a soma dos n primeiros termos de índices ímpares da sequência de Fibonacci

Demonstraremos a função geradora da identidade $\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \dfrac{x}{1-3x+x^2}$*, de Koshy (2011). Nesse sentido, utilizaremos o método de Hoggat e Lind (1973), e ao partirmos de Binet, temos:* $F_n = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \rightarrow F_{2n} = \left(\dfrac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}\right) = \dfrac{1}{\alpha - \beta}.\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right)$. *Continuando, encontramos:*

$$\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\sum_{0}^{\infty}\alpha^{2n}x^n - \sum_{0}^{\infty}\beta^{2n}x^n\right), como \quad \sum_{0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}$$

$$\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\frac{1}{1-\alpha^2 x} - \frac{1}{1-\beta^2 x}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\frac{1-\beta^2 x - 1 + \alpha^2 x}{(1-\alpha^2 x)(1-\beta^2 x)}\right)$$

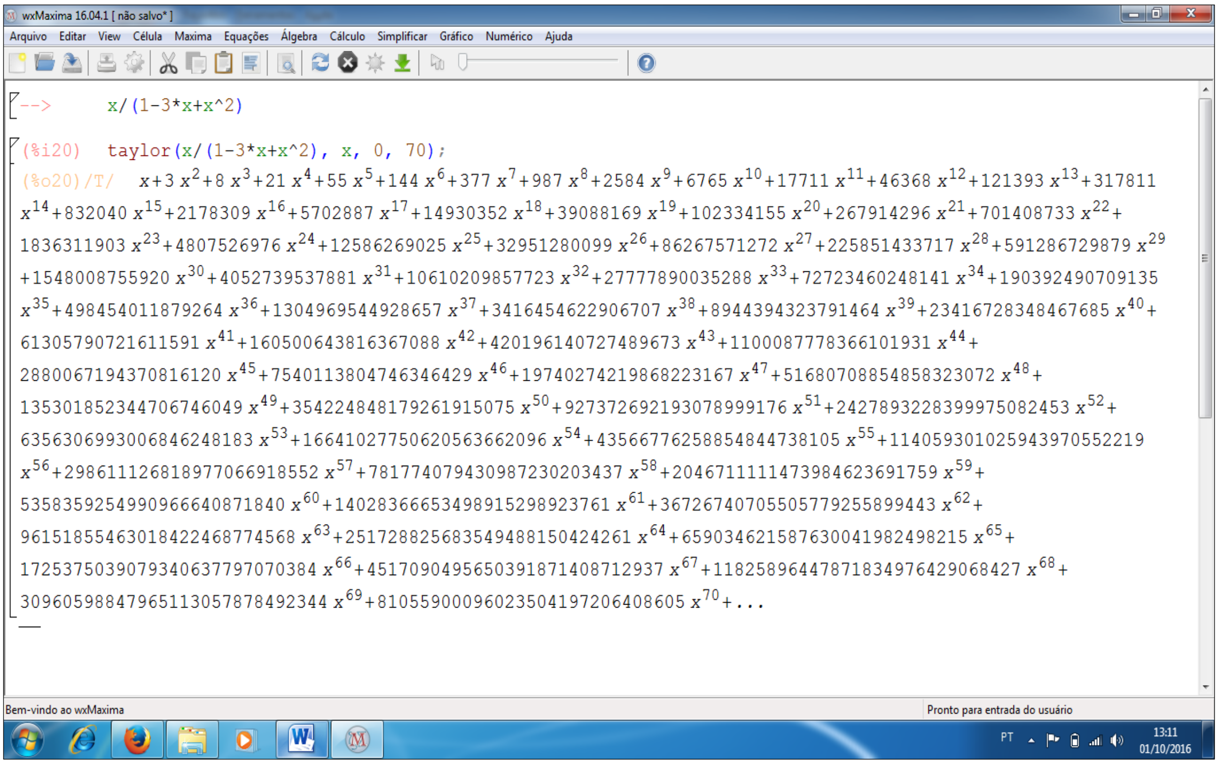
$$\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\frac{x(\alpha^2-\beta^2)}{1-\beta^2 x - \alpha^2 x + \alpha^2\beta^2 x}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\frac{x(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{1-x(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\beta)^2 x^2}\right)$$

$$\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{1}{\alpha-\beta}.\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{1-x(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\beta)^2 x^2}\right), como \quad \alpha+\beta=1, \ \ \alpha^2+\beta^2=3, e \quad \alpha\beta=-1$$

$$\sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}, (cqd).$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE D- Desenvolvimento da função geradora da identidade que nos informa a soma dos n primeiros termos de índices ímpares da sequência de Fibonacci



Fonte: Elaborado pelo autor.

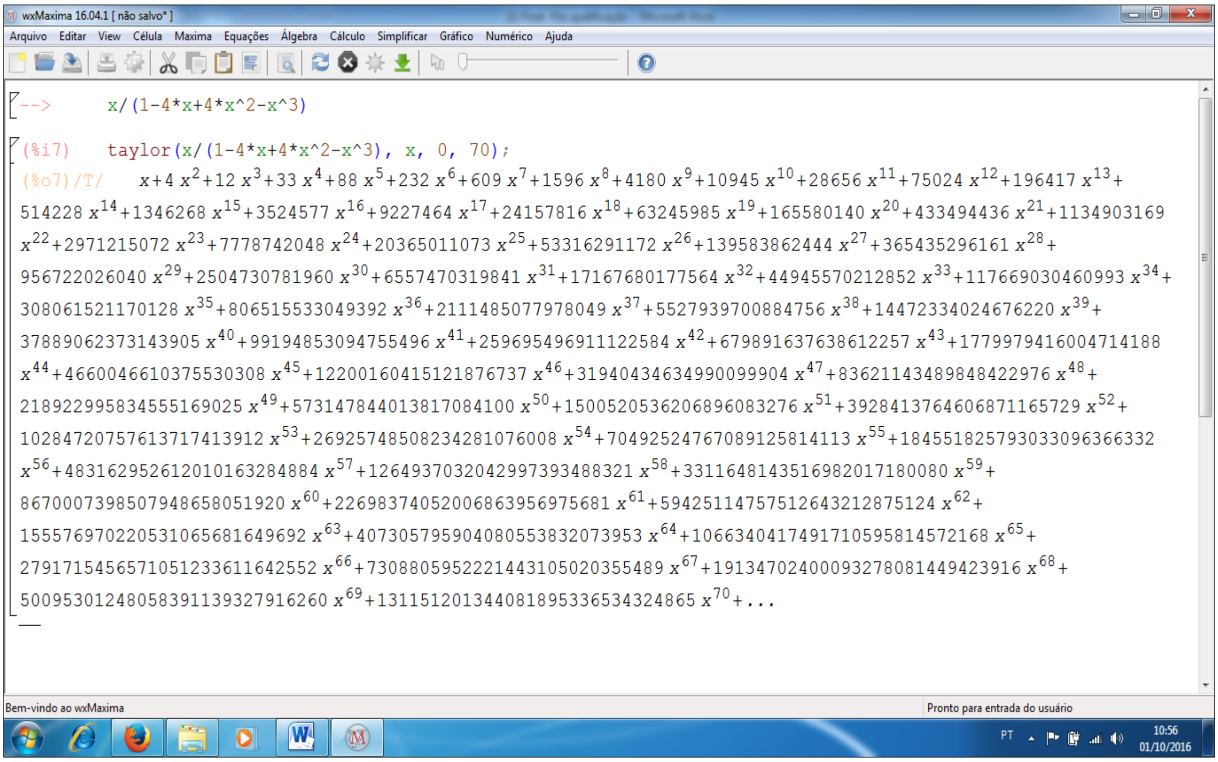
APÊNDICE E - Demonstração da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares

Demonstraremos a função geradora da identidade $F_{2n+1}-1=\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}$ *, considerando inicialmente, os seguintes resultados:* $\sum_{0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ *e* $\sum_{0}^{\infty}F_{2n}x^n=\frac{x}{1-3x+x^2}$ *, e ao fazermos,* $\left(\sum_{0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{0}^{\infty}F_{2n}x^n\right)=\frac{1}{1-x}.\frac{x}{1-3x-x^3}\rightarrow\sum_{0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}\right)x^n=\frac{x}{1-4x+4x^2-x^3}$.

Com as condições inicias $f_0=0$ *e* $f_1=1$*, temos que* $\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}=F_{2n+1}-1$*.Logo, concluímos que:* $h(x)=\frac{x}{1-4x+4x^2-x^3}=\sum_{0}^{\infty}(F_{2n+1}-1)x^n$ *(cqd)*

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE F - Desenvolvimento da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares



$$x+4x^{2}+12x^{3}+33x^{4}+88x^{5}+232x^{6}+609x^{7}+1596x^{8}+4180x^{9}+10945x^{10}+28656x^{11}+75024x^{12}+196417x^{13}+514228x^{14}+1346268x^{15}+3524577x^{16}+9227464x^{17}+24157816x^{18}+63245985x^{19}+165580140x^{20}+433494436x^{21}+1134903169x^{22}+2971215072x^{23}+7778742048x^{24}+20365011073x^{25}+53316291172x^{26}+139583862444x^{27}+365435296161x^{28}+956722026040x^{29}+2504730781960x^{30}+6557470319841x^{31}+17167680177564x^{32}+44945570212852x^{33}+117669030460993x^{34}+308061521170128x^{35}+806515533049392x^{36}+2111485077978049x^{37}+5527939700884756x^{38}+14472334024676220x^{39}+37889062373143905x^{40}+99194853094755496x^{41}+259695496911122584x^{42}+679891637638612257x^{43}+1779979416004714188x^{44}+4660046610375530308x^{45}+12200160415121876737x^{46}+31940434634990099904x^{47}+83621143489848422976x^{48}+218922995834555169025x^{49}+573147844013817084100x^{50}+1500520536206896083276x^{51}+3928413764606871165729x^{52}+10284720757613717413912x^{53}+26925748508234281076008x^{54}+70492524767089125814113x^{55}+184551825793033096366332x^{56}+483162952612010163284884x^{57}+1264937032042997393488321x^{58}+3311648143516982017180080x^{59}+8670007398507948658051920x^{60}+22698374052006863956975681x^{61}+59425114757512643212875124x^{62}+155576970220531065681649692x^{63}+407305795904080553832073953x^{64}+1066340417491710595814572168x^{65}+2791715456571051233611642552x^{66}+7308805952221443105020355489x^{67}+19134702400093278081449423916x^{68}+50095301248058391139327916260x^{69}+131151201344081895336534324865x^{70}+\ldots$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE G- Demonstração da função geradora dos n primeiros termos ao quadrado da sequência de Fibonacci

Demonstraremos a função geradora da identidade $\sum_{0}^{\infty} F_n^{\,2} x^n = \frac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$ *, utilizando novamente, o método utilizado por Hoggat e Lind (1973). Assim, iniciamos fazendo:* $F_n^{\,2} = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \rightarrow F_n^{\,2} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}\right).$ *Continuando, temos:*

$$\sum_{0}^{\infty} F_n^{\,2} x^n = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\sum_{0}^{\infty}\alpha^{2n}x^n - 2\sum_{0}^{\infty}(\alpha\beta)^n x^n + \sum_{0}^{\infty}\beta^{2n}x^n\right), \textit{note que}: \sum_{0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{1}{1-\alpha^2 x} - \frac{1}{1-(\alpha\beta)x} + \frac{1}{1-\beta^2 x}\right), \textit{como} \quad \alpha\beta = -1 \quad e \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(1-(\alpha\beta)x)(1-\beta^2 x) - 2(1-\alpha^2 x)(1-\beta^2 x) + (1-\alpha^2 x)(1-(\alpha\beta)x)}{(1-\alpha^2 x)(1-(\alpha\beta)x)(1-\beta^2 x)}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(1+x)(1-\beta^2 x) - 2(1-\alpha^2 x)(1-\beta^2 x) + (1-\alpha^2 x)(1+x)}{(1-\alpha^2 x)(1+x)(1-\beta^2 x)}\right), \textit{calculando temos}:$$

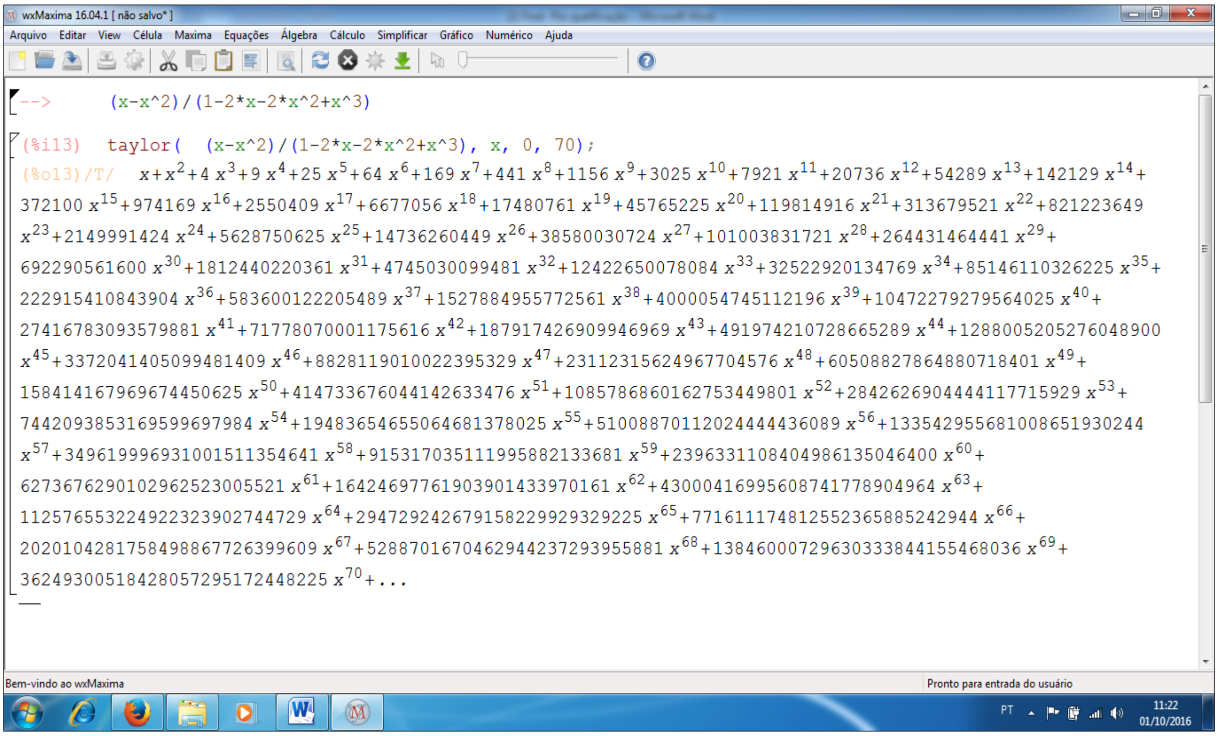
$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(\alpha-\beta)^2(x - x^2)}{(1-\alpha^2 x)(1+x)(1-\beta^2 x)}\right), \textit{desenvolvendo} \ (1-\alpha^2 x)(1+x)(1-\beta^2 x), \textit{temos}:$$

$$(1-\alpha^2 x)(1+x)(1-\beta^2 x) = 1 - x(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha\beta)x^2 = (1-3x+x^2)(1+x) = 1 - 2x - 2x^2 + x^3$$

$$\sum_{0}^{\infty} F_n^{\,2} x^n = \frac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} \ (c.q.d)$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE H - Demonstração da função geradora dos n primeiros termos ao quadrado da sequência de Fibonacci



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE I – Demonstração da função geradora da soma dos n primeiros números ao quadrado de Fibonacci

Demonstraremos a função geradora da identidade $F_n.F_{n+1}=\sum_{j=0}^{\infty}F_j^{\,2}$. *De modo, análogo às demonstrações anteriores, desse modo, iniciamos por:* $\sum_0^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ *e* $\sum_0^{\infty}F_n^{\,2}x^n=\frac{x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$, *e ao fazermos:*

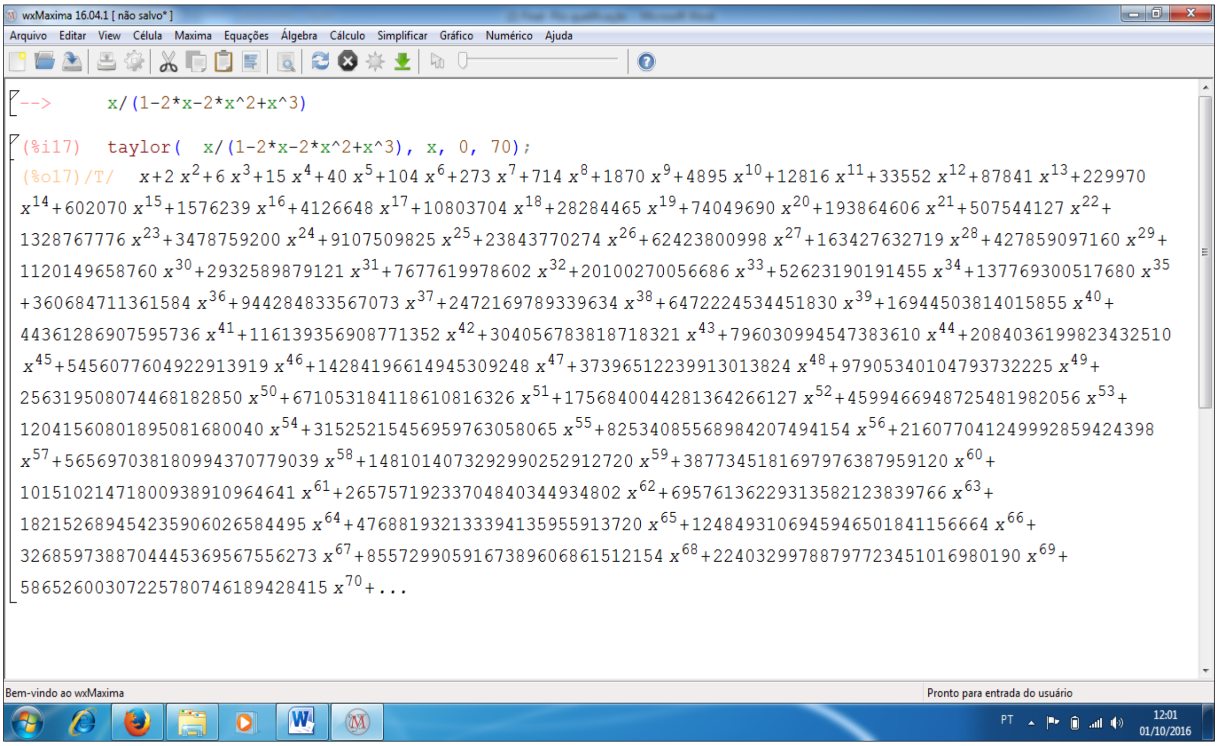
$$\left(\sum_0^{\infty}x^n\right)\left(\sum_0^{\infty}F_n^{\,2}x^n\right)=\frac{1}{1-x}.\frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3}\rightarrow\sum_0^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_j^{\,2}\right)x^n=\frac{x}{1-2x-2x^2+x^3},$$

admitindo agora $f_0=0$ *e* $f_1=1$, *temos que:* $\sum_{j=0}^{\infty}F_j^{\,2}=F_n.F_{n+1}$. *Assim, concluímos que:*

$$q(x)=\frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}=\sum_0^{\infty}(F_nF_{n+1})x^n.$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE J – Desenvolvimento da função geradora da soma dos n primeiros números ao quadrado de Fibonacci



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE K-Obtenção de identidade e demonstração da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares negativos

Iniciamos obtendo a identidade que nos fornece a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares negativos. Assim, a partir da lei de recorrência, temos os seguintes valores $\begin{cases} f_{-1} = f_0 - f_0 \\ f_{-3} = f_{-2} - f_{-4} \\ f_{-5} = f_{-4} - f_{-6} \\ f_{-7} = f_{-6} - f_{-8} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{-(2n-1)} = f_{-(2n-2)} - f_{-(2n)} \end{cases}$ *. Ao somarmos os dois lados das recorrências, obtemos do lado esquerdo* $f_{-1} + f_{-3} + f_{-5} + f_{-7} + \ldots + f_{-(2n-1)}$*. Ao realizarmos as eliminações do lado direito, obtemos* $f_0 - f_{-(2n)}$*. Como* $f_0 = 0$*, temos a seguinte identidade:* $\sum_{-i,i=1}^{-(2n-1)} f_{-(2i-1)} = -f_{-2n}$*.Prosseguimos utilizando o método de Hoggat e Lind (1973) para obtemos a função geradora da identidade* $-f_{-2n}$*, que nos fornece a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares negativos. A partir da fórmula de Binet, obtemos:*

$$-F_{-2n} = \frac{\alpha^{-2n} - \beta^{-2n}}{\alpha - \beta} \to -F_{-2n} = \frac{-(\alpha^{-2n} - \beta^{-2n})}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n - \left(\frac{1}{\beta^2}\right)^n\right]$$

$$como \quad \alpha\beta = -1, temos \frac{1}{\alpha^2} = \beta^2 \quad e \quad \frac{1}{\beta^2} = \alpha^2, Logo: -F_{-2n} = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left[(\beta^2)^n - (\alpha^2)^n\right].$$

Dando continuidade, utilizaremos $\sum_0^\infty a^n x^n = \frac{1}{1 - ax}$*, fazendo os cálculos obtemos:*

$$\sum_0^\infty -F_{-2n}x^n = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left(\sum_0^\infty (\beta^2)^n x^n - \sum_0^\infty (\alpha^2)^n x^n\right) = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{1 - \beta^2 x} - \frac{1}{1 - \alpha^2 x}\right) =$$

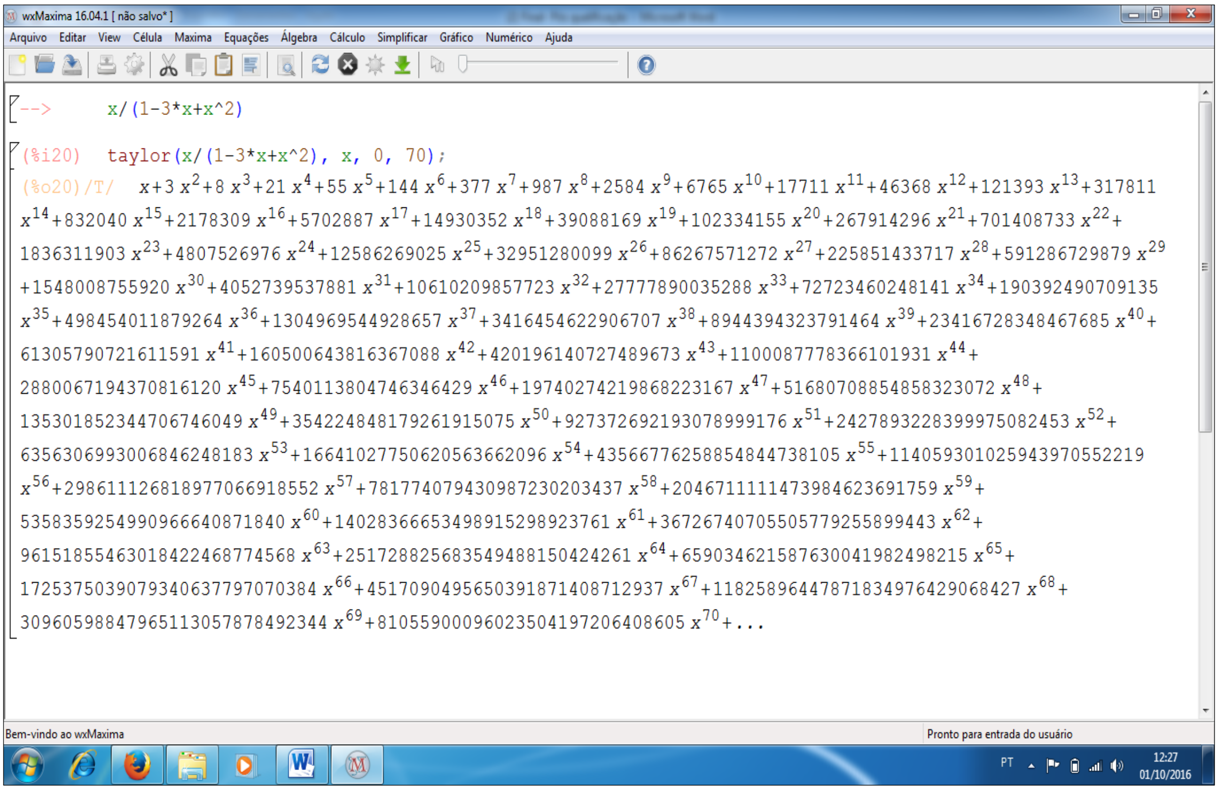
$$\frac{-1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1 - \alpha^2 x - 1 + \beta^2 x}{1 - \alpha^2 x - \beta^2 + \alpha^2\beta^2 x^2}\right) = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left(\frac{-x(\alpha^2 - \beta^2)}{1 - x(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 x^2}\right);$$

$$Como \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3, \alpha^2\beta^2 = 1 \quad e \quad \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta), temos:$$

$$\sum_0^\infty -F_{-2n}x^n = \frac{-1}{\alpha - \beta}\left(\frac{-x(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{1 - x(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 x^2}\right) \to \sum_0^\infty (-F_{-2n})x^n = \frac{x}{1 - 3x + x^2} (c.q.d)$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE L-Obtenção de identidade e demonstração da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares negativos



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE M-Obtenção da identidade e demonstração da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci pares com índices negativos

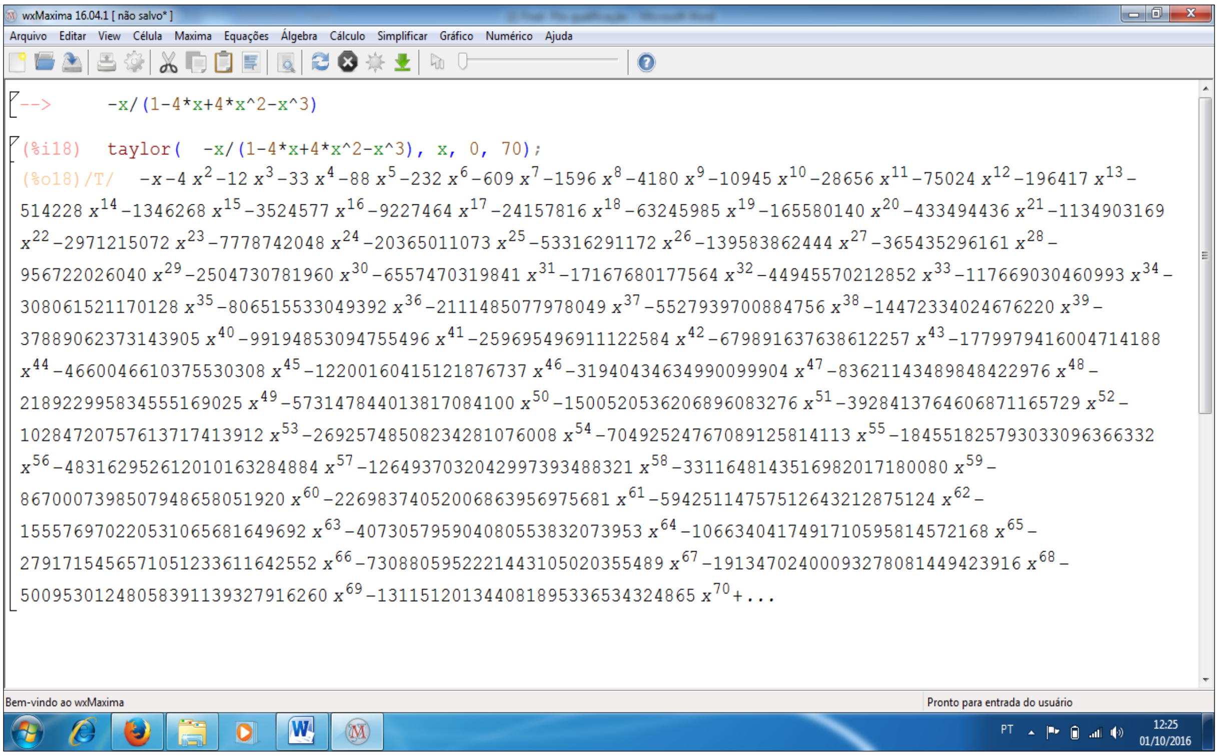
Iniciamos obtendo a identidade que nos fornece a soma dos n primeiros números de Fibonacci pares com índices negativos, e analogamente, a demonstração anterior, faremos

$$\begin{cases} f_{-2} = f_{-3} - f_{-1} \\ f_{-4} = f_{-5} - f_{-3} \\ f_{-6} = f_{-7} - f_{-5} \\ f_{-8} = f_{-9} - f_{-7} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{-2n} = f_{-(2n+1)} - f_{-(2n-1)} \end{cases}$$

. Somando os dois lados das recorrências, obtemos, do lado esquerdo $f_{-2} + f_{-4} + f_{-6} + f_{-8} + ... + f_{-2n}$*.E no lado, esquerdo após os eliminações devidas temos* $-1 + f_{-(2n+1)}$*. Como* $f_0 = 0$*, concluímos* $\sum_{-i,i=2}^{-2n} f_{-(2i)} = -f_{-(2n+1)} - 1$*.Fundamentados no método de Hoggat e Lind (1973) e utilizando o resultado* $\sum_0^{\infty}(-F_{-2n})x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}$*, temos* $\sum_0^{\infty} F_{-2n}x^n = \frac{-x}{1-3x+x^2}$*.Ao utilizarmos* $\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *e* $\sum_0^{\infty} F_{-2n}x^n = \frac{-x}{1+x-x^2}$*.E multiplicando, temos:* $\left(\sum_0^{\infty} x^n\right)\left(\sum_0^{\infty} F_{-2n}x^n\right) = \frac{1}{1-x}.\frac{-x}{1+x-x^2} = \frac{-x}{1-4x+4x^2-x^3}$*, e como* $\sum_{j=0}^{\infty} F_{-2j} = F_{-(2j+1)} - 1$*, obtemos* $\sum_0^{\infty}\left(F_{-(2n+1)} - 1\right)x^n = \frac{-x}{1-4x+4x^2-x^3}(c.q.d).$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE N- Desenvolvimento da função geradora da soma dos n primeiros números de Fibonacci pares com índices negativos



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE O- Demonstração da fórmula de Binet matricial

A fim de demonstrarmos, o que podemos chamar de fórmula de Binet matricial. Iniciaremos apresentando o seguinte teorema, de Koshy (2011).

Teorema 19: *Se Q denota a Q matriz. Demonstre que* $Q^n = f_n Q + f_{n-1} I$ *, onde* I *denota a matriz identidade 2x2*

Para comprovarmos tal assertiva, utilizaremos os argumentos de Keskin e Demirtürk (2010), que enuncia e demostra o seguinte resultado:

Lema: *Sendo* X *uma matriz quadrada, que satisfaz* $X^2 = X + I$*.Então vale que* $X^n = f_n X + f_{n-1} I$ *, para todo* n *inteiro.*

Demonstração: Para $n = 0$ *o resultado é imediato. Vejamos que, por indução sobre* $n \in IN$ *. E reparar que:*

$$X^{n+1} = \left(f_n X + f_{n-1} I \right) X = f_n X^2 + f_{n-1} X = f_n (X + I) + f_{n-1} X =$$
$$(f_n + f_{n-1}) X + f_n I = f_{n+1} X + f_n I \therefore X^{n+1} = f_{n+1} X + f_n I (cqd)$$

Referendados nos resultados anteriores, obteremos a fórmula de Binet em termos matriciais. Nesse sentido, tomaremos o modelo de resolução de uma equação de recorrência de segunda ordem, proposto por Lima et al. (1998) e discutido no teorema 4. Assim, como $Q^2 - Q - I = 0$*, é a equação característica da matriz Q, de raízes* $\alpha \, e \, \beta$*, temos que todas as soluções de* $Q^n = f_n Q + f_{n-1} I$ *, são da forma* $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2$.

Demonstração: Assumiremos inicialmente que $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2, n \geq 0$ *(i), fazendo em (i), n=0 e n=1, teremos:* $\begin{cases} Q_1 + Q_2 = I \\ \alpha Q_1 + \beta Q_2 = Q \end{cases}$*, resolvendo o sistema, temos:* $Q_1 = \dfrac{Q - \beta I}{\alpha - \beta}$ *e* $Q_2 = \dfrac{Q - \alpha I}{\beta - \alpha}$ *.Substituindo,* $Q_1 \, e \, Q_2$ *,em* $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2, n \geq 0$ *,com* $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *obtemos:* $Q^n = \alpha^n \left(\dfrac{Q - \beta I}{\alpha - \beta} \right) + \beta^n \left(\dfrac{Q - \alpha I}{\beta - \alpha} \right), n \geq 0$ *(ii).Resolvendo,* $Q - \beta I$ $Q - \alpha I$ *,encontramos:*

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE O- Demonstração da fórmula de Binet matricial (continuação)

$$Q-\beta I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}$$ *e*

$$Q-\alpha I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$$ *.Continuando, temos em (ii):*

$$Q^n=\frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}-\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}, n\geq 0$$ *.Fazendo os cálculos, obteremos:*

$$Q^n=\begin{pmatrix} a(\alpha^n-\beta^n)+\alpha\beta^n-\beta\alpha^n & b(\alpha^n-\beta^n) \\ c(\alpha^n-\beta^n) & d(\alpha^n-\beta^n)+\alpha\beta^n-\beta\alpha^n \end{pmatrix}, n\geq 0 .Se\, Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ *,teremos:*

$$Q^n=\begin{pmatrix} (\alpha^n-\beta^n)+\alpha\beta^n-\beta\alpha^n & (\alpha^n-\beta^n) \\ (\alpha^n-\beta^n) & (\alpha\beta^n-\beta\alpha^n) \end{pmatrix}, n\geq 0 \quad (c.q.d)$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE P - Demonstração da fórmula de Binet em termos binomiais

Na demonstração do teorema descrito, utilizaremos o princípio da indução matemática. Nesse sentido, calculamos inicialmente os valores para n=0 e n=1, obtendo os resultados de f_1 *e* f_2*. Para n=0,* $f_1=\sum_{i=0}^{0}\binom{0-i}{i}=\binom{0}{0}=1$*; Para n=1,* $f_2=\sum_{i=0}^{0,5}\binom{1-i}{i}=\binom{1}{0}=1$

.Continuando, admitiremos que a propriedade é válida para n=k, isto é, $f_{k+1}=\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{k-i}{i}$

(i) (hipótese de indução). Agora, devemos mostrar que a mesma é válida para n=k+1.Assim, faremos: $f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{(k+1)-i}{i}$ *(ii).*

Dando prosseguimento, utilizaremos a relação de Stifel: $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$.

Ademais, antes de aplicarmos Stifel na parte binomial, reescrevemos esta como, $\binom{(k+1)-i}{i}=\binom{(k-i)+1}{i}$*, e por Stifel, obtemos:* $\binom{(k-i)+1}{i}=\binom{k-i}{i}+\binom{k-i}{i-1}$

Aplicando o resultado em (ii), temos:

$$f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{(k-i)+1}{i}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}+\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$$

Analisando agora $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}$ *(iii), no resultado anterior, notemos que ao aplicarmos as condições de existência de um número binomial, em* $\binom{k-i}{i}$*,com* $(k-i)\in N$ *e* $i\in N$ *e* $0\le i\le k-i$*. Podemos estabelecer as seguintes condições:* $0\le i\le k-i\rightarrow i\le k-i\rightarrow 2i\le k\rightarrow i\le\frac{k}{2}$*.Logo,* $0\le i\le\frac{k}{2}\le\frac{k+1}{2}$*.Assim,*

$$f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{k-i}{i}=f_{k+1}(\text{hipótese de indução}).$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE P - Demonstração da fórmula de Binet em termos binomiais (continuação)

Continuando, analisaremos $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$ *(iv). Faremos inicialmente a seguinte mudança de variável* $i-1=p$*, e como* $0\le i\le\frac{k+1}{2}$*, podemos reescrever* $0\le i\le\frac{k+1}{2}$*, como* $0-1\le i-1\le\frac{k+1}{2}-1\rightarrow -1\le i-1\le\frac{k-1}{2}$*, com* $i\ge 0$*, teremos:* $0\le p\le\frac{k-1}{2}$*.Concluindo obtemos:* $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$*, como* $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}=\sum_{p=0}^{[(k-1)/2]}\binom{(k-1)+p}{p}=f_{(k-1)+1}$*.Da análise dos resultados das manipulações algébricas em (ii), (iii) e (iv), obtemos o seguinte resultado* $f_{(k+1)+1}=f_{(k+1)}+f_{(k-1)+1}$ *, ou seja,* $f_{k+2}=f_{k+1}+f_k$*,com* $k\ge 1$ *(Lei de recorrência da sequência de Fibonacci).*

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE Q - Demonstração da fórmula de Binet trigonométrica

A fim de demonstrarmos tal modelo de Binet, tomaremos inicialmente algumas identidades trigonométricas de referencia, sendo estas:

$$sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta) \quad (i)$$
$$cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1 \quad (ii)$$
$$cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta) \quad (iii)$$

Dando seguimento, já sabemos que: $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{10}$*, e que devemos resolver a equação* $sen(2\theta) = cos(3\theta)$*.Nesse sentido, ao utilizarmos as identidades (i) e (iii). Encontramos* $sen(2\theta) = cos(3\theta) \rightarrow 2sen(\theta)cos(\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta)$*. E ao dividirmos, o resultado por* $cos(\theta) \neq 0$*, teremos:*
$2sen(\theta) = 4cos^2(\theta) - 3 \rightarrow 2sen(\theta) = 4(1 - sen^2(\theta)) - 3 = -4sen^2(\theta) + 1$*.Logo, obtemos a equação* $4sen^2(\theta) + 2sen(\theta) - 1 = 0$ *(iv), proposta por Huntley (1985).*

Ao resolvermos a equação (iv), encontramos as seguintes soluções, $sen(\theta) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$*, como* $\theta = \frac{\pi}{10} = 18^0$*, temos:* $sen(18^0) > 0 \rightarrow sen(\theta) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$
Podemos, reescrever o resultado anterior, da seguinte maneira, $sen(\theta) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{2}(\beta)$*, como* $\alpha.\beta = -1$*, obtemos:* $sen(\theta) = \frac{-1}{2}(\beta) = \frac{1}{2\alpha}$ *(iv).Dando continuidade, como* $5\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{5}$*, e ao utilizarmos* $2\theta = \frac{\pi}{5}$*, na identidade (ii), obtemos:*

$$cos(\frac{\pi}{5}) = 2cos^2(\theta) - 1 = 2(1 - sen^2(\theta)) - 1 = 1 - 2sen^2(\theta) = 1 - 2(\frac{1}{2\alpha})^2 = 1 - \frac{1}{2\alpha^2} =$$
$$\frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} = \frac{(2\alpha^2 - 1)\beta^2}{2\alpha^2\beta^2} = \frac{2\alpha^2\beta^2 - \beta^2}{2\alpha^2\beta^2} = \frac{2 - \beta^2}{2} = \frac{2 - (\beta + 1)}{2} = \frac{1 - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE Q - Demonstração da fórmula de Binet trigonométrica (continuação)

Do resultado anterior, obtemos: $cos(\frac{\pi}{5})=\frac{\alpha}{2}\rightarrow\alpha=2cos(\frac{\pi}{5})$. *Utilizando a identidade (iii),* $cos(3\theta)=4cos^{3}(\theta)-3cos(\theta)$, *e fazendo* $cos(\frac{3\pi}{5})=4cos^{3}(\frac{\pi}{5})-3cos(\frac{\pi}{5})$*,encontramos:*

$$cos(\frac{3\pi}{5})=4(\frac{\alpha}{2})^{3}-3(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}\alpha^{3}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha(\alpha^{2}-3)}{2}\overset{-\beta^{2}=\alpha^{2}-3}{=}\frac{\alpha(-\beta)^{2}}{2}=\frac{\alpha\beta(-\beta)}{2}=\frac{\beta}{2}$$

Assim, temos: $\alpha=2cos(\frac{\pi}{5})$ *e* $\beta=2cos(\frac{3\pi}{5})$. *Ao substituirmos os resultados, em Binet, obteremos a fórmula de Binet trigonométrica, que segundo Grimaldi (2012) esta forma para* f_n*, foi estabelecida por W.Hope-Jones em 1921.*

$$f_n=\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}=\frac{(2cos(\frac{\pi}{5}))^{n}-(2cos(\frac{3\pi}{5}))^{n}}{\sqrt{5}}=\frac{(2)^{n}}{\sqrt{5}}\left[cos^{n}(\frac{\pi}{5})-cos^{n}(\frac{3\pi}{5})\right],n\geq 0$$

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE R - Demonstração da fórmula de extensão da SPF aos inteiros

Para demonstrarmos a seguinte extensão do modelo de Binet, partiremos inicialmente da função geradora dos polinômios de Fibonacci $f_n(x) = f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 + ...+ f_n(x)y^n + ...$, *Koshy (2011). Reescrevemos* $f_{-n}(x) = f_1(x)y - f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 - ......+(-1)^{n+1} f_n(x)y^n + ...$ *.Utilizando o procedimento apresentado em Koshy (2011), faremos* $-x.y.f_{-n}(x); y^2.f_{-n}(x)$*.Logo,*

$$\begin{cases} f_{-n}(x) = f_1(x) - f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 - ......+(-1)^{n+1} f_n(x)y^n + ... \\ -xyf_{-n}(x) = f_1(x)y^2 - f_2(x)y^3 + f_3(x)y^4 + ...-(-1)^{n+1} f_n(x)y^{n+1} + ... \\ y^2 f_{-n}(x) = f_1(x)^3 - f_2(x)y^4 + f_3(x)y^5 - ......+(-1)^{n+1} f_n(x)y^{n+2} + ... \end{cases}$$ *, fazendo os cálculos, obtemos*

a expressão: $$\begin{aligned} &f_{-n}(x)(1+xy-y^2) = f_1(x)y + (-f_2(x) + f_1(x)x)y^2 + (f_3(x) - f_2(x)x - f_1(x))y^3 + ... \\ &.....+(-1)^{n+1}(f_n(x) - f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x))y^n + ... \end{aligned}$$

Como $(-f_2(x) + f_1(x)x) = 0; (f_3(x) - f_2(x)x - f_1(x)) = 0; (f_n(x) - f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)) = 0;\ f_1(x) = 1;\ f_2(x) = x$,

temos que: $f_{-n}(x)(1+xy-x^2) = f_1(x)y + (0)x^2 + (0)x^3 + ...+(-1)^{n+1}(0)x^n + ... \to f_{-n}(x) = \dfrac{x}{1+xy-y^2}$.

Vale destacar, que poderíamos demonstrar a propriedade, se valendo, dos seguintes argumentos. Iniciaremos partindo da função geradora, escrevendo-a em frações parciais, da seguinte forma: $\dfrac{x}{1+xy-y^2} = \dfrac{A}{(1+\alpha(x)y)} + \dfrac{B}{(x+\beta(x)y)}$, *tendo* $\alpha(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+5}}{2}$ *e* $\beta(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+5}}{2}$, *como raízes de* $1+xy-y^2 = 0$, *com* $\alpha(x).\beta(x) = -1$ *e* $\alpha(x)+\beta(x) = 1$. *Fazendo os cálculos temos:* $\dfrac{A}{(1+\alpha(x)y)} + \dfrac{B}{(1+\beta(x)y)} = \dfrac{(1+\alpha(x)y)A + (1+\beta(x)y)B}{(1+\beta(x)y)(1+\alpha(x)y)} = \dfrac{x}{1+xy-y^2}$ *.Logo*

$(1+\beta(x)y)A + (1+\alpha(x)y)B = x \to A(1+\beta(x)y) + B(1+\alpha(x)y) = 1.x + 0$

$\begin{cases} A\beta(x) + B\alpha(x) = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$ *,resolvendo o sistema* $;A = \dfrac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)}, B = \dfrac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}$ *.Reescrevemos;*

$$f_{-n}(x) = \frac{x}{1+xy-y^2} = \frac{1}{(1+\alpha(x)y)}.\frac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)} + \frac{1}{(1+\beta(x)y)}\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)} =$$
$$= \frac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\frac{1}{(1+\alpha(x)y)} - \frac{1}{(1+\beta(x)y)}\right] = \frac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\frac{1}{(1-(-\alpha(x))y)} - \frac{1}{(1-(-\beta(x))y)}\right]$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE R - Demonstração da fórmula de extensão da SPF aos inteiros (continuação)

Note que, das expressões $\frac{1}{(1-(-\alpha(x))y)}$ *e* $\frac{1}{(1-(-\beta(x))y)}$, *obtemos:*

$\frac{1}{(1-(-\alpha(x))y)} = 1-\alpha(x)y-\alpha(x)^2y^2-\alpha(x)^3y^3-.....-\alpha(x)^ny^n$, *e de maneira análoga,*

$\frac{1}{(1-(-\beta(x))y)} = 1-\beta(x)y-\beta(x)^2y^2-\beta(x)^3y^3-.....-\beta(x)^ny^n$. *Tomamos nos desenvolvimento de,*

$\frac{1}{(1-(-\alpha(x))y)}$ *e* $\frac{1}{(1-(-\beta(x))y)}$ *, seus enésimos termos que são* $-\alpha(x)^n$ *e* $-\beta(x)^n$, *e ao substituirmos em* $f_{-n}(x)$, *encontramos:*

$$f_{-n}(x) = \frac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\frac{1}{(1-(-\alpha(x))y)} - \frac{1}{(1-(-\beta(x))y)}\right] = \frac{-1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[(-\alpha(x))^n - (-\beta(x))^n\right] =$$

$$= \frac{(-1).(-1)^n}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\alpha(x)^n - \beta(x)^n\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\alpha(x)^n - \beta(x)^n\right] \rightarrow f_{-n}(x) = (-1)^{n+1} f_n(x) \quad (c.q.d)$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE S - Demonstração da fórmula de Binet para tribonacci

A fim de demonstrarmos tal modelo de Binet, consideraremos a seguinte relação $t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}$ *e, a partir dai, consideramos a seguinte função geradora* $f(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + t_4x^4 + \cdots + t_nx^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} t_ix^i$. *Em seguida, seguindo o raciocínio de Spickerman (1982), avaliamos:* $x \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t_ix^{i+1}$, $x^2 \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t_ix^{i+2}$, $x^3 \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t_ix^{i+3}$ *e efetuamos a diferenças das mesmas, obtendo:* $(1 - x - x^2 - x^3) \cdot f(x) = 1 \therefore f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x - 1}$. *No que segue, Spickerman (1982) considera as raízes da cúbica* $x^3 - x^2 - x - 1$ *e assume a seguinte decomposição:* $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x - 1} = \dfrac{1}{(1-\rho x)(1-\sigma x)(1-\bar{\sigma} x)} = \dfrac{1}{p(x)}$*.Aplicamos, pois, as fórmulas de Cardano, até obter as expressões no enunciado, dadas por* $\rho = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1\right)$ *e* $\sigma = \dfrac{1}{6}\left(2 - \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt{3}i\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)$. *Spickerman (1982) desenvolve valores aproximados, ao indicar ainda que* $\rho = 1{,}8393; \sigma = -0{,}4196 + 0{,}6063i, \bar{\sigma} = -0{,}4196 - 0{,}6063i$.

No que segue, buscaremos determinar a seguinte decomposição em frações parciais: $f(x) = \dfrac{1}{(1-\rho x)(1-\sigma x)(1-\bar{\sigma} x)} = \dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{A}{(1-\rho x)} + \dfrac{B}{(1-\sigma x)} + \dfrac{C}{(1-\bar{\sigma} x)}$. *Em seguida, faremos as contas para determinar os coeficientes A, B e C:* $\dfrac{1}{(1-\rho x)(1-\sigma x)(1-\bar{\sigma} x)} = \dfrac{A}{(1-\rho x)} + \dfrac{B}{(1-\sigma x)} + \dfrac{C}{(1-\bar{\sigma} x)}$. *Os quais determinamos:*

$$A = \frac{1}{(1-\frac{\sigma}{\rho})(1-\frac{\bar{\sigma}}{\rho})} = \frac{\rho^2}{(\rho-\sigma)(\rho-\bar{\sigma})}, B = \frac{1}{(1-\frac{\rho}{\sigma})(1-\frac{\bar{\sigma}}{\sigma})} = \frac{\sigma^2}{(\sigma-\rho)(\sigma-\bar{\sigma})} \text{ e}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE S - Demonstração da fórmula de Binet para tribonacci (continuação)

$$C = \frac{1}{(1-\frac{\rho}{\sigma})(1-\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})} = \frac{\bar{\sigma}^2}{(\bar{\sigma}-\rho)(\bar{\sigma}-\sigma)}$$ *.Consequentemente, encontramos para f(x):*

$$f(x) = \frac{\rho^2}{(\rho-\sigma)(\rho-\bar{\sigma})}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i x^i + \frac{\sigma^2}{(\sigma-\rho)(\sigma-\bar{\sigma})}\sum_{i=0}^{\infty}\sigma^i x^i + \frac{\bar{\sigma}^2}{(\bar{\sigma}-\rho)(\bar{\sigma}-\sigma)}\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\sigma}^i x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{i+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\bar{\sigma})} + \frac{\sigma^{i+2}}{(\sigma-\rho)(\sigma-\bar{\sigma})} + \frac{\bar{\sigma}^{i+2}}{(\bar{\sigma}-\rho)(\bar{\sigma}-\sigma)}\right)x^i \text{, obtendo finalmente:}$$

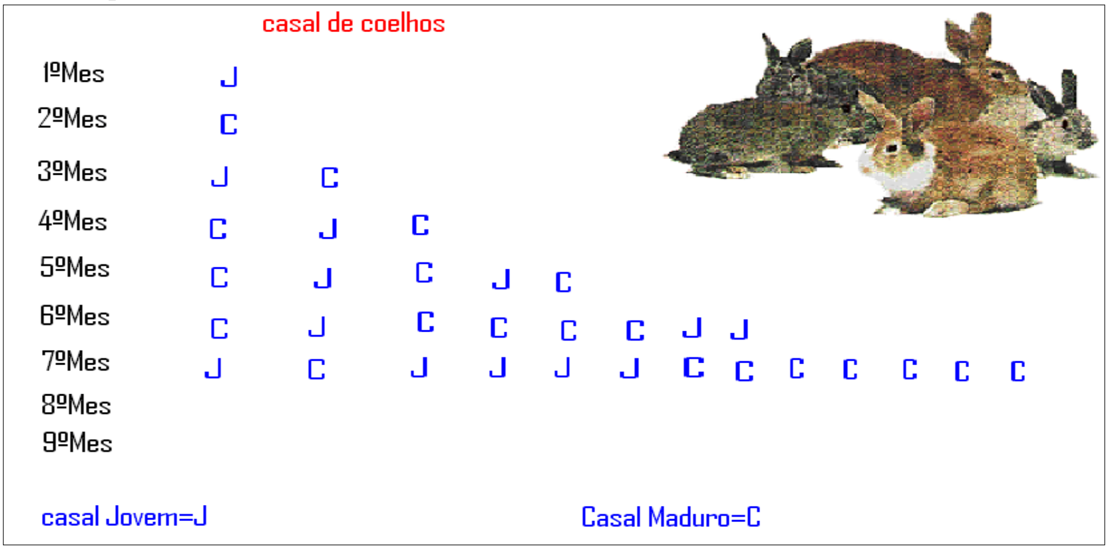
$$u_n = \frac{\rho^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\bar{\sigma})} + \frac{\sigma^{n+2}}{(\sigma-\rho)(\sigma-\bar{\sigma})} + \frac{\bar{\sigma}^{n+2}}{(\bar{\sigma}-\rho)(\bar{\sigma}-\sigma)} \quad \textit{(Fórmula de Binet para tribonacci)}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE T - Atividade 1 relativa ao primeiro momento de aplicação

OS COELHOS DE FIBONACCI

Como destaca Hefez (2003, p.26) trata-se do seguinte problema proposto e resolvido por Leonardo de Pisa em seu livro, *Líber Abacci* de 1202: *Quotparia coniculorum in uno anno ex unopario germinentur*. Trocando em miúdos: *um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento*.



O esquema mnemônico, anterior, demonstra a descrição e modelização da reprodução de coelhos relacionada com o problema dos coelhos. Utilizando o esquema, responda:

1) Que sequência você relacionaria com a situação do nascimentos de casais de coelhos? Explique suas escolhas.

2) Indique uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo e, assim, sucessivamente. Podemos estabelecer uma relação que generalize esses resultados anteriores?

3) Com base na relação anterior, podemos avaliar os valores de $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$ Descreva esse conjunto numérico. Que nome ou terminologia podemos atribuir a sequência obtida?

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE U - Atividade 2 relativa ao segundo momento de aplicação

Huntley (1985, p. 63) relata que a "ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série". Nesse sentido, dada α a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, e sua raiz negativa β, teremos que $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$. Com base, no teorema descrito, responda:

1) Com base nos valores de α e β, como podemos reescrever $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$?

2) Ao verificar alguns resultados com $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos dar ao modelo?

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE V - Atividade 3 relativa ao terceiro momento de aplicação

Nos compêndios de História da Matemática-HM, a formula atribuída a Binet proporciona a obtenção explicita dos termos da sequência de Fibonacci, sendo esta indicada por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$, (KOSHY, 2011).Sendo esta fórmula descoberta 500 anos depois, em 1730, por De Moivre (STILLWELL, 1989). Com base nos argumentos, responda:

1) Que resultados podemos estabelecer ao utilizarmos $f_{-n} = (-1)^{n+1} . f_n$? Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir ao modelo?

2) Com base nos argumentos anteriores, podemos estabelecer uma demonstração para $f_{-n} = (-1)^{n+1} . f_n$?

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE W - Atividade 4 relativa ao quarto momento de aplicação

Como destaca Huntley (1985 p.144-145) “os números de Fibonacci aparecem de novo em um contexto totalmente diverso”. Nesse sentido, o autor argumenta que ao determinarmos alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$ através de divisão direta, forma a série de Fibonacci.

1) Com base no que sugere Huntley (1985) , o que obteremos em $\frac{x}{1-x-x^2}=?$ Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir aos resultados obtidos?

2) E agora, que conclusões podemos estabelecer para $\frac{x}{1+x-x^2}=?$

Fonte: Elaborado pelo autor

ANEXO

ANEXO A - Termo de autorização a divulgação dos resultados e imagens das produções dos alunos pesquisados

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PGECM

ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DA FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Prezado (a) aluno(a),

Pedimos a colaboração no preenchimento dos instrumentos que são partes integrantes de uma pesquisa que visa fundamentar a dissertação do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (PGECM/IFCE). Pedimos a sua autorização para que os dados aqui fornecidos possam ser utilizados na dissertação e futuras publicações. O anonimato dos sujeitos da pesquisa é garantido pelo pesquisador.

Nome completo:____

Curso:____ Semestre:___________________________

Instituição:____

Obrigado por ter dedicado seu tempo e interesse em participar da pesquisa.

Cordialmente,

Arlem Atanazio dos Santos